A. TIMOTIN V. HORTOPAN

Scan

LECȚII DE BAZELE ELECTROTEHNICII

VOL. I

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI — 1962

MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI
INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI

A. TIMOTIN V. HORTOPAN

LECŢII DE BAZELE ELECTROTEHNICII

VOL. I

ELECTROSTATICA
ELECTROCINETICA
ELECTRODINAMICA

Hard
primită de la Ion Dogaru
Bucureşti

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
BUCUREŞTI — 1962

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Lecțiile cuprinse în prezentul volum au fost întocmite cu scopul de a pune la dispoziția studenților de la cursurile serale ale facultăților de specialitate electrotehnică de la Institutul Politehnic din București — Electrotehnică, Energetică (secția Electroenergetică), Electronică și Telecomunicații — un material cît mai apropiat de acela efectiv predat în cadrul acestor cursuri la disciplina Bazele Electrotehnicii.

Redactarea a fost făcută astfel ca prevederile programei analitice să fie acoperite cu o extensiune relativ limitată, corespunzătoare atît numărului de ore afectat disciplinei prin planurile de învățămînt la aceste facultăți, cît și ponderii pe care pregătirea la Bazele Electrotehnicii trebuie să o aibă în planul de studiu individual al studenților de la învățămîntul seral. La redactare s-au presupus cunoscute principalele cunoștințe de Electricitate și Electromagnetism și de teoria unităților de măsură predate la cursul de Fizică generală, precum și noțiunile fundamentale de calcul vectorial și de teoria cîmpurilor de vectori predate la cursul de Matematici speciale. Întregul material al lecțiilor va fi repartizat în două volume. Primul volum, cuprinzînd bazele macrofizice ale electrotehnicii — adică, în esență, teoria lui Maxwell — a fost întocmit folosind notele de curs corespunzătoare prelegerilor ținute în anul universitar 1960—1961. Un al doilea volum va cuprinde teoria circuitelor de curent alternativ, liniile electrice lungi, undele electromagnetice și elemente de teorie microscopică a fenomenelor electromagnetice. Pentru a se ușura sistematizarea materialului au fost culese cu literă mică paragrafele cuprinzînd aplicațiile și anumite chestiuni suplimentare, cu caracter facultativ.

Autorii rămîn profund îndatorați prof. Remus Răduleț, membru corespondent a Academiei R.P.R., ale cărui lucrări și a cărui îndrumare au contribuit în mod esențial la pregătirea acestor prelegeri — și exprimă recunoștința lor ing. Sanda Mastero, șefă de lucrări, care a revăzut cu deosebită atenție manuscrisul.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață

1. Introducere

1.1. Obiectul cursului de Bazele electrotehnicii 9
1.2. Importanța electrificării și prevederile cuprinse în Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. 10
1.3. Evoluția cunoștințelor despre fenomenele electrice și magnetice 11
1.4. Diferite teorii ale fenomenelor electrice și magnetice 14
1.5. Prezentarea sistematică a cunoștințelor despre fenomenele fizice. Conținutul cursului 16

ELECTROSTATICA

2. Sarcina electrică și intensitatea cîmpului electric în vid

2.1. Starea de electrizare și cîmpul electric. Conductori și izolanți 21
2.2. Definirea sarcinii electrice și a intensității cîmpului electric în vid. Linii de cîmp 22
2.3. Densități de sarcină electrică. Conservarea sarcinii 27
2.4. Teorema (legea) lui Coulomb. Raționalizarea. Permitivitatea vidului. Unități de măsură 28

3. Cîmpuri electrice coulombiene în vid

3.1. Cîmpul electric produs de un corp punctual încărcat cu sarcina electrică adevărată q. Principiul superpoziției 32
3.2. Teorema lui Gauss. Fluxul cîmpului electric coulombian în vid 34
3.3. Potențialul electrostatic al cîmpului electric coulombian. Suprafețe echipotențiale. Gradient 38
3.4. Aplicații la calculul cîmpurilor și potențialelor electrostatice 42

4. Polarizarea dielectricilor

4.1. Starea de polarizație și caracterizarea ei. Momentul electric 48
4.2. Dipolul electric. Echivalența dintre un dipol electric și un mic corp polarizat .. 51
4.3. Potențialul și cîmpul electric al unui dipol 53
4.4. Sarcini de polarizație. Densitatea sarcinii de polarizație 57
4.5. Interpretarea microscopică a polarizației electrice 60

5. Cîmpul electric în interiorul corpurilor polarizate

5.1. Cîmpul electric în interiorul unei cavități 64
5.2. Intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$. Tensiunea electrică U 65
5.3. Inducția electrică $\overline{D}$. Fluxul electric Ψ 66
5.4. Legătura dintre inducție, intensitate și polarizație 68
5.5. Intensitatea cîmpului electric imprimat 68

6. Relațiile fundamentale ale electrostaticii

6.1. Legea conservării sarcinii unui corp izolat 69
6.2. Legea legăturii dintre $\overline{D}$, $\overline{E}$ și $\overline{P}$ 70
6.3. Legea polarizației electrice temporare 70
6.4. Legea fluxului electri 71
6.5. Teorema potențialului electrostatic 75
6.6. Condiția de echilibru electrostatic 79
6.7. Suprafețe de discontinuitate. Condiții de frontieră la suprafața de separație a doi dielectrici 81

Scanned with OKEN Scanner

7. **Capacităţi**
7.1. Unicitatea şi superpoziţia cîmpurilor electrostatice 83
7.2. Teorema capacităţii electrostatice 85
7.3. Calculul capacităţilor electrostatice 86
7.4. Aplicaţii 88
7.5. Teoremele capacităţilor echivalente 90
7.6. Relaţiile lui Maxwell privitoare la capacităţi 93

8. **Energie şi forţe electrostatice**
8.1. Energia electrostatică a cîmpului unui sistem de conductori 95
4.2. Repartizarea (localizarea) energiei în cîmpul electric. Densitatea de energie electrică 97
8.3. Forţe electrostatice şi calculul lor (teoremele forţelor generalizate) 99
8.4. Aplicaţii. Electrometrul Thomson 102
8.5. Tensiuni maxwelliene 103

9. **Metodele electrostaticii**
9.1. Metoda elementară 106
9.2. Metoda imaginilor electrice 107
9.3. Metode de aproximare a liniilor de cîmp 109
9.4. Metoda rezolvării ecuaţiilor Laplace şi Poisson 109

ELECTROCINETICA

10. **Tensiunea electromotoare şi tipuri de cîmpuri imprimate**
10.1. Tensiunea electromotoare 111
10.2. Cîmpuri imprimate de volum 113
10.3. Cîmpuri imprimate de contact (pe interfeţe) 115

11. **Starea electrocinetică şi caracterizarea ei**
11.1. Starea electrocinetică 118
11.2. Intensitatea curentului electric de conducţie 121
11.3. Unităţile de intensitate a curentului electric 122
11.4. Densitatea curentului electric de conducţie 123
11.5. Curentul de convecţie şi densitatea lui 124

12. **Relaţiile fundamentale ale electrocineticii**
12.1. Teorema potenţialului electric staţionar 127
12.2. Legea conservării sarcinii electrice 128
12.3. Legea conducţiei electrice (legea lui Ohm) 132
12.4. Legea transformării energiei în conductori (legea Joule-Lenz) 137

13. **Circuite filiforme liniare de curent continuu**
13.1. Circuit simplu de curent continuu. Asociaţia sensurilor de referinţă 141
13.2. Teoremele lui Kirchhoff 143
13.3. Teorema conservării puterilor 148
13.4. Teorema transferului maxim de putere 150
13.5. Teoremele rezistenţelor echivalente 151
13.6. Teorema superpoziţiei 153
13.7. Teorema reciprocităţii 154
13.8. Teorema generatorului echivalent 155

14. **Circuite neliniare de curent continuu**
14.1. Elemente de circuit neliniare 159
14.2. Caracterizarea rezistoarelor neliniare 162
14.3. Teoremele lui Kirchhoff aplicate circuitelor cu elemente neliniare 163
14.4. Aplicaţii 165

15. **Electroliţi**
15.1. Disociaţia electrolitică 168
15.2. Electroliza 169
15.3. Pile şi acumulatoare 171

Scanned with OKEN Scanner

ELECTRODINAMICA ŞI MAGNETOSTATICA

16. **Cîmpul magnetic şi explorarea lui. Inducţia magnetică în vid**

16.1. Cîmpul magnetic şi explorarea lui în vid 179
16.2. Definiţia inducţiei magnetice în vid 181
16.3. Forţa exercitată asupra unui element de conductor 182
16.4. Forţa electrodinamică dintre doi conductori paraleli. Permeabilitatea vidului 184

17. **Cîmpul magnetic al circuitelor de curent continuu în vid**

17.1. Formula lui Biot-Savart-Laplace 187
17.2. Experienţele lui Biot şi Savart 188
17.3. Cîmpul magnetic al curentului ce trece printr-un conductor rectiliniu, infinit de lung 191
17.4. Intensitatea cîmpului magnetic într-un punct pe axa unei spire circulare parcurse de curent electric 192
17.5. Potenţialul magnetic scalar al unei spire 193
17.6. Proprietăţi generale ale cîmpului magnetic în vid produs de circuite de curent continuu 195

18. **Magnetizarea corpurilor**

18.1. Starea de magnetizaţie. Momentul magnetic. Magnetizaţia 199
18.2. Echivalenţa dintre un mic corp magnetizat şi o buclă de curent 202
18.3. Potenţialul şi cîmpul magnetic produse în vid de corpuri magnetizate..... 203
18.4. Curenţi amperieni 204
18.5. Interpretarea microscopică a magnetizaţiei 207

19. **Intensitatea cîmpului magnetic şi inducţia magnetică în interiorul corpurilor magnetizate**

19.1. Intensitatea cîmpului magnetic $\overline{H}$ 209
19.2. Inducţia magnetică $\overline{B}$ 209
19.3. Legătura dintre inducţia magnetică, intensitatea cîmpului magnetic şi magnetizaţie 210
19.4. Recapitularea unor noţiuni şi teoreme de analiză vectorială 211

20. **Legea fluxului magnetic**

20.1. Forma integrală a legii 214
20.2. Formele locale ale legii 214
20.3. Linii şi tuburi de flux magnetic 216
20.4. Potenţialul magnetic vector 217

21. **Legea circuitului magnetic**

21.1. Forma integrală a legii 218
21.2. Justificarea legii circuitului magnetic 219
21.3. Forma integrală dezvoltată a legii 221
21.4. Formele locale ale legii 223
21.5. Aplicaţii 224

22. **Legea inducţiei electromagnetice**

22.1. Forma integrală a legii 226
22.2. Justificare energetică 228
22.3. Forma integrală dezvoltată a legii 229
22.4. Formele locale ale legii 230
22.5. Aplicaţii 231

23. **Legea magnetizaţiei temporare**

23.1. Legea magnetizaţiei temporare în medii liniare 235
23.2. Feromagnetismul 237

24. **Cîmpul magnetostatic al magneţilor permanenţi**

24.1. Relaţiile fundamentale ale magnetostaticii 241
24.2. Circuit magnetic cu magnet permanent 244

25. **Cîmpul magnetic produs de curenţi electrici în regim evasistaţionar**

25.1. Relaţii fundamentale. Unicitatea şi superpoziţia cîmpurilor magnetice 246
25.2. Ecuaţia lui Poisson pentru potenţialul magnetic vector 247

Scanned with OKEN Scanner

25.3. Teorema Biot-Savart-Laplace 250
25.4. Teorema refracţiei liniilor de cîmp 251
25.5. Aplicaţii la calculul cîmpurilor magnetice cu metoda elementară 252

26. **Circuite magnetice**

26.1. Reluctanţa. Permeanţa 256
26.2. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice 257
26.3. Teoremele reluctanţelor echivalente 260
26.4. Teoremele generale ale teoriei reţelelor magnetice 261
26.5. Circuite magnetice neliniare 262
26.6. Aplicaţii 263

27. **Inductivităţi**

27.1. Inductivităţi proprii şi mutuale 266
27.2. Calculul inductivităţilor. Unităţi de măsură 268
27.3. Compunerea inductivităţilor în serie 270
27.4. Inductivităţi de dispersie (inductivităţi de scăpări) 272
27.5. Exprimarea t.e.m. induse cu ajutorul inductivităţilor 274
27.6. Calculul inductivităţii unor circuite aeriene 275

28. **Energia magnetică şi forţele magnetice**

28.1. Energia magnetică a unui sistem de circuite 278
28.2. Densitatea de volum a energiei magnetice 280
28.3. Teoremele forţelor generalizate în cîmpul magnetic 282
28.4. Aplicaţii. Forţa portantă a unui electromagnet 284
28.5. Forţe electrodinamice între circuite parcurse de curenţi 285
28.6. Tensiuni maxwelliene în cîmpul magnetic 285

29. **Ecuaţiile lui Maxwell pentru cîmpul electromagnetic**

29.1. Recapitularea legilor generale şi a principalelor legi de material ale electromagnetismului 286
29.2. Ecuaţiile lui Maxwell 290
29.3. Unda electromagnetică plană 292
29.4. Teorema energiei electromagnetice. Fluxul energiei electromagnetice 298

30. **Sistemele de unităţi folosite în electromagnetism**

30.1. Problemele sistemelor de unităţi 303
30.2. Principalele sisteme de unităţi 307
30.3. Sistemul de unităţi simetric CGS — Gauss 311

Scanned with OKEN Scanner

1. Introducere

1.1. Obiectul cursului de bazele electrotehnicii

Cursul de bazele electrotehnicii are ca obiect studiul fenomenelor electrice și magnetice din punctul de vedere al aplicațiilor tehnice. Acest studiu trebuie să constituie pregătirea teoretică de bază a inginerilor electricieni. Aplicațiile tehnice propriu-zise se studiază la cursurile de specialitate.

În linii mari, problemele electrotehnicii se împart în două categorii: probleme de electroenergetică (de curenți tari), care se referă la producerea, transmisia și utilizarea electromagneticei; probleme de electrocomunicații (de curenți slabi), care se referă la producerea, transmisia, reproducerea și înregistrarea semnalelor electromagnetice purtătoare de informații. Cele două categorii de probleme intervin împreună în aplicațiile tehnice. De exemplu, o stație de transformare are instalații electroenergetice, precum și unități de protecție, măsură, comandă, semnalizare etc., care poartă și transmit informații privitoare la starea părților componente ale instalației sau la modul lor de acționare.

Energia electromagnetică (numită uzual incomplet „energie electrică") are următoarele proprietăți remarcabile: se transformă ușor în orice altă formă de energie și reciproc; se transmite ușor și practic instantaneu la mari distanțe; se divide și se distribuie foarte ușor cu ajutorul circuitelor electrice. Energia electromagnetică se înmagazinează însă greu într-un volum restrîns și numai pentru un timp relativ scurt, din care cauză nu se pot constitui rezerve de energie sub această formă: ea trebuie deci transmisă pe măsură ce se produce. Ori de cîte ori sursa de energie primară (mina de cărbuni, căderea de apă etc.) nu e situată în imediata vecinătate a consumatorilor de energie (locuințe, fabrici, echipament agricol etc.), este indicat să se studieze posibilitatea transformării energiei primare în energie electromagnetică în mari unități producătoare de energie, numite centrale electrice, la fața locului. Energia electromagnetică astfel produsă va putea fi transmisă economic la distanță cu ajutorul liniilor electrice de înaltă tensiune, pînă la locul de utilizare, unde va putea fi transformată în forma direct utilizabilă: energie mecanică în motoare, căldură în aparatele de încălzit, energie chimică în celulele electrolitice, lumină în corpurile de iluminat etc.

Rolul pe care utilizarea energiei electrice îl are în atingerea obiectivelor economiei socialiste și comuniste este atît de mare încît V. I. Lenin a socotit necesar să formuleze lozinca: „Comunismul este puterea sovietelor plus

electrificarea întregii țări". De aceea, electrificarea este socotită, pe drept, temelia temeliilor dezvoltării economiei naționale, fără de care, în etapa actuală, nu se poate realiza un progres rapid în nici una din ramurile acestei economii.

1.2. Importanța electrificării țării noastre și prevederile cuprinse în Directivele Congresului al III-lea al P.M.R.

În anii regimului de democrație populară, oamenii muncii din R.P.R. au înregistrat succese însemnate în industrializarea socialistă a țării, în ridicarea nivelului tehnic al producției industriale și agricole.

O realizare de mare importanță o constituie îndeplinirea cu aproape un an mai devreme a principalelor prevederi ale planului de electrificare elaborat pentru etapa de 10 ani, 1951—1960. Producția de energie electrică a crescut de la 2,1 miliarde kwh în 1950 la 7,7 miliarde kwh în 1960, depășind cu 10% prevederile planului de electrificare. Socotind producția de energie electrică în raport cu populația țării, s-a trecut de la circa 130 kwh pe cap de locuitor și an în 1960 la circa 420 kwh/cap de locuitor și an în 1960.

Puterea instalată a grupurilor electrogene din centrale a crescut de la 740 mii kw în 1950 la 1800 mii kw în 1960. Au intrat în funcțiune noi centrale, și anume:

Centrale termoelectrice — Doicești (120 MW); Singeorgiu (150 MW); Ovidiu (36 MW); Comănești (24 MW); Paroșeni (150 MW); Borzești (125 MW cu termificare) etc.

Centrale hidroelectrice — Moroeni 15 MW; Sadu V 15 MW; V. I. Lenin-Bicaz (în faza finală cu 21 MW) etc.

Industria electrotehnică, inexistentă aproape în țara noastră înainte de instaurarea puterii populare, a înregistrat următoarele creșteri însemnate:

	1938	*1950*	*1959*
Motoare electrice	2 mii kw	94 mii kW	467 mii kW
Generatoare electrice	3 430 kVA	15 713 kVA	60 658 kVA
Transformatoare electrice	11 mii MVA	205 mii MVA	1 259 mii MVA
Conductoare electrice	32 mii km	41 mii km	102 mii km.

Prin Directivele Congresului al III-lea al P.M.R. se hotărăște ca producția de energie electrică să crească într-un ritm mai rapid decît ansamblul industriei, astfel încît să se satisfacă necesitățile tuturor ramurilor ecomomiei și să se asigure introducerea și dezvoltarea tehnicii noi, prin electrificarea, mecanizarea și automatizarea proceselor de producție. Astfel, în 1965 producția de energie electrică va fi de 18,5 miliarde kWh, adică de 2,7 ori mai mare decît în 1959, în timp ce întreaga producție industrială va fi de 2,3 ori mai mare decît în 1959.

În centralele existente (Borzești, Paroșeni, Grozăvești ș.a.) se vor instala 540 MW, iar în centralele noi (Bicaz, Ploiești, Luduș, Craiova, Oradea, Tg. Mureș, Iași ș.a.) se vor instala 1 840 MW.

Scanned with OKEN Scanner

Prin instalarea de agregate mari, cu caracteristici tehnice moderne, se va reduce consumul specific de combustibil în centralele termoelectrice cu abur, iar investiția specifică pe kilowatt instalat în aceste centrale va scădea cu aproximativ 30%. Este deosebit de important de relevat că 50% din totalul puterii ce se va instala în centrale este destinat termoficării, adică producerii combinate a energiei electrice și a căldurii pentru alimentarea centralizată a consumatorilor de căldură.

Concomitent se va dezvolta sistemul electroenergetic național prin extinderea rețelelor de transport și distribuție. Se vor construi, pînă în 1965, peste 23 000 km linii electrice de transport, dintre care circa 750 km de linii de tensiune foarte înaltă (220 kV și 380 kV), circa 2 500 km linii de 110 kV și peste 20 000 km linii de 6 kV, 15 kV, 35 kV. Dintre acestea din urmă, 50% vor servi acțiunii de electrificare a agriculturii.

Paralel cu creșterea producției de energie electrică, industria electrotehnică va cunoaște o importantă dezvoltare. În 1965 nivelul producției industriei electrotehnice va ajunge de circa 2,5 ori mai mare decît în 1959, corespunzător cerințelor de electrificare, precum și pentru acoperirea cerințelor crescînde de aparate electrotehnice de uz casnic.

În Directive se indică lărgirea gamei de motoare electrice de curent continuu pentru tracțiune și asimilarea de noi tipuri de motoare pentru echiparea mașinilor-unelte, podurilor rulante etc. De asemenea, se va lărgi sortimentul aparatajului de înaltă și joasă tensiune, al aparatelor de măsurat etc. Se va construi o fabrică de piese de radio și semiconductoare; se va dezvolta producția de conducte, cabluri electrice, echipament telefonic etc.; se vor produce noi tipuri de aparate de radio, de televiziune etc.

Realizarea acestor sarcini duce la acordarea unei importanțe deosebite formării de cadre specializate în domeniul electrotehnic și aceasta datorită atît rolului pe care mașinile și instalațiile electrice îl au în *mecanizarea* producției, cît și faptului că una dintre sarcinile istorice fundamentale puse în fața tehnicii în a doua jumătate a secolului al douăzecilea este *automatizarea* proceselor de producție, automatizare care se realizează în principal cu mijloace electrice și electronice.

O asemenea specializare este legată strîns de adîncirea științei electrotehnice, adică de însușirea bazelor ei teoretice, care, în prezent devin indispensabile disciplinelor electrotehnice aplicate.

1.3. Evoluția cunoștințelor despre fenomenele electrice și magnetice

Prima lucrare științifică, tratînd despre fenomenele electrice și magnetice a apărut în anul 1600. Ea se intitulează „De magnete" și aparține medicului și fizicianului W. Gilbert, care a creat termenul de „electricitate". Importanța acestei lucrări este astăzi de natură istorică; în ea se constată analogia dintre magnetismul terestru și cel al unei sfere magnetizate, dar nu se întrevede legătura dintre fenomenele electrice și magnetice. În acea vreme, fenomenele galvanice nu erau cunoscute. Timp de un secol și jumătate descoperirea unei

Scanned with OKEN Scanner

serii de fapte experimentale noi (de exemplu, a primului condensator electric: butelia de Leyda) nu a avut consecințe importante nici teoretice și nici practice.

Marele savant rus M. V. Lomonosov a efectuat cercetări sistematice în domeniul electricității, studiind fenomenele de electricitate atmosferică (1753) împreună cu prietenul său academicianul G. V. Rihman, care a murit electrocutat de trăsnet. Lomonosov a apărat teza despre materialitatea electricității și a formulat și dezvoltat concepții materialiste în numeroase probleme științifice. Contemporani cu Lomonosov au fost Benjamin Franklin, un alt cercetător al electricității atmosferice, care a propus utilizarea paratrăsnetului, și academicianul rus F. U. Epinus, căruia îi aparține prioritatea descoperirii fenomenului de influență electrostatică, precum și a existenței tuturor treptelor intermediare între conductoarele perfecte și izolanții perfecți.

Relațiile cantitative, care caracterizează interacțiunile mecanice dintre particulele încărcate electric și, prin analogie, dintre polii magneților, au fost stabilite experimental pentru prima dată de Ch. A. Coulomb, în 1785, prin măsurări efectuate cu balanța de torsiune. Cu toată această analogie, însuși Coulomb cunoștea diferența esențială între polii magnetici, care nu pot fi separați unul de altul la un magnet, și particulele încărcate electric, pozitive și negative, care pot exista separat unele de altele. O interpretare microscopică corectă a fenomenelor magnetice s-a dat mult mai tîrziu.

Între timp, descoperirea medicului L. Galvani și lucrările fizicianului A. Volta în domeniul fenomenelor numite „galvanice" au permis obținerea curentului electric de conducție. În 1799 Volta a construit prima pilă electrică. A. Humboldt a descoperit fenomenul de electroliză. Toate laboratoarele timpului fiind dotate cu pile electrice, s-au putut studia în mod științific fenomenele fizice și chimice legate de prezența curentului electric. Producînd electroliza — și deci curentul electric de conducție — prin descărcarea unei butelii de Leyda, J. W. Ritter a demonstrat identitatea dintre electricitatea „statică" și cea „galvanică".

În 1819, H. C. Oersted a efectuat experiențele care au arătat acțiunea mecanică pe care o exercită un conductor parcurs de curent electric asupra unui ac magnetic. Această experiență a avut un mare răsunet, deoarece stabilea o interacțiune între două categorii de fenomene considerate pînă atunci cu totul distincte: fenomenele electrice și cele magnetice. Numeroase cercetări experimentale au loc în toamna anului 1820 în Franța, cînd J. B. Biot și F. Savart studiază experimental forțele electromagnetice stabilind împreună cu P. Laplace relația care exprimă interacțiunea dintre un element de curent și un pol magnetic (formula Biot-Savart-Laplace). Totodată, A. M. Ampère studiază forțele electrodinamice dintre conductoare parcurse de curent electric și arată că un solenoid parcurs de curent este cu totul analog unui magnet, din punctul de vedere al acțiunilor sale exterioare magnetice. El a emis ideea că și în cazul magnetului permanent, cauza efectivă a apariției acțiunilor magnetice ar fi existența unor curenți electrici elementari incluși în domenii de dimensiuni microscopice (curenții „moleculari" ai lui Ampère). Această teorie a fost fundamentată și de microfizica modernă, care a identificat drept curenți „moleculari" curenții electrici constituiți de electroni în mișcarea lor orbitală în jurul nucleelor, stabilind totodată și existența unui magnetism

Scanned with OKEN Scanner

intrinsec (de spin) al particulelor elementare, cu rol hotărîtor în comportarea corpurilor feromagnetice.

În 1826, G. S. Ohm a găsit relaţia dintre tensiunea şi intensitatea curentului electric, care îi poartă şi astăzi numele (legea lui Ohm), iar în 1847 G. R. Kirchhoff a formulat regulile care permit rezolvarea problemei distribuţiei în circuitele electrice ramificate.

În 1831, M. Faraday a comunicat descoperirea fenomenului de inducţie electromagnetică, adică apariţia curentului electric într-un circuit conductor închis străbătut de liniile de cîmp ale unui cîmp magnetic variabil. În 1833, academicianul rus E. H. Lenz a formulat clar o regulă unică pentru determinarea sensului curentului indus.

Numele acestor doi savanţi este legat şi de alte importante descoperiri. Astfel, în 1834 Faraday stabileşte legile cantitative ale electrolizei, iar în 1843 Lenz a descoperit în acelaşi timp cu J. P. Joule, legea efectelor calorice ale curentului electric. În afară de aceasta, Faraday are meritul de a fi autorul concepţiei de cîmp, de acţiune prin contiguitate (din aproape în aproape, în spaţiu şi în timp), opusă concepţiei de acţiune la distanţă care a stat la baza mecanicii newtoniene şi a întregii fizici pînă în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. Concepţia de cîmp a fost ideea directoare care a permis explicarea corectă a fenomenelor electrice şi magnetice şi elaborarea ei a constituit un pas hotărîtor în dezvoltarea fizicii.

Aplicarea ideilor lui Faraday în domeniul electromagnetismului, îmbrăcarea lor în haină matematică şi dezvoltarea concepţiei de cîmp s-au datorit marelui fizician englez J. C. Maxwell, care în lucrarea sa clasică „Tratat despre electricitate şi magnetism“ — apărută în 1873 — a pus bazele teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic. Maxwell a prevăzut teoretic existenţa undelor electromagnetice şi a curentului de deplasare (1862) şi a emis teoria electromagnetică a luminii (1865), explicînd astfel şi rezultatul găsit experimental de W. Weber (1852) conform căruia raportul dintre unitatea electromagnetică şi unitatea electrostatică de sarcină electrică este numeric egală cu viteza luminii în vid. Confirmarea experimentală a teoriei lui Maxwell a fost realizată în principal de H. Hertz, în experienţele sale pentru obţinerea şi propagarea undelor electromagnetice (1889). De asemenea, P. N. Lebedev (1895) a efectuat experienţe relative la generarea şi propagarea undelor electromagnetice de lungime foarte mică şi a dovedit experimental existenţa presiunii luminii (1900—1901), iar A. S. Popov a inventat antena (1895), realizînd primele legături de radiocomunicaţii.

Mari fizicieni şi ingineri ruşi au soluţionat multe dintre cele mai importante probleme practice ale electromagnetismului. Astfel, V. V. Petrov a descoperit arcul electric (1802), iar utilizarea pe scară mare a arcului la iluminatul electric a fost realizată de P. N. Iablocikov (1876). N. N. Benardos şi N. G. Slaveanov (1885) au inventat sudarea electrică, utilizînd arcul electric la sudarea metalelor. Primul motor electric practic utilizabil a fost construit de B. S. Jacobi, care la 1838 a pus în mişcare cu ajutorul lui o barcă pe Neva. Iacobi a mai inventat şi galvanoplastia (1836) şi a perfecţionat telegraful electric, inventat în 1832 de P. L. Şilling. În 1874, F. A. Pisoţki a cerut să i se acorde privilegiul „de a transporta forţele prin şine şi alte conductoare“ şi a descris experienţele sale într-un articol publicat în 1877.

Scanned with OKEN Scanner

Fundamentarea științifică și economică a transportului de energie electrică la distanțe mari, din care rezultă necesitatea măririi tensiunii, a fost dată de electrotehnicianul D. A. Lacinov (1880) în primul număr al revistei „Electricestvo". În 1881, M. Desprez a ajuns la concluzii analoge și a realizat instalații de transport de energie electrică. K. Marx și F. Engels au acordat o mare importanță lucrărilor lui Desprez: „... această descoperire eliberează definitiv industria de aproape orice îngrădiri impuse de condițiile locale, face posibilă utilizarea celei mai îndepărtate energii de apă și, dacă la început ea va fi utilă numai pentru orașe, în cele din urmă ea va fi pîrghia cea mai puternică pentru a îndepărta contradicția între oraș și sat. Este foarte clar că datorită acestui fapt forțele de producție vor crește într-atîta, încît comanda lor va fi din ce în ce mai dificilă pentru burghezie" (scrisoarea lui F. Engels către Bernstein). Prima linie de transport de energie electrică în curent alternativ trifazat a fost realizată în 1891 de M. O. Dolivo-Dobrovolski, care a inventat și motorul de curent alternativ trifazat.

Aceste importante realizări au constituit baza unei serii de creații noi. Electrotehnicienii și fizicienii sovietici V. F. Mitkevici, N. D. Papalexi, A. A. Andronov, I. E. Tamm, P. L. Kalantarov ș.a., precum și electrotehnicieni ca francezul Blondel, italianul Giorgi, iar în țara noastră profesorii C. Vasilescu-Karpen, C. Budeanu, P. Andronescu, R. Răduleț ș.a. au adus contribuții însemnate în dezvoltarea bazelor teoretice ale electrotehnicii.

În țara noastră, introducerea progresului tehnic în toate ramurile economiei naționale este o sarcină a tuturor oamenilor muncii. Studenții — viitori ingineri — au ca principală îndatorire să-și însușească cunoștințe multilaterale în domeniul științei și tehnicii înaintate, pentru a participa la desăvîrșirea construcției socialismului. Intelectualii trebuie să contribuie la progresul științei și tehnicii și să le pună în slujba ușurării și înfrumusețării vieții poporului, în slujba păcii.

Rolul inginerilor electrotehnicieni este unul dintre cele mai importante și cele mai frumoase în opera de industrializare socialistă și de ridicare a nivelului tehnic al producției. Buna pregătire a inginerului electrician se bazează pe o corectă însușire a bazelor teoretice ale electrotehnicii.

1.4. Diferite teorii ale fenomenelor electrice și magnetice

Studiul fenomenelor electrice și magnetice este mai dificil decît studiul celorlalte fenomene fizice din domeniul mecanicii, căldurii, opticii, acusticii etc., deoarece omul nu este înzestrat cu simțuri speciale pentru sesizarea directă a fenomenelor care formează obiectul electromagnetismului. Numai undele electromagnetice de anumite lungimi de undă (între 0,4 și 0,76 μ) — undele luminoase — sînt direct perceptibile. Din această cauză, studiul are ca bază cunoașterea forțelor, momentelor sau eventual a reacțiilor chimice la care sînt supuse corpurile în regiunile spațiului unde există stări electrice sau magnetice.

Studiul fenomenelor electromagnetice a trecut, din punctul de vedere istoric, prin cinci faze:

Scanned with OKEN Scanner

1.4.1. **Teoria acțiunii la distanță.** Conform acestei teorii, acțiunile ponderomotoare electrice sau magnetice sînt acțiuni la distanță pe care corpurile le exercită în fiecare moment din pozițiile lor actuale asupra celorlalte corpuri. Ele sînt acțiuni instantanee, adică nu au nevoie de timp spre a se propaga de la un corp la altul, oricît de mare ar fi distanța între ele.

Acțiunile fizice nu sînt însă instantanee și din această cauză această teorie a fost înlocuită cu teoria acțiunii din aproape în aproape. Concepția acțiunii la distanță a condus pe unii fizicieni la concluzia greșită, că în spațiul care înconjură corpul încărcat nu se produc procese fizice materiale, că poate exista un spațiu lipsit de materie. Academicianul rus V. F. Mitkevici a subliniat esența idealistă a acestui punct de vedere, care duce la negarea lumii materiale existentă în afara conștiinței noastre. Corespunzător tezei fundamentale a materialismului dialectic, conform căreia materia are o existență obiectivă, independentă de experiența și conștiința noastră, cîmpul electromagnetic este o formă aparte a materiei unice (adică o formă de materie căreia îi sînt inerente și unele proprietăți specifice, pe care nu le au alte forme de materie, de exemplu corpurile).

1.4.2. **Teoria acțiunii prin contiguitate (din aproape în aproape).** Conform acestei teorii, purtătorul acțiunilor electrice și magnetice dintre corpurile electrizate și magnetizate este cîmpul electromagnetic care le transmite prin contiguitate (adică din aproape în aproape în spațiu și în timp) cu o anumită viteză finită (practic foarte mare). De aceea, aceste acțiuni sînt întîrziate, adică au nevoie de un anumit timp spre a se propaga. Timpul este cu atît mai lung, cu cît distanța între corpuri este mai mare. Acțiunile prin contiguitate depind numai de evoluția pe care stările fizice au avut-o într-un timp oricît de scurt (care tocmai a trecut) la o distanță oricît de mică din jurul porțiunii de corp asupra căreia se exercită.

În această fază de dezvoltare a teoriei fenomenelor electrice și magnetice, inițiată de Faraday și desăvîrșită de Maxwell, corpurile au fost aproximate ca medii continue. S-a elaborat astfel *teoria clasică, macroscopică a electricității și magnetismului* numită *teoria lui Maxwell*, cînd se aplică numai corpurilor imobile, și *teoria lui Maxwell și Hertz*, cînd se aplică și corpurilor mobile. Această teorie este o teorie fenomenologică, fără preocuparea studierii la scară atomică a sistemelor fizice și a stărilor lor.

1.4.3. **Teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice** (Teoria electronilor). În cadrul acestei teorii, elaborată de H. A. Lorentz, se ține seamă de structura atomică, discontinuă, a corpurilor. Legile acestei teorii au fost formulate extrapolînd la scară atomică legile teoriei lui Mexwell valabile în vid și considerînd că sarcina electrică caracterizează o proprietate a particulelor elementare încărcate, numite generic *electroni* [1]. Un mare număr de fenomene stabilite experimental și în special un mare număr de proprietăți electrice și magnetice de material au fost explicate în cadrul teoriei electronilor. Teoria electronilor a explicat în parte și unele fenomene privitoare

[1] În prezent, termenul de electron se folosește numai pentru particulele elementare încărcate negativ, avînd masa egală cu aproximativ a 1 838-a parte a masei atomului de hidrogen.

la electrodinamica corpurilor în mișcare, care contraziceau teoria lui Maxwell și Hertz.

1.4.4. **Teoria relativității restrînse.** Experimental s-a constatat că, în cazul corpurilor mobile, legile stabilite de teoriile citate nu erau valabile cu suficientă precizie pentru corpurile avînd viteze comparabile cu viteza de propagare a luminii în vid.

S-a constatat, de exemplu, că mărimi ca: lungimea, masa, durata, considerate ca „absolute" în teoriile clasice, sînt de fapt mărimi „relative" ca și viteza, în sensul că aceste mărimi nu sînt independente de sistemul de referință la care se raportează, ci depind de starea cinematică a acestui sistem (teoria relativității restrînse a lui Einstein). Explicarea acestor fapte a necesitat revizuirea conceptelor și legilor cinematicei, cum și reformularea adecvată a teoriei lui Maxwell și a teoriei lui Lorentz, în *Electrodinamica relativistă*.

1.4.5. **Teoria cuantică.** Experimental s-a constatat că nici conceptele și legile Electrodinamicii relativiste nu sînt valabile dacă energia și impulsul schimbate între particulele care constituie corpurile sînt foarte mici. Se elaborează astfel în prezent Electrodinamica cuantică, în acord în conceptele fundamentale ale fizicii cuantice, care permite justificarea teoretică a efectelor menționate.

Deoarece în stadiul de astăzi al tehnicii, cunoștințele date de teoria macroscopică clasică sînt, în general, suficiente pentru inginerii electricieni, cursul de Bazele Electrotehnicii se bazează în cea mai mare parte pe teoria lui Maxwell și Hertz. În ultima parte a cursului se vor da elemente de teorie microscopică (teoria electronilor) necesare în special studierii problemelor legate de funcționarea și utilizarea tuburilor electronice, și a elementelor cu semiconductori.

1.5. Prezentarea sistematică a cunoștințelor despre fenomenele fizice. Conținutul cursului

1.5.1. **Mărimi fizice.** Stările și fenomenele fizice se caracterizează cu ajutorul mărimilor fizice. Mărimile fizice constituie o clasă specială de proprietăți susceptibile de determinări cantitative.

Pentru a putea defini *o proprietate* comună unei mulțimi de obiecte fizice, trebuie să existe în mod obiectiv o *relație de echivalență* între ele. O astfel de relație este: *simetrică* (dacă A este echivalent cu B, B este echivalent cu A) și *tranzitivă* (dacă A este echivalent cu B și B este echivalent cu C, înseamnă că și A este echivalent cu C).

Pentru a putea defini o *mărime* este însă necesar să existe în mod obiectiv și o *relație de ordonare*, asociată relației de echivalență. O astfel de relație este: *asimetrică* (dacă A este mai mare decît B, B este mai mic decît A) și *tranzitivă* (dacă A este mai mare decît B și B este mai mare decît C, A este mai mare decît C).

O specie de mărimi fizice este caracterizată printr-o pereche de relații de echivalență și ordonare asociate (și identificate ca atare în natură) și prin

precizarea unor convenţii de scară şi de zero. Se poate astfel stabili în mod univoc nu numai cînd este mai mare mărimea A decît mărimea B, ci şi de cîte ori este mai mare. Se ajunge astfel la măsurarea mărimilor, care se efectuează cu ajutorul unui procedeu de măsurare.

Procedeul de măsurare este o operaţie experimentală reproductibilă, cu ajutorul căreia se asociază fiecărei mărimi fizice o mărime matematică, numită „valoare" sau „măsură", în raport cu o mărime fizică de referinţă, numită unitate de măsură. Astfel, relaţiile dintre mărimile fizice se pot exprima prin relaţiile matematice dintre valorile lor.

O mărime fizică este determinată cînd se indică procedeul de măsură, unitatea folosită şi rezultatul măsurării.

Valorile tuturor mărimilor unei specii fizice sînt mărimi de o aceeaşi specie matematică, deoarece sînt determinate printr-un acelaşi procedeu de măsură. Ele sînt scalari, vectori, tensori.

Din punctul de vedere al felului cum se introduc în fizică, mărimile fizice se împart în: *mărimi derivate*, care se pot defini cu ajutorul altora presupuse cunoscute (de exemplu, viteza, acceleraţia etc.) şi *mărimi primitive*, care se introduc direct pe cale experimentală, indicînd concret unitatea de măsură şi procedeul de măsurare. Aceste mărimi (cum sînt: lungimea, temperatura, masa etc.) nu se mai pot defini cu ajutorul altora, *fără a face apel la experienţă*. Calitatea de mărime primitivă sau derivată este relativă. Într-o anumită formă a teoriei se pot considera anumite mărimi ca primitive, iar în altă formă ele ar putea apare ca derivate. Într-o anumită etapă de evoluţie, un domeniu al ştiinţei are un număr bine determinat de mărimi primitive. O dată cu progresul ştiinţei, numărul mărimilor primitive poate să scadă. Teoretic, mărimile primitive, strict necesare pentru descrierea completă a stărilor şi fenomenelor dintr-un domeniu oarecare, ar fi suficiente pentru constituirea unei ramuri de ştiinţă. Practic, se utilizează însă un număr mare de mărimi derivate, care uşurează descrierea şi studierea fenomenelor.

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice utilizează mărimi primitive specifice, în afară de mărimile primitive din mecanică (lungime, masă, timp etc.). Aceste mărimi caracterizează complet din punctul de vedere electromagnetic starea corpurilor şi starea cîmpului electromagnetic.

Starea electromagnetică a corpurilor este caracterizabilă cu următoarele mărimi:

1) sarcina electrică (adevărată), q — mărime scalară (v. 2.2.);
2) momentul electric, $\overline{p}$ — mărime vectorială (v. 4.1.);
3) intensitatea curentului electric de conducţie, i — mărime scalară (v. 11.2);
4) momentul magnetic, $\overline{m}$ — mărime vectorială (v. 18.1.).

Starea cîmpului electromagnetic este caracterizabilă cu următoarele mărimi:

5) intensitatea cîmpului electric, $\overline{E}$ (v. 5.2.)
6) inducţia electrică, $\overline{D}$ (v. 5.3)
7) intensitatea cîmpului magnetic, $\overline{H}$ (v. 19.1)
8) inducţia magnetică, $\overline{B}$ (v. 19,2).

Scanned with OKEN Scanner

Mărimi derivate importante utilizate în electrotehnică sînt, de exemplu: fluxul magnetic Φ sau electric ψ, tensiunea electrică U sau magnetică U_m, capacitatea C, rezistența R, inductivitatea L etc.

În teoria electronilor intervin numai trei mărimi primitive: sarcina electrică (q_m) — mărime scalară —, intensitatea microscopică a cîmpului electric ($\bar{e}$) și inducția magnetică microscopică ($\bar{b}$) — mărimi vectoriale.

1.5.2. **Legi și teoreme.** Experimental se constată că între mărimile primitive ale unui domeniu de cercetare există relații care exprimă raporturile obiective existente între fenomenele corespunzătoare acelui domeniu. Acestea se stabilesc prin generalizarea datelor experienței, adică prin extinderea valabilității rezultatelor unui număr mare de experiențe (inducție incompletă), pe baza unei abstractizări.

În fizică se numesc *legi* acele relații care redau cele mai generale cunoștințe despre fenomenele unui domeniu de cercetare, reflectînd proprietățile obiective ale fenomenelor, și care nu se mai pot deduce prin analiză logică, în cadrul domeniului, din altele mai generale. Relațiile care prin analiză logică se pot deduce din primele se numesc *teoreme*.

Există relații care la data enunțării au avut rol de legi, dar cînd știința a progresat s-au descoperit legi mai generale, din care propozițiile inițiale fie că au putut fi deduse, fie că au reprezentat forme particulare. Din această cauză, în fizică multe teoreme mai poartă numele de legi (de exemplu teorema lui Coulomb).

Un domeniu al fizicii este cercetat științific dacă: a) se identifică mărimile primitive și principalele mărimi derivate; b) se descoperă legile și se deduc teoremele importante ale domeniului; c) se verifică în practică, în limitele aproximației caracteristice teoriei respective, toate consecințele legilor.

Cu ajutorul legilor și al teoremelor se poate stabili evoluția, trecută sau viitoare, a stărilor studiate, în funcție de condiții concrete date: condiții inițiale și condiții de frontieră, corespunzătoare sistemului fizic considerat (condiții de unicitate).

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor fizice se împart în două grupe: *legi generale* și *legi de material*. Spre deosebire de primele, aceste din urmă legi au în expresia lor și anumiți parametri specifici diverselor materiale, adică și anumite mărimi de material (de exemplu coeficientul de frecare, căldura specifică etc.).

Teoria macroscopică a fenomenelor electrice și magnetice are douăsprezece legi importante, dintre care opt sînt legi generale și patru sînt legi de material.

Legile generale sînt: 1. Legea inducției electromagnetice; 2. Legea circuitului magnetic; 3. Legea fluxului electric; 4. Legea fluxului magnetic; 5. Legea legăturii dintre inducție, intensitate și polarizație (în cîmpul electric); 6. Legea legăturii dintre inducție, intensitate și magnetizație (în cîmpul magnetic); 7. Legea de conservare a sarcinii electrice adevărate; 8. Legea transformării de energie în corpurile parcurse de curent de conducție (Joule-Lenz).

Legile de material mai importante sînt; 9. Legea polarizației electrice; 10. Legea polarizației magnetice; 11. Legea conducției electrice (Ohm); 12. Legea electrolizei.

Scanned with OKEN Scanner

Mărimi derivate importante utilizate în electrotehnică sînt, de exemplu: fluxul magnetic Φ sau electric ψ, tensiunea electrică U sau magnetică U_m, capacitatea C, rezistența R, inductivitatea L etc.

În teoria electronilor intervin numai trei mărimi primitive: sarcina electrică (q_m) — mărime scalară —, intensitatea microscopică a cîmpului electric ($\vec{e}$) și inducția magnetică microscopică ($\vec{b}$) — mărimi vectoriale.

1.5.2. **Legi și teoreme.** Experimental se constată că între mărimile primitive ale unui domeniu de cercetare există relații care exprimă raporturile obiective existente între fenomenele corespunzătoare acelui domeniu. Acestea se stabilesc prin generalizarea datelor experienței, adică prin extinderea valabilității rezultatelor unui număr mare de experiențe (inducție incompletă), pe baza unei abstractizări.

În fizică se numesc *legi* acele relații care redau cele mai generale cunoștințe despre fenomenele unui domeniu de cercetare, reflectînd proprietățile obiective ale fenomenelor, și care nu se mai pot deduce prin analiză logică, în cadrul domeniului, din altele mai generale. Relațiile care prin analiză logică se pot deduce din primele se numesc *teoreme*.

Există relații care la data enunțării au avut rol de legi, dar cînd știința a progresat s-au descoperit legi mai generale, din care propozițiile inițiale fie că au putut fi deduse, fie că au reprezentat forme particulare. Din această cauză, în fizică multe teoreme mai poartă numele de legi (de exemplu teorema lui Coulomb).

Un domeniu al fizicii este cercetat științific dacă: a) se identifică mărimile primitive și principalele mărimi derivate; b) se descoperă legile și se deduc teoremele importante ale domeniului; c) se verifică în practică, în limitele aproximației caracteristice teoriei respective, toate consecințele legilor.

Cu ajutorul legilor și al teoremelor se poate stabili evoluția, trecută sau viitoare, a stărilor studiate, în funcție de condiții concrete date: condiții inițiale și condiții de frontieră, corespunzătoare sistemului fizic considerat (condiții de unicitate).

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor fizice se împart în două grupe: *legi generale* și *legi de material*. Spre deosebire de primele, aceste din urmă legi au în expresia lor și anumiți parametri specifici diverselor materiale, adică și anumite mărimi de material (de exemplu coeficientul de frecare, căldura specifică etc.).

Teoria macroscopică a fenomenelor electrice și magnetice are douăsprezece legi importante, dintre care opt sînt legi generale și patru sînt legi de material.

Legile generale sînt: 1. Legea inducției electromagnetice; 2. Legea circuitului magnetic; 3. Legea fluxului electric; 4. Legea fluxului magnetic; 5. Legea legăturii dintre inducție, intensitate și polarizație (în cîmpul electric); 6. Legea legăturii dintre inducție, intensitate și magnetizație (în cîmpul magnetic); 7. Legea de conservare a sarcinii electrice adevărate; 8. Legea transformării de energie în corpurile parcurse de curent de conducție (Joule-Lenz).

Legile de material mai importante sînt; 9. Legea polarizației electrice; 10. Legea polarizației magnetice; 11. Legea conducției electrice (Ohm); 12. Legea electrolizei.

Legile de material există numai în teoria macroscopică. Numărul lor nu este limitat, ci pe măsura evoluției unei științe se pot descoperi noi legi de material. Mai înainte s-au indicat numai cele mai importante legi de material, omițîndu-se legile cîmpurilor imprimate, legile emisiunii electronice, legile efectului fotoelectric etc. Unul dintre obiectivele principale ale teoriilor microscopice este deducerea din legi microscopice generale a legilor macroscopice de material.

1.5.3. **Semnificațiile termenului de cîmp. Vidul.** Prin termenul de „cîmp" se poate înțelege:

a) o formă de materie (un sistem fizic) — semnificația fundamentală;

b) o mulțime de valori ale unei funcțiuni de punct (cîmp de temperaturi, cîmp de vectori etc.) — semnificația din matematici;

c) o regiune din spațiu în care se manifestă anumite proprietăți — semnificația inițială a termenului în fizică;

d) intensitatea cîmpului (mărimea de stare a cîmpului) — în exprimarea scurtată.

În prezentul curs se folosește mai ales accepțiunea (*a*), care corespunde la următoarea definiție a *cîmpului electromagnetic*: cîmpul electromagnetic este o formă specifică de materie, deosebită de corpuri, care poate exista și în vid (în afara corpurilor) și care poate exercita acțiuni ponderomotoare (forțe și momente) asupra corpurilor. Ca orice formă de materie, el poate avea energie și impuls și le poate transmite corpurilor.

Aspectele cîmpului electromagnetic sînt *cîmpul electric* (cîmpul electromagnetic considerat din punctul de vedere al proprietăților sale electrice) și *cîmpul magnetic* (cîmpul electromagnetic considerat din punctul de vedere al proprietăților sale magnetice). Deosebirile dintre aceste două aspecte au un caracter relativ și nu permit considerarea lor distinctă decît în situații particulare. De exemplu, dacă un mic corp încărcat cu sarcina electrică q se deplasează cu viteza $\bar{v}=\bar{i}v_x$, se obține un curent electric, astfel încît, în sistemul de referință S față de care se deplasează corpul, apar ambele aspecte ale cîmpului: electric și magnetic (fig. 1.1). Pe de altă parte, în sistemul de referință S', care se mișcă cu aceeași viteză $\bar{v}=\bar{i}v_x$, față de sistemul S, apare numai aspectul de cîmp electric (fig. 1.2.), deoarece un corp electrizat în repaus nu produce decît cîmp electric (în sistemul S' curentul este nul).

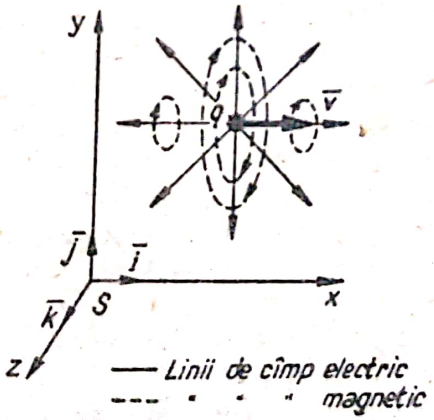


Fig. 1.1.

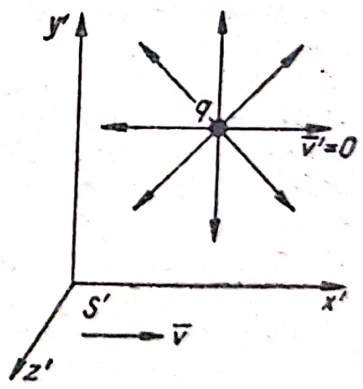


Fig. 1.2.

Așa cum s-a mai arătat, existența cîmpului electromagnetic (și în particular a undelor electromagnetice) în afara corpurilor confirmă teza filozofică materialistă conform căreia nu există spațiu lipsit de materie. Se poate întîmpla

însă ca într-o regiune din spațiu să lipsească la un moment dat corpurile (care reprezintă numai una din formele materiei). O astfel de regiune se numește în fizică *vid*. Acest „*vid*" este totdeauna sediul altor forme de materie, de exemplu a cîmpului electromagnetic, și nu reprezintă un loc „*gol*" din punctul de vedere filozofic. Fizica modernă a particulelor elementare a confirmat existența unui mare număr de proprietăți fizice ale vidului — considerat, cum s-a arătat, ca regiune lipsită de corpuri, respectiv, de particule. Materia este infinită și proprietățile ei sînt inepuizabile; lipsa momentană și locală a unora din aceste proprietăți nu reflectă nimic esențial.

Etapele esențiale ale oricărui proces de cunoaștere, așa cum au fost descoperite și analizate de materialismul dialectic, sînt conținute și în procesul de dezvoltare al unui domeniu al fizicei: experimentarea și interpretarea judicioasă a faptelor observate, care pun bazele experimentale ale teoriei (contemplația vie); identificarea mărimilor primitive și descoperirea legilor prin generalizarea datelor experimentale, definirea mărimilor derivate și deducerea principalelor teoreme, adică elaborarea teoriei (gîndirea abstractă); dezvoltarea aplicațiilor practice ale fenomenelor studiate și verificarea experimentală a tuturor consecințelor logice ale teoriei în aceste aplicații (confruntarea cu practica).

1.5.4. **Conținutul cursului.** Cursul de Bazele electrotehnicii are o primă parte, cuprinzînd bazele macrofizice ale Electrotehnicii în care se prezintă: Electrostatica (adică studiul stărilor electrice invariabile în timp și neînsoțite de curenți electrici de conducție), în care se introduc și mărimile primitive electrice; Electrocinetica (adică studiul stărilor conductoarelor parcurse de curent electric de conducție), în care se dezvoltă și teoria circuitelor de curent continuu; Magnetostatica (adică studiul stărilor magnetice invariabile în timp și neînsoțite de curenți de conducție); Electrodinamica (adică studiul celor mai generale stări electrice și magnetice), în care se introduc și mărimile primitive magnetice. Într-o a doua parte a cursului se va prezenta teoria principalelor aplicații tehnice ale fenomenelor electromagnetice: teoria circuitelor de curent alternativ în regim permanent sinusoidal, în regim periodic nesinusoidal și în regim tranzitoriu; teoria liniilor electrice lungi, adică a circuitelor cu constante repartizate; teoria undelor electromagnetice în conductoare și în dielectrici. Într-o ultimă parte a cursului se vor prezenta elemente de teoria microfizică a electromagnetismului, însoțite de studiul corespunzător al unor proprietăți de material, cu importante aplicații în tehnică.

BIBLIOGRAFIE RECOMANDATĂ

1. R. Răduleț, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, II, III, IV (litografiate). Litografia Învățămîntului 1955—1956.

2. L. R. Neiman și P. L. Kalantarov, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, trad. din l. rusă, E.E.S., 1955.

3. R. Răduleț și colectiv, *Culegere de probleme de bazele teoretice ale eclectrotehnicii*, vol. I, II, III (litografiate). Litografia și Tipografia Învățămîntului 1956—1958.

Scanned with OKEN Scanner

Electrostatica

2. Sarcina electrică şi intensitatea cîmpului electric în vid

2.1. Starea de electrizare şi cîmpul electric. Conductori şi izolanţi

Dacă se freacă o bară de sticlă cu o bucată de mătase şi apoi se separă cele două corpuri, între ele şi asupra corpurilor din apropiere se exercită forţe şi eventual momente care nu se exercitau înainte. Se spune că sistemul format de cele două corpuri s-a *electrizat* şi că există *cîmp electric* în regiunea din spaţiu în care se manifestă forţe şi momente.

Se numeşte *stare de electrizare* a corpurilor fiecare din stările în care ele sînt capabile să exercite forţe electrice asupra altor corpuri, adică forţe de aceeaşi natură cu cele exercitate de corpurile electrizate prin frecare.

Corpurile se mai pot electriza: prin contact cu corpuri electrizate, prin iradiare cu radiaţii Roentgen sau ultraviolete, prin întindere sau compresiune, prin încălzire, prin efecte chimice etc.

Prin experienţă se constată că în jurul corpurilor electrizate există totdeauna cîmp electric. Totuşi, cîmpul electric poate fi produs şi prin alte mijloace decît de corpurile electrizate (de exemplu, de cîmpurile magnetice variabile în timp).

Două corpuri electrizate prin frecare se atrag sau se resping. Un corp neelectrizat prin frecare este atras de un corp electrizat prin frecare.

Unele corpuri neelectrizate, după ce au ajuns în contact cu corpurile electrizate rămîn atrase de acestea un timp îndelungat. Materialele care au această proprietate se numesc *materiale izolante* sau *izolanţi*.

Alte corpuri neelectrizate sînt respinse imediat după ce au ajuns în contact cu corpurile electrizate prin frecare. Materialele care au această proprietate se numesc *materiale conductoare* sau *conductori*.[1]

Metalele, cărbunele, anumite soluţii de săruri anorganice, baze şi acizi sînt conductori. Mătasea, marmura, mica, porţelanul, ebonita, răşinile sintetice, aerul uscat, uleiurile etc. sînt izolanţi.

---

[1] Substantivul *conductor* are pluralul *conductori* în înţelesul de material (în analog cu izolant-izolanţi) şi are pluralul *conductoare* în înţelesul de corp, aparat, piesă (în analogie cu izolator-izolatoare).

Scanned with OKEN Scanner

Nu există izolanți perfecți; în adevăr, orice corp neelectrizat atras și ajuns în contact cu corpul electrizat este respins după un timp mai lung sau mai scurt. Pentru izolanții buni, acest timp este de ordinul zilelor, pentru conductori este inferior ordinului fracțiunilor de micromicrosecundă. Dacă acest timp este de ordinul fracțiunilor de secundă, corpurile se numesc *semiconductori* și se caracterizează, de obicei, și prin alte proprietăți specifice.

2.2. Definirea sarcinii electrice și a intensității cîmpului electric în vid. Linii de cîmp

2.2.1. Explorarea cîmpului electric. Mărimile mecanice și termice sînt insuficiente pentru descrierea fenomenelor electromagnetice. În adevăr, un sistem fizic pus în condiții cu mărimi mecanice și termice cunoscute suferă tranformări (de exemplu, electrizarea), fără ca aceste mărimi să se modifice.

Mărimea fizică care caracterizează stările de electrizare ale corpurilor obținute prin frecare, contact, sau stările analoge cu acestea, se numește *sarcină electrică*. Este o mărime primitivă și reflectă o proprietate a corpurilor ireductibilă la altele.

Considerăm, pentru moment, un sistem de corpuri electrizate așezate în vid și a căror stare de electrizare este invariabilă. Pentru explorarea macroscopică a cîmpului electric format în jurul acestor corpuri electrizate se utilizează un *corp de probă*. Starea de electrizare a acestui corp trebuie să fie invariabilă, adică să fie astfel încît, în condiții exterioare egale, să se exercite asupra lui forțe de natură electrică egale. Prin experiență se constată că, pentru a se menține neschimbată starea de electrizare a corpului de probă trebuie ca starea sa fizico-chimică să nu se modifice, el să fie metalic (conductor) sau metalizat și să fie perfect izolat electric (adică să fie înconjurat de izolanți). Starea corpului de probă trebuie aleasă astfel, încît să nu modifice sensibil starea electrică inițială a sistemului dat de corpuri; pentru aceasta, forțele exercitate asupra lui, în condițiile date, trebuie să fie cît mai mici. Corpul de probă se ia foarte mic, practic punctual, pentru a permite explorarea unor regiuni, în principiu, oricît de mici din cîmp.

Pentru a putea preciza condițiile de explorare a cîmpului, trebuie stabilit ce se înțelege prin același punct din cîmp și prin regăsirea după un anumit timp a acestui punct. Un punct de pe un corp poate fi recunoscut în principiu oricînd, independent de sistemele geometrice de referință. Un punct dinafara corpurilor (din vid) nu poate fi regăsit decît cu ajutorul unui sistem de referință, care este legat de corpuri.

În teoria macroscopică a electricității și magnetismului, corpurile sînt presupuse continue, indiferent dacă sînt dense sau atît de rare încît nu există decît urme din ele. Deci, *vidul* se admite de fapt numai ca o stare limită, către care se tinde cînd densitatea de masă a corpurilor tinde către zero. Această ipoteză de lucru permite identificarea fără dificultăți a punctelor, fără a se folosi explicit un sistem de referință.

Scanned with OKEN Scanner

Prin experiență se constată, în general, că forța exercitată asupra corpului de probă introdus în cîmp depinde de punctul P în care este situat corpul și de starea de electrizare η a lui:

$$F=F(P,\eta)\bar{u}(P,\eta) \tag{2.1}$$

în care $\bar{u}$ este versorul forței, iar η — un simbol pentru desemnarea stării de electrizare.

Studiind experimental această dependență, se mai constată următoarele:

a) Dacă se variază starea de electrizare a corpului de probă rămas în același

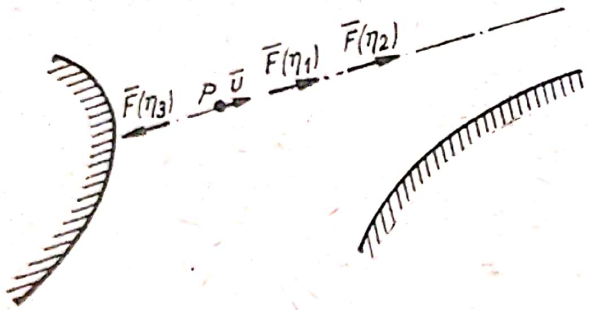


Fig. 2.1.

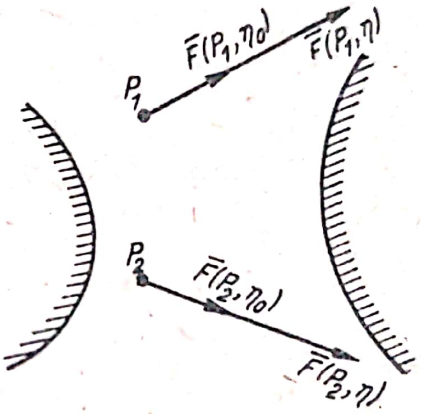


Fig. 2.2.

punct P (adică modul cum el a fost electrizat), forța își schimbă mărimea și sensul, dar nu direcția (fig. 2.1). În consecință, versorul $\bar{u}$ nu depinde de starea de electrizare η și este doar o funcție de P:

$$\bar{u}=\bar{u}(P). \tag{2.2}$$

b) Dacă se consideră succesiv corpul de probă în două stări de electrizare bine definite η_0 (o stare de electrizare etalon, aleasă o dată pentru totdeauna) și η (o stare de electrizare oarecare) și dacă se măsoară forțele exercitate asupra corpului de probă în cele două stări, așezîndu-l întîi în punctul P_1 și apoi în punctul P_2, și se calculează raportul forțelor în același punct, se constată egalitatea (fig. 2.2):

$$\frac{F(P_1,\eta)}{F(P_1,\eta_0)}=\frac{F(P_2,\eta)}{F(P_2,\eta_0)} \tag{2.3}$$

adică raportul modulelor forțelor pentru două stări diferite oarecare nu depinde de punctul considerat. Analitic se poate scrie:

$$\frac{F(P,\eta)}{F(P,\eta_0)}=q(\eta,\eta_0) \tag{2.4}$$

Rezultă că forța are expresia:

$$\bar{F}=q(\eta,\eta_0).F(P,\eta_0)\bar{u}(P)$$

sau, deoarece η_0 e luat același în toate experiențele:

$$\boxed{\bar{F}=q(\eta)\cdot\bar{E}_v(P)} \tag{2.5}$$

în care $\bar{E}_v=F(P,\eta_0)\bar{u}(P)$.

C o n c l u z i e: Forța exercitată de cîmpul electric asupra unui corp de probă situat în vid este egală cu produsul dintre o mărime scalară — numită *sarcină electrică* și notată cu q, care depinde numai de starea lui de electrizare, și o mărime vectorială — numită *intensitatea cîmpului electric în vid* și notată cu $\bar{E}_v$, care depinde numai de punctul din cîmp în care a fost adus corpul de probă (cînd toate celelalte corpuri care produc cîmpul rămîn în stări și poziții neschimbate).

Prin alegerea inițială a sensului versorului $\bar{u}(P)$ se alege de fapt starea de electrizare, care se convine a fi caracterizată cu o sarcină pozitivă, și anume starea de electrizare a sticlei frecată cu mătasea.

Cu relația fundamentală (2.5) s-au introdus, deci, două mărimi primitive:

$q(\eta)=q$, *sarcina electrică* (*adevărată*) [1], care depinde de starea de electrizare a corpului și este o mărime scalară de stare a corpurilor.

$\bar{E}_v(\bar{r})=\bar{E}_v$, *intensitatea cîmpului electric în vid*, care depinde numai de poziția corpului în cîmp și este o mărime vectorială de stare a cîmpului electromagnetic.

Relația (2.5) e relația de definiție a două mărimi. Ea este univocă dacă se alege o unitate de sarcină independentă, căci unitatea de intensitate a cîmpului rezultă imediat.

Particularizînd pentru cîmpul electric cele arătate în general în par. 1.5.3., precizăm că prin *termenul de cîmp electric* se înțelege:

a) sistemul fizic, diferit de corpuri, care există în jurul și în interiorul corpurilor electrizate (cîmpul electromagnetic considerat sub aspectul electric) — semnificația fundamentală;

b) mulțimea de valori ale vectorului intensitate a cîmpului electric;

c) regiunea din spațiu în care se exercită forțe electrice asupra corpurilor electrizate (în care intensitatea cîmpului electric e diferită de zero);

d) prescurtat, mărimea numită intensitatea cîmpului electric.

Pentru moment, nu s-a caracterizat decît cîmpul electric din vid, dar în capitolele următoare se va studia cîmpul electric în general, în corpuri, pentru care rămîn valabile precizările de mai înainte. Cîmpul electric în vid va putea fi considerat drept un caz particular de cîmp electric în corpuri.

Starea de electrizare a corpurilor, pentru care mărimea q definită mai înainte e diferită de zero, se numește *stare de încărcare electrică*. Trebuie subliniat că din punctul de vedere macroscopic mai există o stare de electrizare — pe care corpurile conductoare nu o pot avea la echilibru electrostatic — numită *stare de polarizare electrică* (v. § 4), ireductibilă (din punctul de vedere macroscopic) la prima.

Teoria microscopică clasică a fenomenelor electromagnetice (teoria electronilor) stabilește că starea de încărcare electrică corespunde excesului sau lipsei de sarcini ale particulelor microscopice *libere* (care se pot deplasa) și că starea de polarizare electrică este efectul macroscopic al repartiției nesimetrice a sarcinilor microscopice *legate* în atomi și molecule.

---

[1] Calificativul de „adevărată" sau „propriu-zisă" va fi folosit ori de cîte ori va trebui să se precizeze diferența dintre sarcina electrică definită mai înainte și sarcina de polarizație definită în § 4.

Scanned with OKEN Scanner

2.2.2. **Linii de cîmp.** Liniile de cîmp ale intensității cîmpului electric sînt liniile tangente în fiecare punct la direcția locală a intensității cîmpului. Ele se pot pune în evidență cu un dispozitiv numit ac electric, care se compune (de exemplu) dintr-o vergea de cuarț, avînd la capete două bobițe de măduvă de soc îmbrăcate în foiță de metal, încărcate cu sarcini de nume contrare, și care stă în echilibru pe un vîrf de ac. Acul electric se orientează în lungul liniei de cîmp. Liniile de cîmp electric pornesc de pe corpurile cu sarcină (+) și ajung la cele cu sarcină (—) (fig. 2.3). De obicei, se desenează, pe fiecare unitatea de arie normală pe ele un număr de linii de cîmp proporțional cu valoarea absolută locală a intensității cîmpului. Reprezentarea intuitivă astfel obținută se numește *spectru electric*.

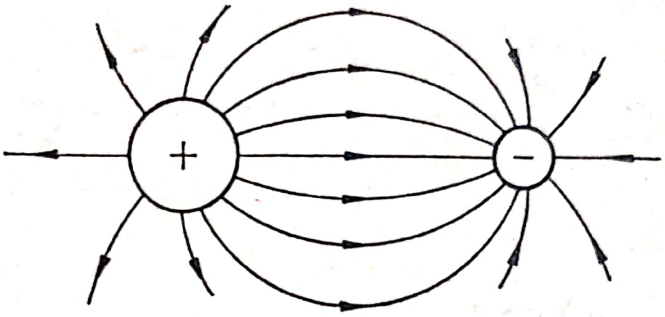


Fig. 2.3.

2.2.3. **Tensiunea electrică.** Fie un cîmp electric în vid al cărui spectru e reprezentat în figura 2.4, și o curbă C situată în acest cîmp. *Tensiunea electrică* între două puncte A și B, de-a lungul curbei C (fig. 2.4) este o mărime fizică derivată, ce caracterizează proprietățile cîmpului electric de-a lungul acestei curbe, definită de relația:

$$U_{AB}=\int_{A(C)}^{B}\overline{E}_v\cdot\overline{ds}=\int_{A(C)}^{B}E_v\,ds\cos\alpha\,. \qquad (2.6)$$

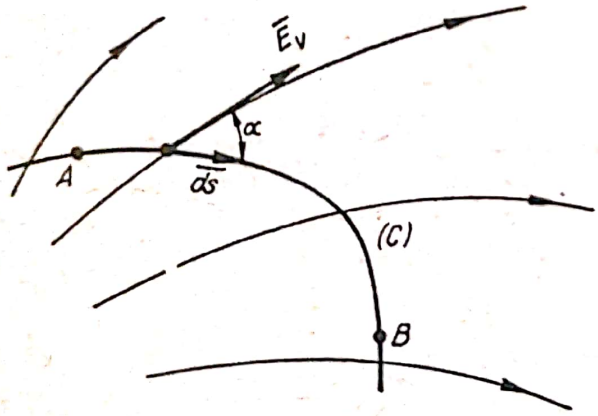


Fig. 2.4.

În cuvinte: tensiunea electrică între două puncte A și B de-a lungul curbei C este prin definiție integrala de linie a cîmpului electric între cele două puncte A și B de-a lungul curbei C.

În cazul cîmpului electrostatic, așa cum se va arăta, tensiunea electrică nu depinde de drum, ci de extremitățile lui (v. § 3.3.).

Din definiție rezultă că valoarea tensiunii depinde de sensul de integrare ($A\to B$) sau ($B\to A$), și anume:

$$U_{AB}=-U_{BA} \qquad (2.7)$$

Sensul de integrare al tensiunii se mai numește și sens de referință sau sens pozitiv convențional al tensiunii și se indică printr-o săgeată, de exemplu la bornele unui circuit electric (fig. 2.5). El este sensul deplasării elementare $\overline{ds}$.

Dacă $\overline{E}_v$ are, în coordonate carteziene, componentele E_x, E_y, E_z, iar elementul $\overline{ds}$ componentele dx, dy, dz, tensiunea se calculează cu relația:

$$U_{AB}=\int_{A}^{B}(E_x dx+E_y dy+E_z dz). \qquad (2.6')$$

Aplicație. Să se calculeze tensiunea electrică între două puncte ce sînt pe aceeași linie de cîmp, în vid, cîmpul electric fiind uniform (fig. 2.6):

$$U_{AB}=\int_A^B \overline{E}_v\overline{ds}=\int_A^B E_v ds\cos\alpha=\int_A^B E_v ds=E_v\int_A^B ds=E_v l_{AB}. \qquad (2.6'')$$

Fig. 2.5.

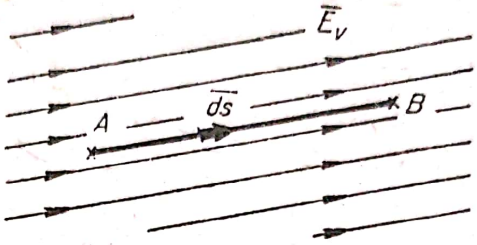


Fig. 2.6.

Exemplu de folosire a tensiunii electrice. Să calculăm lucrul mecanic al forțelor de natură electrică la deplasarea unei sarcini punctuale într-un cîmp electric (fig. 2.7), între două puncte A și B, de-a lungul unei curbe C.

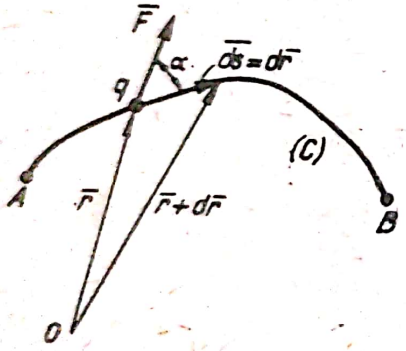


Fig. 2.7.

$$L_{AB_{(C)}}=\int_{A_{(C)}}^{B}\overline{F}\cdot\overline{ds}=q\int_{A_{(C)}}^{B}\overline{E}_v\overline{ds}=qU_{AB_{(C)}} \qquad (2.8)$$

deoarece $\overline{F}=q\overline{E}_v$.

Prin urmare, tensiunea între două puncte este egală cu lucrul mecanic efectuat de cîmp la transportul unității de sarcină între cele două puncte.

Observație. Deoarece elementul de arc $\overline{ds}$ e egal cu diferența vectorială a vectorilor de poziție $\overline{r}+\overline{dr}$ și $\overline{r}(x, y, z)$ ai extremităților lui, rezultă că $\overline{ds}=(\overline{r}+\overline{dr})-\overline{r}=\overline{dr}$, adică poate fi notat și ca diferențială a vectorului de poziție $\overline{ds}=\overline{dr}$, ceea ce revine la scrierea tensiunii cu:

$$U_{AB}=\int_{A_{(C)}}^{B}\overline{E}\overline{dr}.$$

În cele ce urmează se vor folosi, după cum e mai comod, una sau alta dintre aceste notații. Trebuie însă să se sublinieze că modulul diferențialei unui vector nu este egal cu diferențiala modulului:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=|\overline{dr}|\neq d|\overline{r}|=dr=d\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

și de aceea modulul lui $\overline{dr}$ trebuie notat cu ds:

$$|\overline{dr}|=|\overline{ds}|=ds.$$

2.3. Densităţi de sarcină electrică. Conservarea sarcinii

2.3.1. Densităţi de sarcină. Dacă sarcina unui corp este repartizată în volumul lui, limita $\rho_v a$ raportului dintre sarcina Δq şi volumul Δv în care se găseşte, cînd acest volum tinde către zero şi cînd limita există:

$$\boxed{\rho_v = \lim_{V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{\delta q}{\delta v}} \tag{2.9}$$

se numeşte *densitatea de volum a sarcinii*. Această mărime prezintă importanţă specială pentru izolanţi. Rezultă, pentru sarcina q cu repartiţie de volum, expresia:

$$q = \iiint_V \rho_v dv. \tag{2.10}$$

Dacă sarcina e repartizată în straturi subţiri, limita raportului între sarcina Δq şi aria ΔA, cînd ΔA tinde către zero şi cînd limita există:

$$\boxed{\rho_s = \lim_{A \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta A} = \frac{\delta q}{\delta A}} \tag{2.11}$$

se numeşte *densitatea de suprafaţă a sarcinii*. Ea prezintă importanţă în special pentru conductori, dar şi pentru izolanţii electrizaţi prin frecare.

Rezultă, pentru sarcina q cu repartiţie de suprafaţă, expresia

$$q = \iint_S \rho_s \, dA.$$

Uneori sarcina este repartizată pe fire atît de subţiri, încît interesează limita raportului între sarcina Δq şi lungimea Δs, cînd $\Delta s \to 0$ şi cînd limita există:

$$\boxed{\rho_l = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{\delta q}{\delta s}}$$

care se numeşte *densitate de linie a sarcinii*. Pentru sarcina q cu repartiţie liniară rezultă expresia:

$$q = \int_c \rho_l ds.$$

2.3.2. Conservarea şi combinarea sarcinilor electrice adevărate. Dacă se freacă două corpuri, unul se încarcă cu sarcină adevărată pozitivă, iar celălalt cu negativă. Valorile absolute ale sarcinilor de nume contrar sînt însă egale. Se poate enunţa că, în general: *producerea sau dispariţia unei sarcini electrice adevărate este însoţită totdeauna de producerea, respectiv dispariţia simultană pe acelaşi corp izolat a unei sarcini egale de nume contrar.*

În general, sarcina totală a unui sistem de corpuri izolat (înconjurat de materiale izolante) e constantă:

$$\sum_k q_k = \text{constant} \tag{2.15}$$

Această relație e o consecință particulară, valabilă pentru corpuri izolate electric, *a legii conservării sarcinii electrice*, care va fi dezvoltată în electrocinetică.

Sarcinile electrice (adevărate) pozitive sau negative se combină algebric aditiv, adică un mic corp, dielectric sau conductor, încărcat succesiv cu sarcinile $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sau format din reunirea corpurilor izolate, care au aceste sarcini, se comportă ca fiind încărcat cu o sarcină:

$$q=q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n. \tag{2.16}$$

Dacă această sumă este nulă, se spune că sarcinile s-au neutralizat. De asemenea, după descompunerea unui corp izolat în mai multe corpuri izolate, suma sarcinilor părților lui nu poate fi variată, decît prin aducerea sau îndepărtarea de sarcină adevărată.

2.4. Teorema (legea) lui Coulomb. Raționalizarea. Permitivitatea vidului. Unități de măsură

2.4.1. Legea lui Coulomb. Ch. Aug. Coulomb a măsurat (în 1785), cu ajutorul balanței electrice de torsiune, forțele care se exercită între două corpuri practic punctiforme (distanțele între ele fiind mari în comparație cu dimensiunile lor liniare), încărcate cu sarcini electrice (adevărate), corpurile fiind imobile și situate în vid (fig. 2.8). Variind valorile absolute și numele (semnul) sarcinilor, pe de o parte, și distanțele între ele, pe de altă parte, el a stabilit dependența forțelor de aceste mărimi. Relația stabilită pe această cale de Coulomb s-a numit *legea lui Coulomb* și se poate enunța astfel: *forța* $\bar{F}_{12}$ *exercitată în vid de un mic corp încărcat cu sarcină electrică* q_1 *asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică* q_2 *e proporțională cu pătratul distanței* R_{12} *dintre ele, fiind dirijată după dreapta care le unește*:

$$\bar{F}_{12}=\bar{u}_{12}\Delta_0\frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \tag{2.17}$$

Sensul forței este astfel, încît sarcinile de același nume se resping; $\bar{u}_{12}=\bar{R}_{12}/R_{12}$ e deci versorul orientării dirijată de la primul la al doilea corp (v. fig. 2.8).

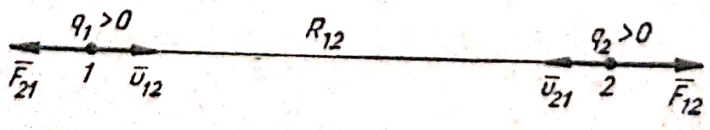


Fig. 2.8.

Δ_0 este un factor de proporționalitate pozitiv, o *constantă universală*, care depinde de alegerea unității de măsură a sarcinii.

Dacă, de exemplu, $q_1>0$ și $q_2>0$, forțele se exercită ca în figura 2.8.

Mărimea Δ_0 este o mărime fizică, deoarece valoarea ei variază o dată cu schimbarea unităților de măsură ale anumitor mărimi fizice. Mărimea Δ_0

este însă o *constantă universală*, deoarece experienţa arată că, la unităţi date ale celorlalte mărimi fizice, ea poate avea o singură valoare, adică nu depinde de nici o altă mărime sau proprietate (de exemplu, nu depinde de materialul micilor corpuri). Mărimea Δ_0 este o constantă universală referitoare la vid, deoarece se obţine prin operaţii presupuse că se efectuează în vid.

În cadrul teoriei lui Maxwell, relaţia precedentă reprezintă o teoremă care rezultă din alte relaţii mai generale şi în principal din legea fluxului electric, în cazul particular al stărilor electrostatice ale micilor corpuri (nepolarizate) situate în vid. Ea nu mai este valabilă în cazul stărilor variabile în timp, de exemplu în cazul a două particule încărcate, în mişcare cu viteză suficient de mare. Fiind o „lege" specifică concepţiei de acţiune la distanţă, legea lui Coulomb nici nu poate fi generalizată în cazul citat, fără a i se aduce modificări esenţiale. De aceea, va fi numită corect *teorema lui Coulomb*.

Mărimile electrice se introduc în electricitate cu ajutorul mărimilor mecanice. Sarcina electrică adevărată şi intensitatea cîmpului electric în vid $\bar{E}_v$ s-au introdus prin relaţia (2.5):

$$\bar{F}=q\bar{E}_v.$$

Pentru ca această relaţie să fie satisfăcută cu o anumită unitate de măsură a forţei, se alege arbitrar o unitate de măsură pentru sarcina electrică, şi apoi rezultă din relaţia (2.5) unitatea corespunzătoare pentru intensitatea cîmpului electric în vid.

2.4.2. **Raţionalizarea.** Fiecare sistem de unităţi de măsură mecanic se foloseşte împreună cu două clase principale de unităţi de măsură electrice şi mecanice: raţionalizată şi neraţionalizată (v. şi par. 30).

Clasa raţionalizată de unităţi de măsură are unele unităţi de măsură identice cu cele neraţionalizate, iar altele sînt de 4π ori mai mari sau de 4π ori mai mici decît cele neraţionalizate corespunzătoare.

Motivele care au provocat introducerea sistemului raţionalizat, după ce sistemul neraţionalizat fusese folosit, au fost următoarele: cînd s-au introdus unităţile de măsură clasice (neraţionalizate) se cunoşteau numai anumite forme particulare ale legilor electricităţii şi magnetismului. Exprimînd în aceste unităţi legile cele mai generale, a apărut factorul de proporţionalitate 4π în anumite legi; pentru ca acest factor să dispară din legile cele mai utilizate în calculele tehnice (şi să apară în schimb în alte teoreme, ca de exemplu în teorema lui Coulomb), se operează cu unităţi raţionalizate.

În prezent, sistemele de unităţi raţionalizate tind a fi folosite cu exclusivitate în tehnică, în timp ce sistemele de unităţi neraţionalizate (în special cele CGS) sînt încă folosite în fizică. Un inginer electrician poate întîlni ambele sisteme în diferitele lucrări publicate şi de aceea trebuie să cunoască atît scrierea raţionalizată cît şi scrierea neraţionalizată.

Dacă intervin în ecuaţia care exprimă o lege fizică sau în ecuaţia care defineşte o anumită mărime atît mărimi cu unităţi afectate de raţionalizare, cît şi mărimi cu unităţi neafectate de această operaţie, rezultă că în ecuaţia scrisă în unităţi neraţionalizate intervine o anumită putere a factorului 4π, iar în ecuaţia scrisă în unităţi raţionalizate o altă putere a factorului 4π. Ecuaţiile s-ar scrie de două ori (v. de exemplu, Manualul inginerului electrician). Spre a se evita acest lucru, se poate opera cu coeficientul de raţionali-

Scanned with OKEN Scanner

zare $\varkappa$, pentru care se convine a se da valoarea $\varkappa=4\pi$ în unități nerațio-nalizate și $\varkappa=1$ în unități raționalizate[1].

Considerînd din nou relația (2.16), este avantajos ca în loc de constanta universală Δ_0 să se folosească mărimea ε_0 definită prin relația:

$$\Delta_0=\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{2.17}$$

ε_0 este tot o constantă universală referitoare la vid și se numește *permitivitatea vidului*. Valoarea ei numerică depinde de sistemul de unități de măsură ales. Cu folosirea ei teorema lui Coulomb se scrie:

$$\bar{F}_{12}=\bar{u}_{12}\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}. \tag{2.18}$$

Toate relațiile din prezentul curs se vor scrie de acum înainte în forma rațio-nalizată ($\varkappa=1$), *adoptînd unități de măsură raționalizate, recomandate de stan-darde.*

Teorema lui Coulomb se va scrie, deci, sub forma:

$$\boxed{\bar{F}_{12}=\bar{u}_{12}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}=-\bar{F}_{21}.} \tag{2.19}$$

2.4.3. **Unități.** Unitățile de măsură indicate în curs vor corespunde sis-temului MKSA raționalizat, provenit din sistemul practic mecanic MKS, cu adăugarea amperului (A) ca unitate electrică fundamentală.

Unitatea de măsură a sarcinii electrice în acest sistem se numește *coulomb* (C.) Aceasta este sarcina unui mic conductor care ar exercita o forță de $c_0^2\cdot10^{-7}\approx$ $\approx9\cdot10^9$N, asupra unui alt mic conductor încărcat cu aceeași sarcină adevărată și situat în vid la distanța de 1 m de el și foarte departe de orice alte corpuri; s-a notat cu $c_0=3\cdot10^8$ m/s valoarea vitezei luminii în vid. Legătura dintre viteza luminii în vid și constantele universale electrice și magnetice va putea fi clarificată numai în cadrul electrodinamicii (pentru precizare v. § 30).

Unitatea de măsură corespunzătoare a intensității cîmpului electric în vid se numește *volt pe metru* (V/m): aceasta este valoarea absolută a intensității cîmpului electric în vid, care ar trebui stabilită într-un punct oarecare pentru ca să se exercite în acel punct forța de un newton (1 N) asupra unui mic corp încărcat cu sarcina electrică adevărată de un coulomb (1 C).

Unitatea de tensiune electrică este *voltul* (V), a cărei definiție se poate da cu ajutorul relației (2.5), fiind egal cu tensiunea existentă în lungul unei linii de cîmp de-al ungul căreia transportul unui mic corp încărcat cu sarcina de un coulomb (1 C) necesită un lucru mecanic de un joule (1 J).

Voltul este egal cu produsul simbolic între unitatea de cîmp electric (V/m) și unitatea de lungime (m) sau cu un joule pe coulomb (1 J/C).

Relațiile dintre unitățile MKSA (coulomb, volt, volt pe metru) și unită-țile sistemelor CGS electrostatic (CGS es) și CGS electromagnetic (CGS em)

[1] $\varkappa$ se citește „kappa".

se deduc cunoscînd că în aceste sisteme s-au ales pentru constanta universală Δ_0 valorile:

$$\Delta_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} = 1 \frac{dyn \cdot cm^2}{Fr^2} = 9 \cdot 10^{20} \frac{dyn \cdot cm^2}{Bi^2 \cdot s^2} \tag{2.20}$$

unde s-au folosit numele de *franklin* (Fr) pentru unitatea GCS es de sarcină și de *biot-secundă* (Bi. s) pentru unitatea CGS em de sarcină, recent recomandate de O.I.S. (Organizația Internațională de Standardizare la care e afiliată și țara noastră). Ținînd seama că 1 N$=10^5$ dyn și 1 m$=10^2$ cm se obține:

$$1\ C = 3 \cdot 10^9\ Fr = 10^{-1}\ Bi \cdot s,$$

$$1\,V = 1\frac{J}{C} = 1\frac{N \cdot m}{C} = \frac{1}{300}\text{ u CGS es} = 10^8\text{ u CGS em}, \tag{2.21}$$

$$1\frac{V}{m} = 1\frac{N}{C} = \frac{1}{3 \cdot 10^4}\text{ u CGS es}\left(\frac{dyn}{Fr}\right) = 10^6\text{ u CGS es}.$$

Rezultă că unitățile de măsură ale densităților de volum ρ_v, de suprafață ρ_s și de linie ρ_l ale sarcinii electrice vor fi (în sistemul MKSA): C/m^{3}C/m^2, C/m.

Permitivitatea vidului are, în sistemul MKSA raționalizat, valoarea numerică:

$$\boxed{\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi\Delta_0} \approx \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \approx 8{,}85.10^{-12}.} \tag{2.22}$$

În unitățile neraționalizate, această mărime are următoarele valori numerice:

În sistemul MKSA: $\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9}$.

În sistemul CGS es: $\varepsilon_0 = 1$ (2.23)

În sistemul CGS em: $\varepsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^{20}}$

Exemplu numeric. Să se calculeze valoarea forței pe care o exercită un corp de probă așezat în vid, încărcat cu $q_1 = 2 \cdot 10^{-5}$C asupra unui alt corp de probă încărcat cu $q_2 = 3 \cdot 10^{-6}$C, așezat tot în vid, la distanța de 50 cm de primul.

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} = \frac{1}{4\pi \frac{1}{4\pi \cdot 10^9}} \cdot \frac{2.10^{-5}.3.10^{-6}}{(50.10^{-2})^2}\text{ N}$$

$$F_{12} = 9.10^9 \frac{6.10^{-11}}{25.10^{-2}} = 2{,}16\text{ N}.$$

$$\text{în MKSA}_{\text{rat.}}: \quad \bar{F}_{12} = \bar{u}_{12} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{R_{12}^2}$$

[N] [C] [C]

3. Cîmpuri electrice coulombiene în vid

Cîmpurile electrice coulombiene sînt cîmpurile electrostatice asociate repartițiilor de sarcini electrice invariabile în timp, care se produc în conformitate cu teorema lui Coulomb. Cîmpul coulombian este staționar, deoarece q și E_v nu variază în timp, și anume un cîmp electrostatic, deoarece nu este însoțit de dezvoltare de căldură în conductoare (la temperaturi nu prea joase) cum se întîmplă în cazul cîmpului electric staționar al conductoarelor parcurse de curent electric.

3.1. Cîmpul electric produs de un corp punctual încărcat cu sarcina electrică adevărată q. Principiul superpoziției

3.1.1. **Cîmpul electric al unui corp punctual.** Relația (2.18) aplicată cazului din figura 3.1. pentru calculul forței exercitate de corpul de probă, avînd sarcina q, asupra corpului de probă avînd sarcina q' este:

$$\bar{F}=\bar{u}_R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qq'}{R^2}. \tag{3.1}$$

Ținînd seama și de relația (2.4):

$$\bar{F}=q'\bar{E}_v, \tag{3.2}$$

se obține valoarea intensității cîmpului electric în vid sau *vectorul cîmp electric în vid* produs de micul corp cu sarcina q, în punctul al cărui vector de poziție relativ la corp este $\bar{R}=\bar{u}_R R$:

$$\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}\bar{u}_R. \tag{3.3}$$

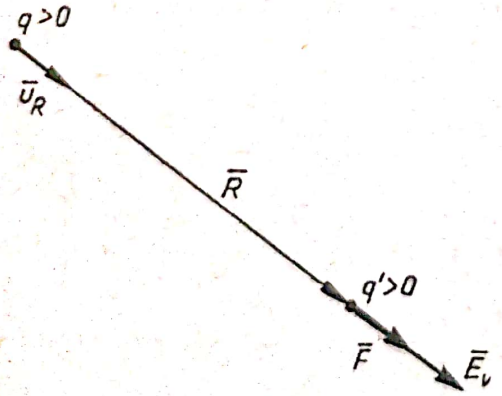


Fig. 3.1

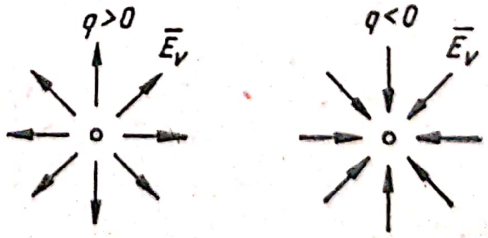


Fig. 3.2.

Dacă se notează $\bar{u}_R=\frac{\bar{R}}{R}$, relația (3.3) devine:

$$\boxed{\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^3}\bar{R}.} \tag{3.4}$$

Vectorul cîmp electric în vid produs de un corp foarte mic încărcat cu sarcina q, la distanţa R de acest corp, este proporţional cu sarcina adevărată q şi invers proporţional cu pătratul distanţei R. Vectorul cîmp electric este dirijat spre corp sau dinspre corp, după cum sarcina adevărată a acestuia este negativă, respectiv pozitivă (fig. 3.2).

Aplicaţie. *Expresia vectorului cîmp electric în coordonate carteziene.* Dacă originea sistemului de axe nu este aleasă în punctul unde se află corpul încărcat cu sarcina q (fig. 3.3), se consideră vectorii de poziţie:

$\bar{r}(x, y, z)$ pentru punctul P în care se calculează cîmpul;

$\bar{r}'(x', y' z')$ pentru punctul unde se află corpul punctual încărcat cu sarcina q.

Deci: $\bar{R}=\bar{r}-\bar{r}'=\bar{R}(x-x';\ y-y';\ z-z')$ şi

$$R=|\bar{R}|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Componenta pe axa x a vectorului cîmp electric este:

$$E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q(x-x')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}^3} \quad \text{etc.}$$

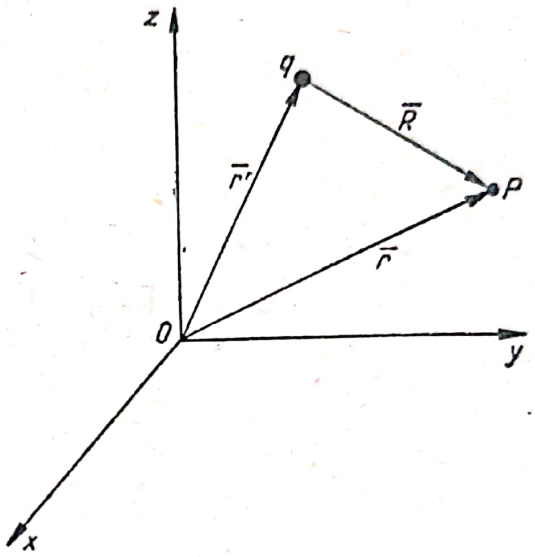


Fig. 3.3.

3.1.2. Principiul superpoziţiei cîmpurilor coulombiene. Se constată experimental că dacă un punct material se găseşte în prezenţa simultană a mai multor sisteme materiale S_1, S_2, ..., S_n, asupra lui se exercită o forţă $\bar{F}$ egală cu suma vectorială a forţelor $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$, pe care le-ar exercita asupra punctului fiecare din sistemele fizice $S_1, \ldots, S_n$, dacă s-ar găsi singur în prezenţa lui (principiul suprapunerii acţiunii forţelor, din mecanică).

Deci:

$$\bar{F}=\bar{F}_1+\bar{F}_2+\cdots+\bar{F}_n. \qquad (3.5)$$

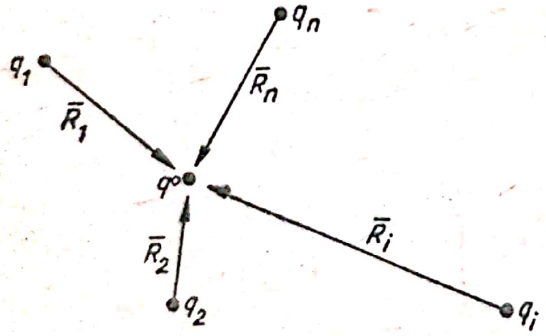


Fig. 3.4.

Dacă se consideră forţa $\bar{F}_i=q^\circ\bar{E}_i$ exercitată de fiecare dintre n corpuri punctuale încărcate cu sarcina q_i asupra unui mic corp cu sarcina q°, şi care are vectorul de poziţie R_i în raport cu corpul încărcat cu q_i (fig. 3.4), rezultă din principiul precedent, că intensitatea cîmpului electric coulombian $\bar{E}_v=\bar{F}/q^\circ$ produs în vid de cele n corpuri este suma vectorială a intensităţilor produse de fiecare în parte:

$$\bar{E}_v=\bar{E}_1+\bar{E}_2+\ldots+\bar{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\bar{E}_i\ . \qquad (3.6)$$

Ținînd seama de expresia coulombiană (3.4) a fiecărui cîmp $\bar{E}_i$ se obține intensitatea cîmpului electric în vid $\bar{E}_v$ a cîmpului electrostatic pe care îl produc, într-un punct $\bar{P}$, corpurile punctuale care au sarcinile q_i:

$$\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i^3}\bar{R}_i\,. \tag{3.7}$$

Prin trecere la limită se poate calcula vectorul cîmp electric în vid produs de corpuri a căror sarcină adevărată este repartizată cu densitate de volum ρ_v, de suprafață ρ_s sau de linie ρ_l scriind: $\bar{E}_v=\int\delta\bar{E}_v$, în care $\delta\bar{E}_v$ este cîmpul elementar produs de elementul de corp cu sarcină infinit mică.

Se obține:

$$\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_V\frac{\rho_v\bar{R}}{R^3}\,dv'+\iint_S\frac{\rho_s\bar{R}}{R^3}\,dA'+\int_C\frac{\rho_e\bar{R}}{R^3}\,ds'\right], \tag{3.8}$$

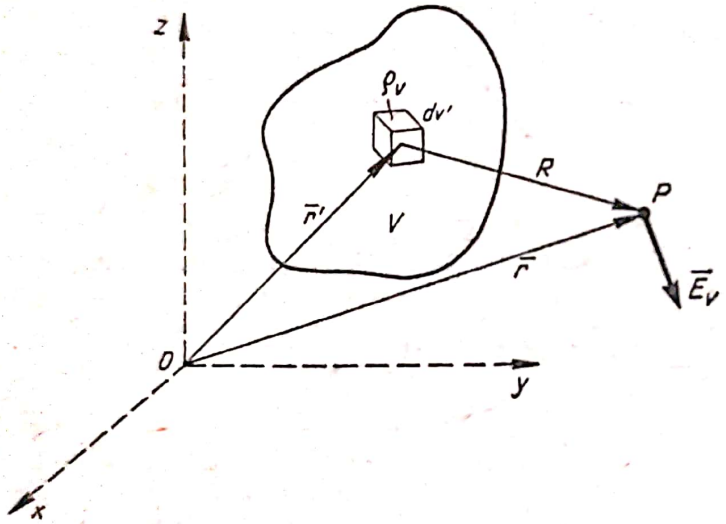


Fig. 3.5.

în care dv', dA', ds' sînt elementele de volum, arie, respectiv linie, în care sînt localizate mărimile ρ_v, ρ_s, ρ_l; $\bar{R}$ sînt razele vectoare de poziție ale punctului în care se calculează vectorul cîmp electric în vid în raport cu aceste elemente (pentru cazul în care există numai densitate de sarcină de volum, v. fig. 3.5).

În general, expresia vectorului cîmp electric în vid obținut prin superpoziția de cîmpuri coulombiene este:

$$\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iiint_V\frac{\rho_v\bar{R}}{R^3}\,dv'+\iint_n\frac{\rho_s\bar{R}}{R^3}dA'+\int_C\frac{\rho_l\bar{R}}{R^3}\,ds'+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i^3}\bar{R}_i\right]. \tag{3.9}$$

3.2. Teorema lui Gauss. Fluxul cîmpului electric coulombian în vid

3.2.1. **Fluxul și unghiul solid.** După cum se știe din analiza vectorială, o noțiune fundamentală pentru fizica matematică este integrala de suprafață a unui vector cîmp G pe o suprafață S:

$$\Psi=\iint_S\bar{G}\cdot\bar{n}\cdot dA=\iint_S G_n dA=\iint_S G\,dA\cos(\bar{G},\bar{n}), \tag{3.10}$$

numită *fluxul vectorului* $\bar{G}$ suprafaţa prin S, în care dA este elementul de arie, iar $\bar{n}$ este normala pe dA (într-un sens arbitrar ales, numit *sensul de referinţă* sau sensul pozitiv convenţional al fluxului).

Relaţia precedentă se poate scrie şi astfel:

$$\Psi = \iint_S \bar{G} \cdot \overline{dA}, \tag{3.11}$$

în care $\overline{dA} = \bar{n}\, dA$. Se observă că fluxul vectorului $\bar{G}$ este nul printr-o suprafaţă nestrăbătută de liniile de cîmp (adică pentru care $\bar{n} \perp \bar{G}$).

Noţiunea de flux provine din hidrodinamică. Se consideră vectorul $\bar{v}$ (viteză) la curgerea unui fluid. Fluxul vitezei reprezintă volumul de fluid care trece în unitatea de timp prin suprafaţa S (debitul):

$$Q = \iint_S \bar{v}\, \overline{dA} = \iint_S v_n dA$$

în care $v_n = v\, n$ este componenta vitezei normală la elementul suprafeţei S.

În cele ce urmează se va utiliza de multe ori noţiunea de flux printr-o suprafaţă închisă Σ; prin $\bar{n}$ se va înţelege, în acest caz, normala exterioară (normala îndreptată spre exteriorul suprafeţei închise):

$$\Psi_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \bar{G} \cdot \overline{da} = \iint_{\Sigma} \bar{G}\, \bar{n}\, dA. \tag{3.12}$$

Unghiul solid Ω_Γ este o mărime geometrică care caracterizează deschiderea unui con generalizat sub care se vede un contur Γ dintr-un punct P. El e definit de cîtul dintre aria pe care o interceptează conul pe o sferă de rază oarecare r şi pătratul acestei raze. Generatoarele conului se sprijină pe conturul Γ care mărgineşte o suprafaţă deschisă S_Γ (v. fig. 3.6). Rezultă:

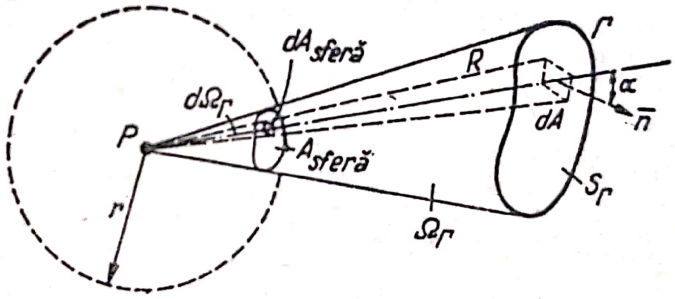


Fig. 3.6.

$$\Omega_\Gamma = \frac{A_{sferă}}{r^2} = \iint_{S_\Gamma} \frac{dA \cos\alpha}{R^2} = \iint_{S_\Gamma} \frac{\overline{dA}\, \bar{R}}{R^3}. \tag{3.13}$$

Această mărime caracterizează efectiv deschiderea conului, deoarece nu depinde de raza r a sferei şi nici de suprafaţa S_Γ. Ultima expresie a unghiului solid arată că acesta e egal cu fluxul vectorului $\bar{R}/R^3$ prin suprafaţa S_Γ şi rezultă din faptul că pentru orice con elementar sprijinit de elementul arie dA pe S_Γ şi $dA_{sferă}$ pe sferă există proporţionalitatea:

$$d\Omega = \frac{dA_{sferă}}{r^2} = \frac{dA_{transversal}}{R^2} = \frac{dA \cos\alpha}{R^2} = \frac{\overline{dA}\, \bar{R}}{R^3}.$$

Dacă suprafaţa S_Γ ocupă întregul spaţiu în jurul punctului P transformîndu-se într-o suprafaţă închisă Σ', care conţine punctul P în interiorul ei:

$$\Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$$

Dacă suprafaţa S_Γ e un plan infinit extins:

$$\Omega = \frac{2\pi r^2}{r^2} = 2\pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

3.2.2. **Teorema lui Gauss.** Noțiunile de flux și de unghi solid sînt necesare pentru formularea și demonstrarea teoremei lui Gauss care se scrie:

$$\boxed{\Psi_{E_\Sigma} = \iint \overline{E}_v \overline{dA} = \frac{1}{\varepsilon_0} q_\Sigma} \qquad (3.14)$$

și se enunță astfel: fluxul intensității cîmpului electric E_v prin orice suprafață închisă Σ, situată în vid, e proporțional cu sarcina electrică totală q_Σ localizată în interiorul acelei suprafețe, factorul de proporționalitate fiind $\frac{1}{\varepsilon_0}$ (în sistemele raționalizate de unități).

Se va demonstra în continuare această teoremă în două cazuri particulare, și anume cînd cîmpul electric e produs de un corp punctiform încărcat situat în interiorul, respectiv în exteriorul suprafeței Σ. Demonstrația pentru un sistem de sarcini rezultă imediat prin superpoziție.

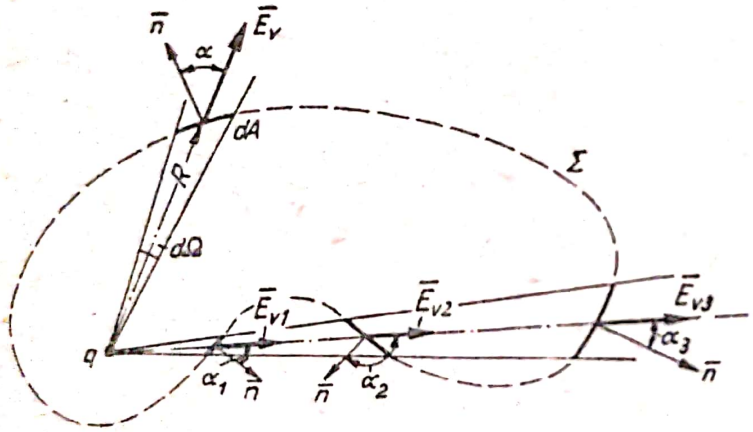


Fig. 3.7

a) *Corp punctiform încărcat cu sarcina q în interiorul suprafeței* Σ. Vectorul cîmp electric în vid este:

$$\overline{E}_v = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^3} \overline{R} \qquad (3.15)$$

Se arată ușor că fluxul elementar (fig. 3.7) prin aria elementară dA e proporțional cu unghiul solid elementar, și anume:

$$\overline{E}_v \cdot \overline{dA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R^2} dA \cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q d\Omega, \qquad (3.16)$$

deoarece $\cos\alpha > 0$ cînd R iese din Σ. Integrînd pentru a obține fluxul total rezultă:

$$\Psi_{E_\Sigma} = \iint_\Sigma \overline{E}_v \cdot \overline{dA} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \iint_\Sigma d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (3.17)$$

Dacă sarcina q se găsește în interiorul suprafeței închise, iar liniile intensității cîmpului electric intersectează suprafața de un număr n de ori care nu poate fi decît impar, fluxul elementar prin cele n arii elementare interceptate de același con elementar e dat mereu de expresia (3.16), deoarece două cîte două (afară de prima) ariile interceptate au fluxuri egale și de semn contrar, cum se demonstrează în analiza cazului următor.

b) *Corp punctiform încărcat cu sarcina q în exteriorul suprafeței* Σ (fig. 3.8). În acest caz, un același con elementar intersectează suprafața de un număr n par de ori. În figură este desenat un con elementar care intersectează suprafața închisă de două ori și un con elementar care intersectează suprafața închisă de patru ori. Demonstrația care urmează se referă la primul con. Două cîte

două fluxurile prin arii elementare interceptate de același con sînt egale și de semne contrarii:

$$\overline{E}_{v_1}\overline{dA}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}dA_1\cos\alpha_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qd\Omega\ ;$$

$$\overline{E}_{v2}\overline{dA}_2=\frac{4}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}dA_2\cos\alpha_2=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}\cos(\pi-\alpha_2)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\,d\Omega=-\overline{E}_{v1}\,\overline{dA}_1$$

deoarece:

$$dA_2\cos(\pi-\alpha_2)=$$
$$=-dA_2\cos\alpha_2>0,\quad \text{iar:}$$

$$d\Omega=\left|\frac{dA\cos\alpha}{r_2}\right|=$$
$$=\frac{dA_1\cos\alpha_1}{r_1^2}=$$
$$=-\frac{dA_2\cos\alpha_2}{R_2^2}>0.$$

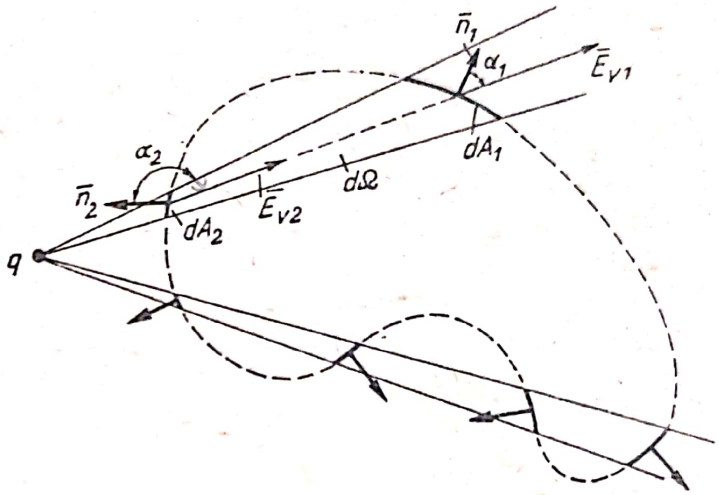


Fig. 3.8.

Rezultă, prin integrare pe suprafața închisă Σ, că o sarcină punctiformă nu dă flux printr-o suprafață închisă, dacă este situată în exteriorul ei:

$$\iint E_v\cdot dA=\iint(E_1da_1+E_2dA_2)=0 \qquad (3.18)$$

(deoarece liniile intensității cîmpului fie că nu intersectează de loc suprafața, fie că o intersectează de un număr n par de ori).

3.2.3. **Aplicație.** Din teorema lui Gauss se poate deduce intensitatea cîmpului electric în vid în cazul cînd forma liniilor de cîmp este cunoscută și prezintă simetrie. De exemplu, se poate obține expresia cîmpului coulombian al unui corp punctiform avînd sarcina q, cîmp ale cărui linii sînt radiale din motive de simetrie sferică. În adevăr, alegînd drept suprafață Σ suprafețele unei sfere de rază R în centrul căreia este corpul cu sarcina q (fig. 3.9), se obține:

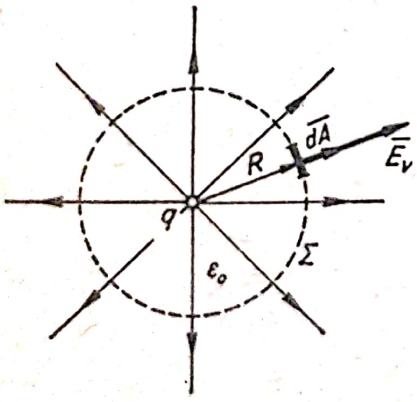


Fig. 3.9

$$\psi_E=\iint_\Sigma\bar{E}_v\overline{dA}=\iint_\Sigma\bar{E}_v\overline{dA}=E_v\iint_\Sigma dA=E_v\cdot4\pi R^2$$

(din cauza simetriei $E_v=|\bar{E}_v|$ este același în toate punctele la distanța R de corpul încărcat).

Din relațiile (3.17) și (3.19) rezultă:

$$E_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2} \qquad (3.20)$$

adică expresia (3.3), echivalentă legii lui Coulomb.

3.2.4. **Tub de flux.** Se numește tub de flux sau tub de linii de cîmp, porțiunea din cîmp delimitată de totalitatea liniilor de cîmp care trec prin toate punctele unui mic contur închis Γ. Aplicînd teorema lui Gauss suprafeței închise care limitează o porțiune de tub de flux în vid, rezultă:

$$\iint_\Sigma\overline{E}_v\cdot\overline{dA}=\psi_{A_2}-\psi_{A_1}=0, \qquad (3.21)$$

dacă în interiorul suprafeței Σ nu există corpuri încărcate cu sarcini electrice.

În (3.21) s-a notat cu $\psi_{A_1}=-\iint_{A_1}\bar{E}_v d\bar{A}$ fluxul prin secțiunea A_1 prin care liniile de cîmp intră în porțiunea de tub (considerat în sensul de referință al liniei de cîmp, adică în sens contrar normalei exterioare care apare în $d\bar{A}$) și cu $\psi_{A_2}=+\iint_{A_2}\bar{E}_v d\bar{A}$ fluxul prin secțiunea A_2 prin care liniile de cîmp ies din porțiunea de tub (unde normala exterioară coincide cu sensul liniei de cîmp). Restul integralei referitor la suprafața laterală a tubului se anulează, deoarece această suprafață nu e străbătută de liniile de cîmp ($d\bar{A}\perp\bar{E}_v$ și $\bar{E}_v d\bar{A}=0$).

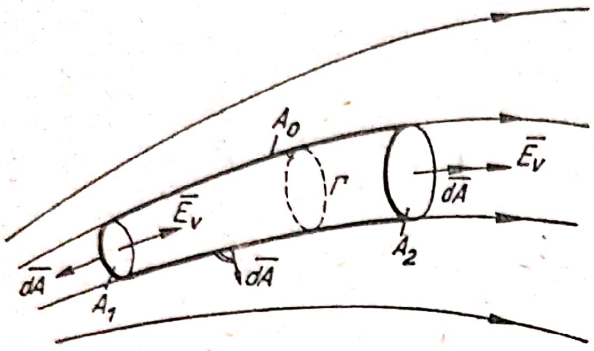


Fig. 3.10.

Prin urmare, în regiunea din spațiu în care nu există sarcini electrice, fluxul prin diferite secțiuni transversale ale unui tub are aceleași valori, deoarece $\psi_{A_2}=\psi_{A_1}$. Se spune că fluxul se conservă de-a lungul unui tub de linii de cîmp, în vid. (fig. 3.10).

3.3. Potențialul electrostatic al cîmpului electric coulombian. Suprafețe echipotențiale. Gradient.

3.3.1. **Potențial.** După cum se știe din analiza vectorială, o funcțiune scalară de punct $\varphi(\bar{r})=\varphi(x, y, z)$ se numește potențialul unui cîmp de vectori $\bar{G}(\bar{r})=\bar{G}(x, y, z)=\bar{i}G_x+\bar{j}G_y+\bar{k}G_z$, dacă există relațiile:

$$G_x=-\frac{\partial\varphi}{\partial x};\qquad G_y=-\frac{\partial\varphi}{\partial y};\qquad G_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}. \tag{3.22}$$

Se numește *gradient* al unei funcțiuni scalare φ un cîmp de vectori care are drept componente carteziene (în axe triortogonale de versori i, j, k), derivatele parțiale ale funcțiunii φ. De aceea (3.22) se mai scriu strîns:

$$\bar{G}=-\text{grad}\,\varphi. \tag{3.23}$$

Pentru orice φ se poate găsi cu (3.22) gradientul cu semn schimbat $\bar{G}$ al cărui potențial este φ. Reciproca nu e adevărată și un cîmp de vectori arbitrar $\bar{G}$ nu are întotdeauna potențial. Dacă, fiind dat $\bar{G}$, există o funcțiune φ astfel ca relațiile (3.22) să fie verificate, se spune că $\bar{G}$ e un cîmp de vectori potențial sau irațional, iar potențialul însuși e definit pînă la o constantă arbitrară (v. pentru detalii par. 6.5). În calcule se mai poate folosi un operator de derivare spațială, numit *nabla* sau *del* (sau operatorul lui Hamilton), a cărui expresie simbolică:

$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.24}$$

analogă unui vecotr, cu ajutorul căruia gradientul unui scalar se scrie

$$\text{grad}\,\varphi=\nabla\varphi, \tag{3.25}$$

iar relațiile (3.22) iau forma

$$\bar{G}=-\text{grad}\,\varphi=-\nabla\varphi. \tag{3.26}$$

Observație. Conceptul de potențial provine din mecanică unde e asociat celui de energie potențială. Dacă Oz este o axă verticală îndreptată în sus, greutatea unui punct material de masă m are expresia vectorială:

$$\bar{G}=-m\,g\,\bar{k}=-\operatorname{grad}(m\,g\,z)=-\operatorname{grad}U$$

în care g e accelerația căderii libere, iar U e energia potențială.

3.3.2. **Potențialul electrostatic coulombian.** După cum se va verifica imediat, relații de forma (3.22) se pot scrie pentru cîmpul electrostatic coulombian (3.7), care este deci un cîmp potențial. Potențialul V corespunzător, definit de relația vectorială

$$\boxed{E_v=-\operatorname{grad}V}\,, \tag{3,27}$$

adică de relațiile scalare

$$E_{v_x}=-\frac{\partial V}{\partial x};\quad E_{v_y}=-\frac{\partial V}{\partial y};\quad E_{v_z}=-\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3.28}$$

se numește *potențialul electrostatic coulombian* (în vid). Pentru cazul unui cîmp electrostatic oarecare se va defini ulterior (v. par. 6.6.) un potențial electrostatic.

Se numesc suprafețe echipotențiale suprafețele:

$$V(x,\,y,\,z)=K=\text{constant} \tag{3.29}$$

și se arată imediat că vectorul cîmp potențial e normal în fiecare punct din cîmp pe o suprafață echipotențială care trece prin punctul considerat. În adevăr, dacă se consideră două puncte infinit apropiate pe o aceeași suprafață echipotențială, $V(x,\,y,\,z)=K$, astfel încît $\bar{ds}$ să fie raza vectoare a unui punct în raport cu celălalt, trebuie să se satisfacă condiția ca diferențiala totală

$$dV=\bar{ds}.\operatorname{grad}V=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz=-\bar{E}_v\bar{ds} \tag{3.30}$$

să se anuleze ($dV=0$).

Produsul scalar $\bar{ds}\cdot\operatorname{grad}V=0$ fiind nul, rezultă că toate elementele de arc $\bar{ds}$ conținute într-o suprafață echipotențială sînt normale pe valoarea locală $\bar{E}=-\operatorname{grad}V\neq 0$ a vectorului cîmp (astfel încît cosinusul unghiului celor doi vectori să fie nul). Liniile de cîmp sînt, deci, traiectorii ortogonale ale suprafețelor echipotențiale.

Expresia potențialului unei sarcini punctuale[1]. Se consideră cazul particular al cîmpului coulombian produs în vid de un corp *punctiform încărcat cu o sarcină* q:

$$\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q\,\frac{\bar{R}}{R^3}\,.$$

[1] În exprimarea curentă se spune adesea (și în fond incorect) „cîmpul unei sarcini" sau „potențialul unei sarcini". Cum sarcina este o *mărime* de stare și nu un sistem fizic, exprimarea corectă este „cîmpul unui corp încărcat cu sarcină" sau „potențialul cîmpului electric al unui corp încărcat cu sarcină". Primele expresii se tolerează, pentru că evită formulări prea greoaie.

Scanned with OKEN Scanner

Componentele vectorului cîmp electric (fig. 3.11) pe cele trei axe sînt:

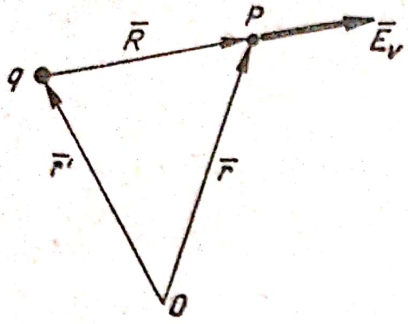


Fig. 3.11.

$$E_{v_x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{(x-x')}{R^3}$$

$$E_{v_y}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{(y-y')}{R^3}\cdot \qquad (3.31)$$

$$E_{v_z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{(z-z')}{R^3}\cdot$$

Se observă că expresia potențialului electrostatic al unei sarcini este

$$\boxed{V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R}+\text{ct}.} \qquad (3.32)$$

În adevăr, derivînd, se obține:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right),$$

dar $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\cdot\frac{\partial R}{\partial x}$ și cum $R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$

rezultă $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x-x'}{R}$ și $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{x-x'}{R^3}$, ș.a.m.d.

Componentele cîmpului sînt cu (3.28):

$$E_{v_x}=-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\frac{x-x'}{R}$$

ș.a.m.d., adică tocmai relațiile (3.31).

3.3.3. **Expresia generală a potențialului.** Dacă se dă cîmpul $E_v(x, y, z)$, calculul direct al potențialului se face observînd că diferențiala dV (3.30) poate fi integrată în lungul unui drum arbitrar de la un punct de referință P_0, în care potențialul are valoarea $V(P_0)$ aleasă arbitrar, la punctul curent $P(x, y, z)$, în care potențialul are valoarea căutată $V(P)=V(x, y, z)$. Rezultă:

$$\boxed{V(P)=V(P_0)-\int_P^{P_0}\bar{E}_v\bar{ds}=-\int_\infty^P\bar{E}_v\bar{ds}+\text{const}.} \qquad (3.33)$$

în a doua expresie luîndu-se P_0 la infinit.

Constanta care apare prin integrare la calculul potențialului cu a doua expresie este, de obicei, considerată nulă, adică se consideră potențialul punctelor depărtate la ∞ ca fiind nul. Cum constanta e arbitrară, acesta este procedeul utilizat în studiul multor probleme. În calculele practice, se alege ades potențialul pămîntului egal cu zero.

Deoarece drumul de integrare nu are importanță (v. și par. 6.5), este convenabil ca pentru calculul potențialului să se aleagă drumul de-a lungul unei linii de cîmp. În acest caz: $\overline{E}\cdot\overline{ds}=E\,dR$, deoarece atît $\overline{E}$ cît și $\overline{ds}$ sînt în lungul razei R și potențialul coulombian dat de sarcina q se poate calcula astfel:

$$V=-\int_{\infty}^{R} E\,dR=-\int_{\infty}^{R}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\cdot\frac{dR}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\left|\frac{1}{R}\right|_{\infty}^{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q\frac{1}{R}$$

în care R este distanța între corpul încărcat cu q și punctul în care se calculează potențialul. S-a regăsit deci expresia (3.32).

În general, dacă se consideră cîmpul electrostatic în vid, obținut prin suprapunerea cîmpurilor coulombiene, acesta derivă din *potențialul electrostatic coulombian*:

$$V=-\int_{\infty}^{P(\overline{R})}\overline{E}_v\overline{ds}=\sum_{i=1}^{n}V_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i},\qquad(3.34)$$

în care:

$$V_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_i\frac{1}{R_i}.$$

În cazul sarcinilor repartizate punctual (q_i), respectiv cu densitate de volum (ρ_v), de suprafață (ρ_s), de linie (ρ_l), expresia potențialului se obține prin trecere la limită și se adaugă la (3.34), adică:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\!\!\int\!\!\int_V\frac{\rho_v}{R}dv'+\int\!\!\int_S\frac{\rho_s}{R}dA'+\int_C\frac{\rho_l}{R}ds'+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i}\right].\qquad(3.34')$$

Relațiile (3.34) și (3.34′) nu sînt valabile decît dacă s-a luat $V\infty=0$.

3.3.4. Observații.

a) Calculul potențialului, care este o mărime scalară (urmat apoi de deducerea lui $\overline{E}_v$), constituie în multe cazuri o operație mai simplă decît calculul direct al vectorului cîmp electric.

b) Cu ajutorul potențialului se stabilesc o serie de proprietăți geometrice ale cîmpului de vectori, și anume:

— Suprafețele echipotențiale sînt ortogonale pe liniile de cîmp.

— În interiorul conductorilor omogeni, în regim electrostatic, vectorul cîmp electric este nul: $\overline{E}_v=0$, deoarece dacă nu ar fi nul, ar exista o mișcare ordonată a purtătorilor de sarcini electrice (adică un curent electric); potențialul rezultă atunci constant în interiorul conductorului omogen. În consecință, suprafața conductorului este o suprafață echipotențială și liniile de cîmp exterioare nu pătrund în interiorul corpului, fiind perpendiculare pe suprafața conductorului (v. și § 6.6).

— Se observă din expresia diferențialei potențialului (3.30) că:

$$dV=-\overline{E}_v\cdot\overline{ds}<0$$

Scanned with OKEN Scanner

în lungul unei linii de cîmp, pentru care $\overline{ds} \parallel \overline{E}_v$. Rezultă că în sensul vectorului cîmp, potențialul scade, sau altfel exprimat, vectorul cîmp $\overline{E}_v$ este îndreptat dinspre regiunea cu potențial mai ridicat către regiunea cu potențial mai scăzut. Vectorul cîmp $\overline{E}_v$ este mai intens în regiunea unde suprafețele echipotențiale se apropie. În adevăr, urmărind două suprafețe echipotențiale între care $dV = ct.$, intensitatea cîmpului crește, dacă distanța între ele scade (fig. 3.12), deoarece $|dV| = |\overline{E}|\,|\overline{ds}|$.

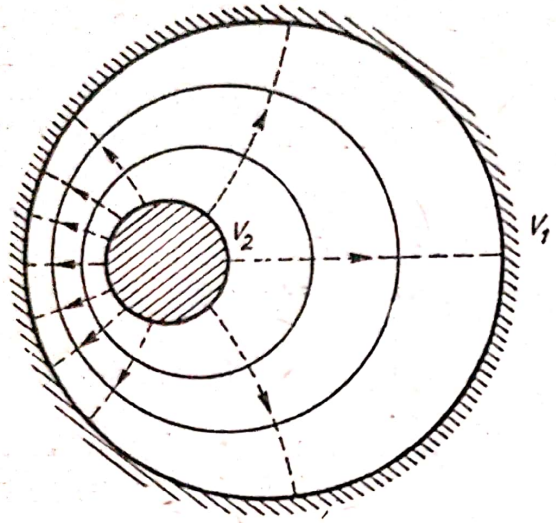


Fig. 3.12.

c) O serie de mărimi fizice importante se exprimă în funcție de potențialul electrostatic; de exemplu: tensiunea electrică.

3.3.5. Calculul tensiunii electrice în cîmpul electrostatic între două puncte oarecare.

Considerînd:

$$V_P = V_{P0} - \int_{P_0}^{P} \overline{E}_v \overline{ds} \qquad (3.35)$$

forma generală sub care se exprimă potențialul și deci variația de potențial:

$$dV = -\overline{E}_v \cdot \overline{ds} \qquad (3.36)$$

(conform expresiilor din relațiile generale 3.30, respectiv 3.33), se obține pentru tensiunea electrică expresia:

$$U_{AB} = \int_{A(C)}^{B} \overline{E}\ \overline{ds} = -\int_{A}^{B} dV = -(V_B - V_A) = V_A - V_B \qquad (3.37)$$

din care rezultă:

În cîmpurile staționare (invariabile în timp), deci și în cîmpul electrostatic, *tensiunea electrică între două puncte este egală cu diferența potențialelor electrice din acele două puncte.*

3.4. Aplicații la calculul cîmpurilor și potențialelor electrostatice

3.4.1. Cîmpul și potențialul electric în cazul unei sfere (metalice) a cărei suprafață este uniform încărcată cu sarcină electrică adevărată (fig. 3.13)

Dacă q este sarcina totală a sferei și a raza, densitatea de suprafață a sarcinii este:

$$\rho_s = \frac{q}{4\pi a^2}.$$

Soluția 1. *Rezolvarea prin calculul potențialului*: *a)* Punctul P în care se calculează cîmpul se găsește în exteriorul sferei:

$$V_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s dA}{R}, \quad \text{în care} \quad R = \sqrt{(r - a\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}$$

$$R = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}$$

$$dA = (ad\theta)\,(a\sin\theta\, d\varphi).$$

Rezultă:

$$V_e=\frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{a^2\sin\theta d\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}=\frac{\rho_s a^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}}\int_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_s a^2}{ar}\;\Big|\;\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\theta}\;\Big|_0^{\pi}$$

sau

$$V_e=\frac{1}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho s^a}{r}\Big[(r+a)-(r-a)\Big]=\frac{\rho_s a^2}{\varepsilon_0 r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r}$$

deoarece pentru $\theta=0$, $R=r-a$ şi pentru $\theta=\pi$, $R=r+a$.

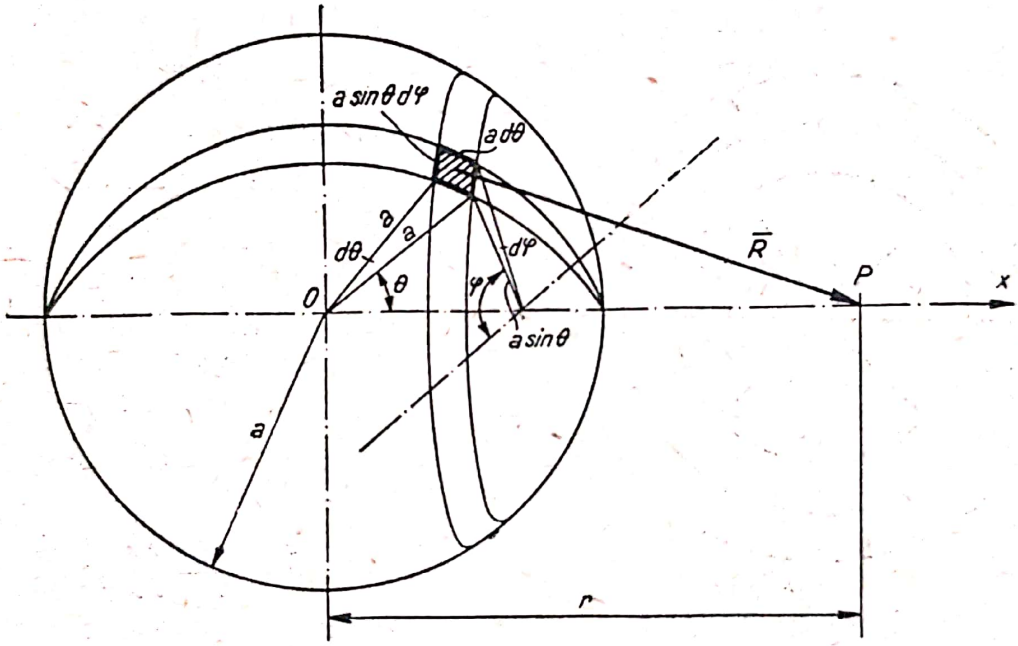


Fig. 3.13.

În consecinţă:

$$\bar{E}_{ve}=-\text{grad}\,V_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\bar{u}_r$$

b) Punctul P în care se calculează cîmpul se găseşte în interiorul sferei.
Se ajunge în mod analog la expresia:

$$V_i=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\rho_s a}{r}[(r+a)-(a-r)]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{a},$$

observînd la aplicarea ultimei limite că mărimea de luat între limite este chiar R şi că punctul fiind interior sferei, pentru $\theta=0$, $R=a-r$ şi pentru $\theta=\pi$, $R=a+r$.
Rezultă:

$$\bar{E}_{vi}=-\text{grad}\,V_i=0.$$

Variaţia mărimilor $|\bar{E}_v|$ şi V cu r e arătată în figura 3.14.

Se vede că în interiorul sferei cîmpul este identic cu cel dat de un corp de probă încărcat cu sarcina q a sferei și aeșzat în centrul acesteia.

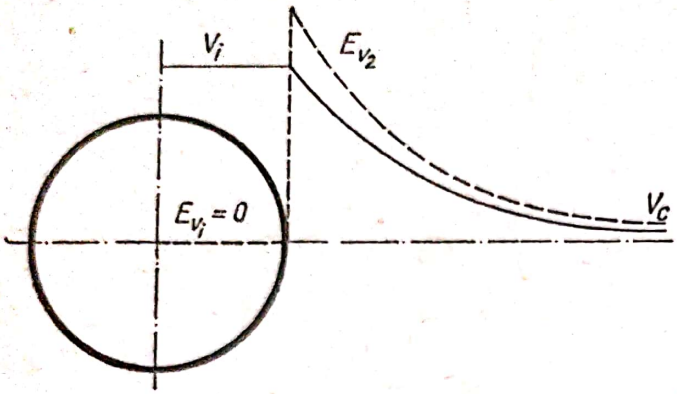


Fig. 3.14.

Soluția 2. Rezolvare prin teorema lui Gauss (fig. 3.15). Pentru calculul cîmpului în exteriorul sferei se consideră suprafața închisă sferică Σ_e, de rază $r>a$, concentrică cu conductorul. Din motive de simetrie, liniile de cîmp sînt radiale, iar fluxul cîmpului electric prin această suprafață este:

$$\psi_e=\iint_{\Sigma_c}\overline{E}_{ve}\cdot\overline{dA}=E_{ve}\cdot 4\pi r^2 \qquad (3.38)$$

(din cauza simetriei E_{ve} este constant la distanța r de centrul sferei).

Dar din teorema lui Gauss rezultă

$$\psi_e=\frac{1}{\varepsilon_0}q \qquad (3.39)$$

și din relațiile (3.38) și (3.39) se obține:

$$E_{v_e}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

(același ca la o sarcină punctuală).

Pentru calculul cîmpului în interiorul conductorului, se procedează în același mod, folosind însă o suprafață Σ_i de rază $r<a$. Se obține astfel:

$$\psi_i=0, \text{ deci } E_{vi}=0.$$

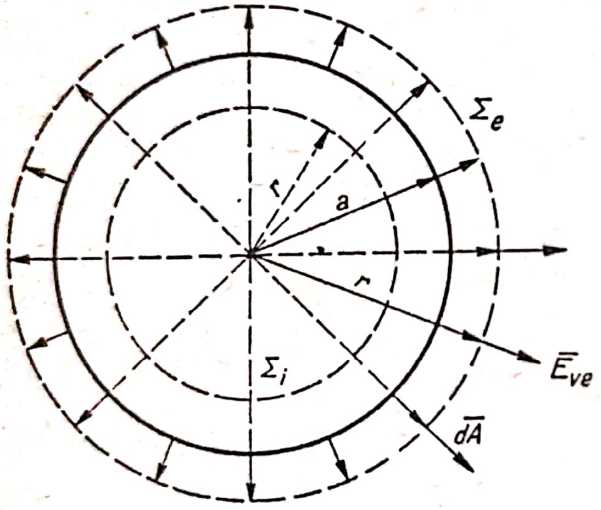


Fig. 3.15.

Soluția 3. Rezolvarea cu ajutorul expresiei cîmpului:

$$\overline{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint\rho_s dA\,\frac{\overline{R}}{R^3}$$

În acest caz această cale nu este recomandabilă, deoarece duce la calcule mai complicate.

3.4.2. **Cîmpul și potențialul electric în cazul unui plan S încărcat uniform cu densitatea de suprafață ρ_s a sarcinii electrice** (fig. 3.16). Rezolvarea prin utilizarea formulei potențialului (3.34′) nu este valabilă în acest caz, deoarece — planul fiind considerat infinit — nu se mai poate aplica convenția ca $V_\infty=0$, oricare ar fi direcția pe care se tinde spre ∞.

Soluția 1. Rezolvarea prin aplicarea formulei intensității cîmpului electric:

$$\overline{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S\frac{\rho_s\overline{R}}{R^3}dA.$$

Din motive de simetrie, vectorul cîmp electric (produs de planul încărcat) nu poate avea componente decît în direcția perpendiculară pe plan. Prin urmare, expresia componentei pe axa z devine:

$$E_{v_z}=\overline{k}\,\overline{E}_v$$

$$E_{v_z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_s\iint_S\frac{R_z dA}{R^3}$$

$$R_{v_z}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\rho_s\iint_S\frac{R\,dA\cos\theta}{R^3},$$

în care $R_z = R\cos\theta = z$, dacă se alege originea axelor în piciorul O al perpendicularei duse pe planul încărcat din punctul P în care se calculează cîmpul.

În coordonate polare (r', α'), în planul Oxy: $dA = r'dr'd\alpha'$.

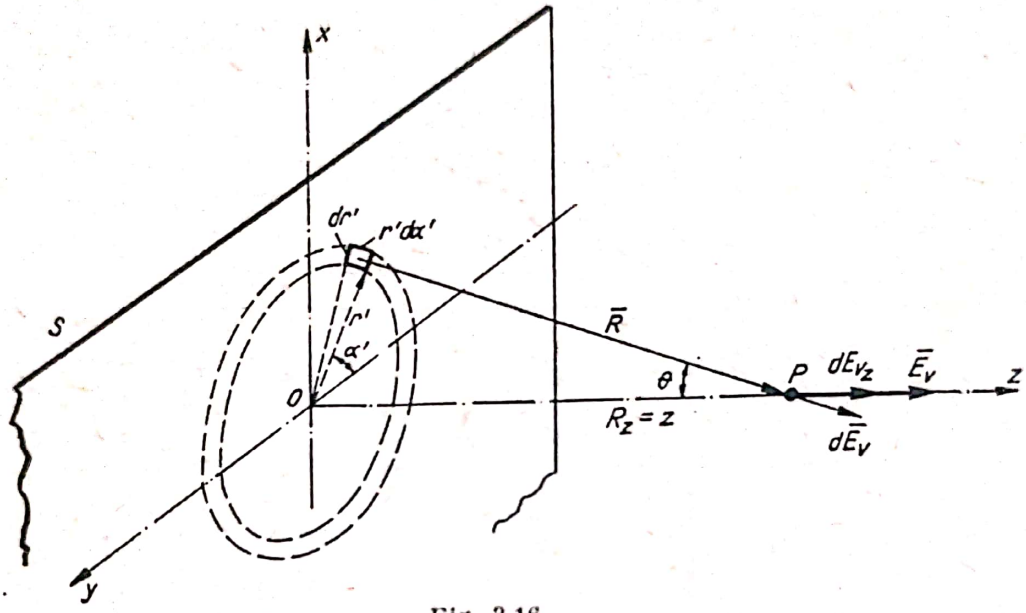


Fig. 3.16.

Contribuţia la integrală a coroanei circulare cuprinsă între razele r' şi $r'+dr'$ este cîmpul elementar

$$dE_{vz} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\alpha'=0}^{\alpha'=2\pi}\frac{r'dr'\cos\theta\, d\alpha'}{R^2} = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r'dr'\cos\theta}{R^2}\int_0^{2\pi} d\alpha' = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\,\frac{r'dr'\cos\theta}{R^2}$$

iar cîmpul rezultant va fi:

$$\bar{E}_{vz} = \int d\bar{E}_z = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\int\frac{r'dr'\cos\theta}{R^2}\cdot$$

Se ia θ ca variabilă de integrare, iar

$$R = \frac{z}{\cos\theta},\ r' = z\,\mathrm{tg}\,\theta,\ dr' = \frac{z}{\cos^2\theta}\,d\theta,$$

adică $\dfrac{r'dr'\cos\theta}{R^2} = \sin\theta d\theta$.

Se obţine:

$$E_{vz} = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\cdot$$

În consecinţă (fig. 3.17):

$$\bar{E}_v = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\bar{k} \quad \text{(pentru } z>0\text{)}.$$

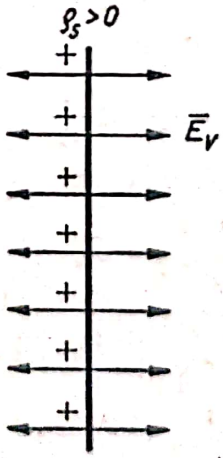


Fig. 3.17.

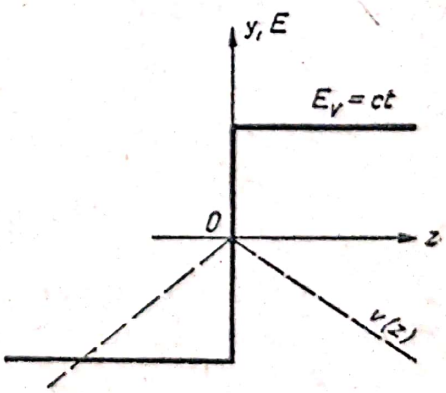


Fig. 3.18.

Din această expresie se poate calcula potenţialul

$$V = -\int_0^P \bar{E}_v d\bar{s} = -\int_0^z E_v dz = -\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\,Z\ (z>0),$$

dacă se ia ca potenţial de referinţă potenţialul planului ($V_0 = 0$ pe plan).

În partea stîngă a planului ($z<0$) cîmpul și potențialul au aceleași expresii de mai înainte cu semnul schimbat.

În figura 3.17 este reprezentat aspectul cîmpului electric pentru cazul plăcii încărcată pozitiv, iar în figura 3.18 sînt reprezentate, pentru același caz, variația potențialului V și variația intensității cîmpului electric E_v în funcțiune de distanța z de la placă (se vede că de fiecare parte a plăcii cîmpul este uniform).

Soluția 2. Rezolvare prin aplicarea teoremei lui Gauss (fig. 3.19). Se consideră o suprafață paralelipipedică Σ ca în figură. Din motive de simetrie E_v e perpendicular pe plan. În conse-

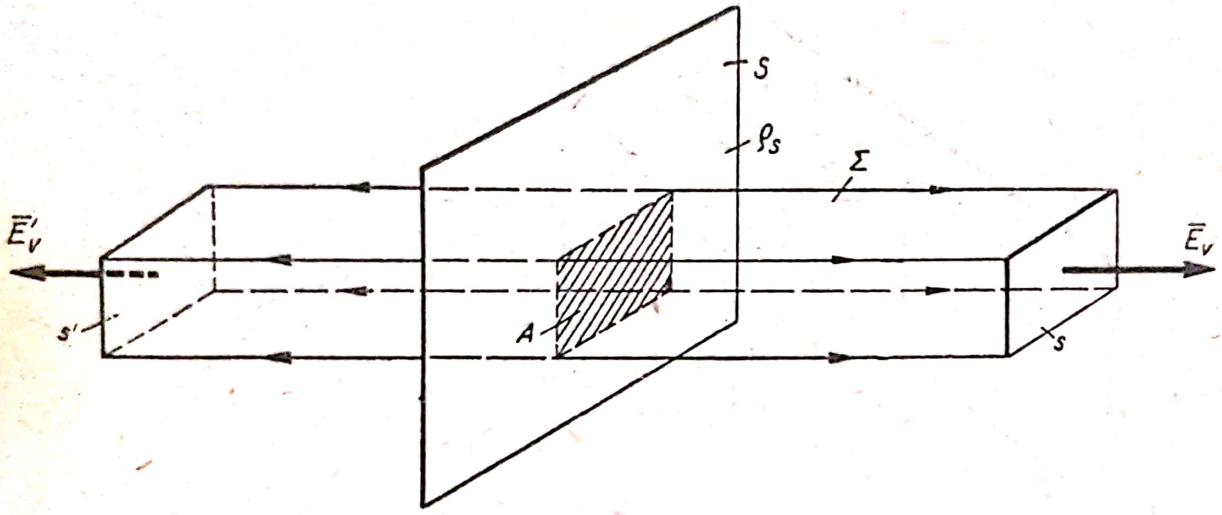


Fig. 3.19.

cință, fluxul prin fețele laterale ale suprafeței Σ e nul ($\vec{E}_v\overline{dA}=0$); tot fluxul se reduce la fluxul prin cele două fețe de bază s și s' de arii egale cu A.
Prin urmare:

$$\psi_E=\iint \vec{E}_v\,\overline{dA}=\iint_s \vec{E}_v\overline{dA}+\iint_{s'}\vec{E}_v\overline{dA}=2AE_v.$$

Pe de altă parte, din teorema lui Gauss:

$$\psi_E=\frac{1}{\varepsilon_0}q=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_s A.$$

Cîmpul electric se obține prin egalarea celor două expresii precedente:

$$E_v=\frac{1}{2\varepsilon_0}\rho_s \text{ sau } \vec{E}_v=\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\bar{k}=-\vec{E}'_v;$$

Aplicație numerică: Pentru $\rho_s=\frac{1}{4\pi}10^{-6}$ [C/m²] se obține (lucrînd în unitățile sistemului MKSA raționalizat):

$$E_v=\frac{1}{2\dfrac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}}\cdot\frac{1}{4\pi}10^{-6}=4{,}5\cdot 10^3\ [V/m\ .]$$

3.4.3. Cîmpul și potențialul electric în cazul unui fir rectiliniu infinit încărcat uniform cu densitatea de sarcină ρ_l (calculate cu teorema lui Gauss) (fig. 3.20). În aproape toate problemele, potențialul tuturor punctelor de la infinit a fost considerat *același* și finit, și a fost luat egal cu zero. Această ipoteză nu se poate face la studiul conductoarelor infinit lungi, după cum nu a fost valabilă în cazul aplicației 3.4.2. Deși conductoarele reale au întotdeauna o lungime finită, totuși, la studiul cîmpului conductoarelor foarte lungi, problema se simpli-

fică admiţînd că ele au o lungime infinită. În acest caz, nu se poate folosi expresia (3.34'), ci trebuie utilizată o altă metodă care să conducă mai întîi la expresia cîmpului.

Cu ajutorul *teoremei lui Gauss* se calculează întîi vectorul cîmp electric şi, din expresia lui, valoarea potenţialului.

Deoarece cîmpul are simetrie cilindrică, vectorul cîmp electric are direcţia de-a lungul razei r şi e acelaş în modul în toate punctele situate la aceeaşi distanţă r de fir.

În consecinţă se alege ca suprafaţă Σ suprafaţa unui cilindru de rază r şi înălţime h, concentric cu firul. Fluxul prin suprafeţele bazelor este nul, vectorul $\bar{E}_v$ fiind perpendicular pe $\overline{dA}$. Deci:

$$\psi_E = \iint_{\Sigma} \bar{E}_v \cdot \overline{dA} = \iint_{\text{supr. lat.}} \bar{E}_v \, \overline{dA} = E_v \iint_{\text{supr. lat.}} dA = E_v \cdot 2\pi rh.$$

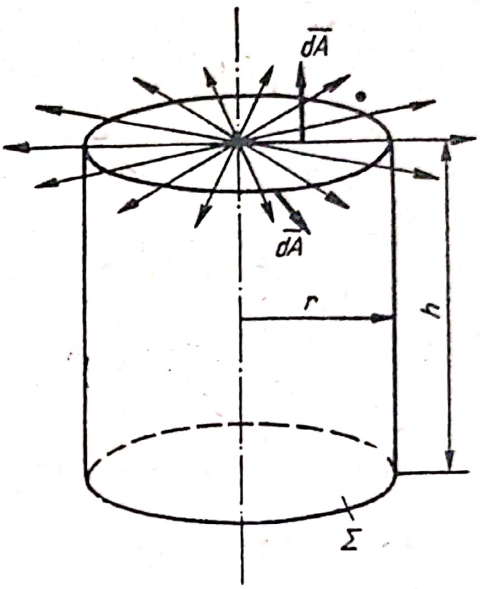


Fig. 3.20.

Pe de altă parte, conform teoremei lui Gauss:

$$\psi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} q = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_l h.$$

Din aceste două relaţii rezultă valoarea vectorului cîmp elcctric în vid:

$$E_v = \frac{1}{2\pi \varepsilon_0} \rho_l \frac{\bar{r}}{r^2}. \qquad (3.40)$$

Expresia potenţialului se deduce din relaţie (3.40).

Presupunînd că punctul în care V este nul este P_0, la distanţa r_0 de fir, rezultă:

$$V = -\int_{r_0}^{r} \bar{E} \cdot \overline{ds} = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^{r} \frac{r \cdot dr}{r^2} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} (\ln r_0 - \ln r)$$

sau

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}. \qquad (3.41)$$

Acest potenţial se numeşte *potenţial logaritmic*.

Dacă se alege $V=0$ pentru $r_0=1$, atunci expresia potenţialului logaritmic devine:

$$V = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln r = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{1}{r}. \qquad (3.41')$$

3.4.4. **Cîmpul şi potenţialul electric în cazul unui strat dublu de sarcini.** Se consideră un strat dublu de sarcini, constituit de două plăci paralele, încărcate uniform cu densităţi de sarcină egale şi opuse ca semn, ρ_s şi $-\rho_s$), situate la distanţa d.

Calculul se efectuează cu ajutorul principiului superpoziţiei. Se consideră trei situaţii distincte, $\bar{k}$ fiind un versor normal pe plăci şi îndreptat de la stînga spre dreapta.

În figura 3.21 a, este reprezentat un plan încărcat cu sarcină pozitivă, în figura 3.21 b — un plan încărcat cu sarcină negativă, iar în figura 3.21 c — două plane paralele infinite, încărcate cu sarcină pozitivă, respectiv negativă.

Din ultima figură rezultă că în afara plăcilor nu se produce nici un cîmp electric ($\bar{E}_v=0$), iar între ele se produce un cîmp a cărui intensitate este dublul valorii fiecărui cîmp în parte:

$$E_v = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \qquad (3.12)$$

Vectorul cîmp electric este dirijat de la placa pozitivă către placa negativă. Tensiunea electrică între plăci este, conform relației (2.6''):

$$U_{12}=E_v\cdot d=\frac{\rho_s}{\varepsilon_0}d. \tag{3.43}$$

Se va arăta la § 7 că acest dispozitiv reprezintă un condensator plan.

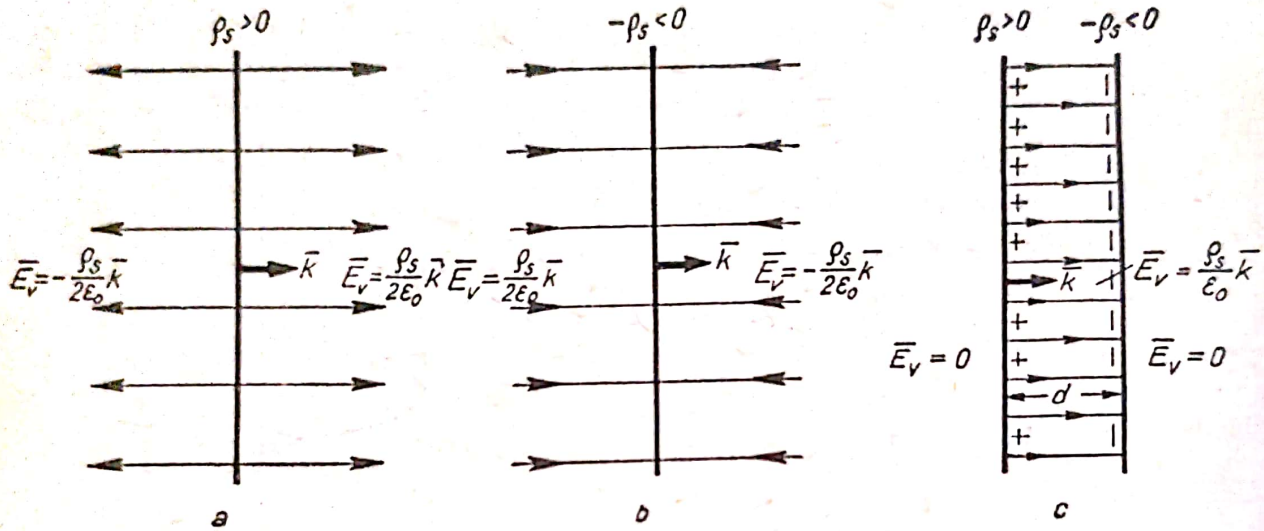


Fig. 3.21.

4. Polarizarea dielectricilor

4.1. Starea de polarizație și caracterizarea ei. Momentul electric

4.1.1. Starea de polarizație. Corpurile a căror densitate de sarcină electrică (adevărată) este în fiecare punct nulă, numite și corpuri neutre, se împart în două clase:

— *corpuri neutre nepolarizate electric*, care dacă sînt introduse în orice fel de cîmpuri electrice (omogene sau neomogene) nu sînt supuse unor acțiuni ponderomotoare (forțe sau momente);

— *corpuri neutre polarizate electric*, care dacă sînt introduse în cîmpuri uniforme cu orientări potrivite sînt supuse la cupluri, iar dacă sînt introduse în cîmpuri neuniforme cu orientări potrivite sînt supuse și la forțe.

Corpurile polarizate electric pot fi încărcate în același timp și cu sarcină electrică (adevărată). Un corp e numai polarizat electric dacă, fără a avea densitate de sarcină electrică, produce cîmp electric și e supus unor acțiuni mecanice cînd este adus într-un cîmp electric exterior.

Starea corpurilor mici polarizate electric se descrie cu ajutorul unei mărimi de stare vectorială $\bar{p}$, numită *moment electric*. Starea locală a corpurilor masive polarizate se descrie cu ajutorul densității de volum $\bar{P}$, a momentelor electrice, numită *polarizație electrică*.

Polarizația electrică poate fi: *permanentă*, dacă nu depinde de intensitatea locală a cîmpului electric; *temporară*, dacă depinde de intensitatea locală a cîmpului electric în care este situat corpul.

Polarizația permanentă poate apare sub formă de: *polarizație piezoelectrică*, cînd corpul s-a polarizat prin deformare mecanică; *polarizație piroelectrică*, cînd corpul s-a polarizat prin încălzire; *polarizație permanentă a electreților* (analogii magneților permanenți, în cazul stărilor electrice), prezentată de anumite materiale (rășini, plexiglas, ceruri) după ce au fost supuse unor tratamente termice prealabile, pînă la înmuiere, într-un cîmp electric foarte intens; polarizația remanentă a *materialelor feroelectrice*, care se polarizează nelinear sub acțiunea unui cîmp electric.

Cele mai cunoscute materiale, care prezintă polarizație permanentă sînt: cristalele de cuarț, sarea Seignette, turmalina. Cristalele piezoelectrice se folosesc, de exemplu, pentru reproducerea sunetului la înregistrările pe discuri (doze piezoelectrice — pick-up). Prin polarizare electrică se obține o deformarea mecanică a dielectricului solid. Acest efect piezoelectric invers are o importanță tehnică extrem de mare. Dacă se excită, de exemplu, un cristal de cuarț cu o tensiune alternativă, cristalul capătă deformări elastice, avînd aceeași frecvență ca și tensiunea aplicată. Astfel de cristale pot servi ca etaloane de frecvență (cînd frecvența tensiunii aplicate este egală cu frecvența proprie a cristalului), pentru măsurarea timpului sau pentru producerea ultrasunetelor.

4.1.2. **Momentul electric.** Experiența arată că acțiunile ponderomotoare care se exercită asupra unui mic corp polarizat (permanent sau temporar) adus în vid, într-un cîmp electric exterior de intensitate $\bar{E}_v$, adică cuplul $\bar{C}$ și forța $\bar{F}$ exercitate în aceste condiții asupra micului corp, sînt date de relațiile:

$$\bar{C}=\bar{p}\times\bar{E}_v=\bar{u}_e p E_v \sin\alpha \tag{4.1}$$

$$\bar{F}=\operatorname{grad}\ (\bar{p}\bar{E}_v) \tag{4.2}$$

În a doua relație, săgeata indică mărimea care se derivează, astfel că proiecțiile forței pe axe sînt:

$$F_x=\bar{p}\frac{\partial \bar{E}_v}{\partial x};\quad F_y=\bar{p}\frac{\partial \bar{E}_v}{\partial y};\quad F_z=\bar{p}\frac{\partial \bar{E}_y}{\partial z} \tag{4.3}$$

Această forță e nulă într-un cîmp omogen (care e independent de x, y, z):

$$\bar{F}=0. \tag{4.4}$$

Mărimea $\bar{p}$ care apare în aceste relații este o mărime primitivă de stare a micului corp polarizat, depinzînd de starea lui globală de polarizare și caracteri-

zînd complet această stare, și se numește moment electric al corpului. După cum polarizarea corpului e permanentă sau temporară, momentul electric poate fi permanent ($\bar{p}_p$) sau temporar ($\bar{p}_t$); în general:

$$\bar{p}=\bar{p}_p+\bar{p}_t. \tag{4.5}$$

Din figura 4.1 rezultă — în cazul particular al unui corp polarizat permanent, la care $\bar{p}=\bar{p}_p$ e constant și independent de $\bar{E}_v$ — că acest corp are o direcție proprie de polarizare (direcția lui $\bar{p}$), care tinde să se așeze paralel cu direcția cîmpului electric (conform sensului de rotație definit de produsul vectorial $\bar{p}\times\bar{E}_v=\bar{C}$). În cazul cînd $\bar{p}$ este paralel cu $\bar{E}_v$, corpul ajunge la echilibru (din punctul de vedere al mișcării de rotație) deoarece:

$$\bar{C}=\bar{u}_c p E_v \sin\alpha \tag{4.6}$$

se anulează cînd $\alpha=0$ ($\bar{u}_c$ e versorul cuplului).

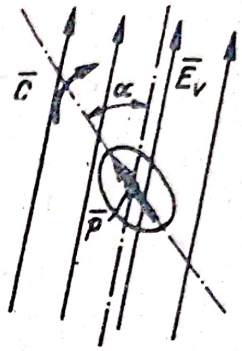


Fig. 4.1

Din a doua relație (4.2) rezultă că cele trei componente ale forței, pe cele trei axe, sînt:

$$\left.\begin{aligned} F_x&=p_x\frac{\partial E_{vx}}{\partial x}+p_y\frac{\partial E_{vy}}{\partial x}+p_z\frac{\partial E_{vz}}{\partial x}\\ F_y&=p_x\frac{\partial E_{vx}}{\partial y}+p_y\frac{\partial E_{vy}}{\partial y}+p_z\frac{\partial E_{vz}}{\partial y}\\ F_z&=p_x\frac{\partial E_{vx}}{\partial z}+p_y\frac{\partial E_{vy}}{\partial z}+p_z\frac{\partial E_{vz}}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Considerate ca un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute p_x, p_y, p_z, aceste relații permit calcularea mărimilor p_x, p_y, p_z dacă se cunosc F_x, F_y și F_z.

Pentru a măsura momentul electric este deci suficient să se măsoare forța exercitată asupra corpului într-un cîmp electric exterior $\bar{E}_v(\bar{r})$ cunoscut.

4.1.3. **Polarizația electrică.** Starea locală de polarizație a unui corp masiv se caracterizează cu ajutorul densității de volum locale a momentelor electrice ale părților corpului. Se numește *polarizație electrică* o mărime derivată definită de limita raportului dintre suma vectorială a momentelor electrice $\Sigma\bar{p}_i=\Delta\bar{p}$ ale materialului dintr-un volum Δv și acest volum, cînd el tinde către zero:

$$\boxed{\bar{P}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\bar{p}}{\Delta v}=\frac{d\bar{p}}{dv}} \tag{4.8}$$

Polarizația electrică se mai numește și intensitate de polarizare. Ea poate fi considerată ca o sumă formată din polarizația permanentă și cea temporară:

$$\bar{P}=\bar{P}_p+\bar{P}_t. \tag{4.9}$$

Cunoscînd polarizația $\bar{P}$, momentul electric al unei porțiuni de corp e dat de integrala

$$\bar{p}=\iiint\bar{P}\,dv \tag{4.10}$$

Scanned with OKEN Scanner

4.1.4. **Unităţi.** Unitatea de moment electric care rezultă din relaţia (4.1) este momentul unui mic corp polarizat asupra căruia se exercită un cuplu maxim egal cu unitatea într-un cîmp electric de intensitate egală cu unitatea. Unitatea de moment electric în sistemul MKSA este metru-coulomb (Cm), deoarece din (4.1) rezultă ecuaţia dimensională:

$$[p]=[F][L][E]^{-1}=[F][L][F]^{-1}[Q]=[QL]$$

Din relaţia (4.8) rezultă că unitatea de polarizaţie este coulombul pe metru pătrat (C/m^2).

4.1.5. **Puterea foiţei electrice.** Uneori se consideră foiţe subţiri, polarizate electric, care au momentele electrice normale sau aproape normale pe feţele lor. În astfel de cazuri este util să se opereze cu densitatea de suprafaţă a momentelor electrice ale foiţei, care se mai numeşte puterea foiţei electrice sau polarizaţie superficială şi se defineşte ca limita raportului dintre suma vectorială $\Sigma\bar{p}_i=\Delta\bar{p}$ a momentelor electrice ale materialului unei foiţe electrice, care ocupă aria ΔA a foiţei, şi această arie, cînd aceasta tinde spre zero:

$$\bar{P}_s=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\bar{p}}{\Delta A}=\frac{d\bar{p}}{dA}. \tag{4.11}$$

Unitatea de putere a foiţei rezultă din relaţia (4.11) şi se numeşte coulomb pe metru (C/m) în sistemul MKSA.

4.2. Dipolul electric. Echivalenţa dintre un dipol electric şi un mic corp polarizat

4.2.1. **Dipolul.** Un sistem de două sarcini electrice punctuale egale şi de semne contrare (q şi $-q$) situate la o distanţă l care tinde spre zero, produsul ql menţinîndu-se finit (dacă $l\to 0$, $q\to\infty$ pentru ca produsul ql să fie finit), se numeşte *dipol electric*.

Din punctul de vedere practic, un dipol este format din două mici corpuri cu sarcini suficient de mari, aşezate una faţă de alta la o distanţă foarte mică în raport cu distanţa la punctul de observaţie (fig. 4.2).

Dacă se consideră vectorul $\bar{l}$ de modul $l=|\bar{l}|$, dirijat de la capătul cu sarcina $-q$ spre capătul cu sarcina $+q$, se numeşte *moment al dipolului* mărimea vectorială:

$$\bar{p}_d=q\bar{l} \tag{4.12}$$

(definită teoretic în condiţiile în care $l\to 0$ şi $q\to\infty$ astfel ca $ql\to$finit).

4.2.2. **Teorema echivalenţei dintr-un dipol electric şi un mic corp polarizat.** *În regim electrostatic, un mic corp polarizat de moment electric $\bar{p}$ este echivalent cu un dipol electric de moment $\bar{l}q=\bar{p}$, atît din punctul de vedere al acţiunilor mecanice (ponderomotoare) exercitate asupra lor de un cîmp electric exterior, cît şi din punctul de vedere al cîmpului electric produs de ele în vid.*

Prima parte a teoremei se demonstrează considerînd momentul rezultant față de centrul o al dipolului (v. fig. 4.2), al cuplului de forțe aplicate extremităților lui încărcate cu sarcinile dipolare q și $-q$ într-un cîmp exterior $\bar{E}_v$. Se obține:

$$\bar{C}=\frac{\bar{l}}{2}\times q\bar{E}_v+\left(-\frac{\bar{l}}{2}\right)\times(-q\bar{E}_v)=\bar{l}\times q\bar{E}_v=q\bar{l}\times\bar{E}_v=\bar{p}\times\bar{E}_v. \qquad (4.13)$$

Pentru forța rezultantă exercitată asupra dipolului într-un cîmp omogen se obține:

$$\bar{F}=-q\bar{E}_v+q\bar{E}_v=0.$$

Prin urmare relațiile (4.1) și (4.4) privitoare la acțiunile ponderomotoare ale unui cîmp exterior asupra unui mic corp polarizat rămîn valabile și pentru

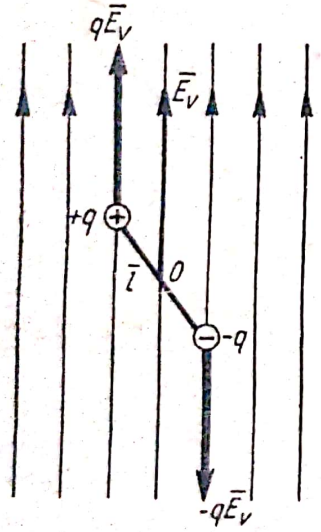


Fig. 4.2.

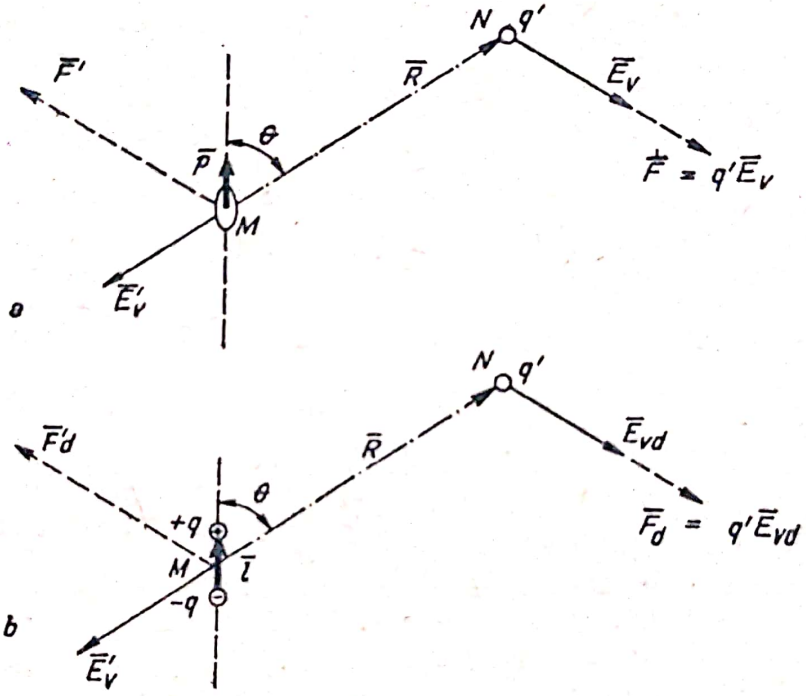


Fig. 4.3.

dipolul electric. Se mai poate demonstra că și forța rezultantă (4.2) într-un cîmp electrostatic neomogen are aceeași expresie în cele două cazuri. Dipolul electric și micul corp polarizat sînt deci echivalente (dacă $\bar{p}=\bar{l}q$) din punctul de vedere al acțiunilor ponderomotoare pe care le are asupra lor un cîmp electrostatic exterior.

A doua parte a teoremei se demonstrează presupunînd că se aduc succesiv în același punct M corpul polarizat și dipolul și se consideră pe rînd forțele exercitate de fiecare din ele asupra unui corp de probă auxiliar, de sarcină q', situat într-un același punct N. Deoarece cîmpul $\bar{E}'_v$ produs de acest corp de probă în punctul M este același, forțele rezultante exercitate de acest corp de probă asupra corpului polarizat ($\bar{F}'$) și asupra dipolului ($\bar{F}'_d$) sînt egale,

în conformitate cu prima parte a teoremei, dacă este satisfăcută condiţia de echivalenţă:

$$\boxed{\bar{p}=q\bar{l}} \qquad (4,14)$$

adică $\bar{F}'=\bar{F}'_d$. Dar în primul caz, din egalitatea acţiunii şi reacţiunii rezultă că asupra corpului de probă de sarcină q', micul corp polarizat exercită forţa $\bar{F}=q'\bar{E}_v=-\bar{F}'$ (unde $\bar{E}_v$ este cîmpul produs de el în punctul N). În al doilea caz, tot din egalitatea acţiunii şi reacţiunii rezultă că asupra corpului de probă de sarcină q', dipolul exercită forţa $\bar{F}_d=q'\bar{E}_{vd}=-\bar{F}'_d$ (unde $\bar{E}_{vd}$ este cîmpul produs de dipol în punctul N). Cum $\bar{F}'=\bar{F}'_d$ rezultă că şi $\bar{F}=\bar{F}_d$ şi deci micul corp polarizat şi dipolul produc acelaşi cîmp electrostatic:

$$\bar{E}_v\equiv\bar{E}_{vd}$$

în fiecare punct N din spaţiu, adică sînt echivalente şi din punctul de vedere al cîmpului electrostatic produs de ele.

Datorită echivalenţei complete, stabilite mai înainte (în regim electrostoatic), *este comod să se studieze comportarea unui mic corp polarizat ca şi cum ar fi un dipol electric.* Se numesc, în acest caz, *sarcini electrice dipolare* sarcinile $+q$, care situate la extremităţile corpului polarizat, în lungul axei lui de polarizaţie (a momentului lui electric $\bar{p}$), la o distanţă l, sînt echivalente cu micul corp polarizat, avînd valoarea $q=p/l$ care rezultă din (4.14).

Sarcinile dipolare nu trebuie confundate cu sarcinile electrice (adevărate) şi în cadrul experienţei la scară macroscopică au caracterul de mărimi de calcul. Ele nu pot fi, de exemplu, separate, rupînd în două micul corp polarizat (cum ar putea fi separate dacă ar fi sarcinile adevărate ale unui dipol electric real). În adevăr, se constată experimental că fragmentele unui mic corp polarizat nu au sarcină electrică (adevărată), ci prezintă numai momente electrice, adică numai perechi de sarcini dipolare egale şi de nume contrare. Cînd distanţa l dintre sarcini tinde către zero, sarcinile dipolare tind către infinit, iar produsul $q\bar{l}$ rămîne egal cu $\bar{p}$: se obţine un dipol elementar. În teoria fenomenologică nu se poate stabili dacă sarcinile dipolare sînt sau nu simple mărimi fictive, fiindcă numai prin observaţie macroscopică ele nu pot fi individualizate pentru a determina pe l, deci pe q şi $-q$. Studiul microfizic, care se face în teoria electronilor, permite însă să se arate că sarcinile electrice dipolare corespund sarcinilor unor particule elementare ca şi sarcinile adevărate şi că momentul electric este, din punct de vedere microscopic, o mărime derivată.

4.3. Potenţialul şi cîmpul electric al unui dipol (al unui mic corp polarizat)

În baza teoremei echivalenţei se poate calcula cîmpul unui corp polarizat, calculînd cîmpul dipolului echivalent cu el.

4.3.1. **Calculul potenţialului electric.** Potenţialul dat de un dipol electric într-un punct N, avînd faţă de dipol raza vectoare $\bar{R}$ (fig. 4.4), este:

$$V_p=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R_1}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(-q)}{R_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}. \qquad (4.15)$$

Dacă $\frac{l}{R} \ll 1$, atunci $R_2 - R_1 \to l\cos\theta$, iar $R_1 R_2 \to R^2$

În consecință, trecînd la limita $\frac{l}{R} \to 0$ și observînd că $lq \to p$, rezultă:

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l\cos\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3}.$$

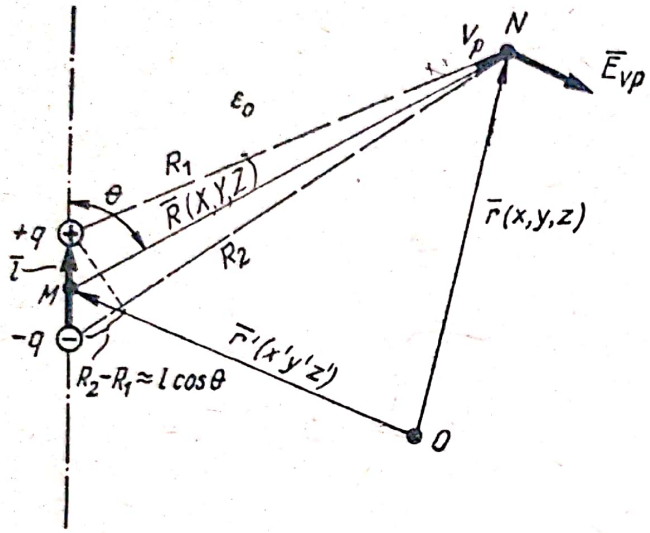


Fig. 4.4.

Prin calcul simbolic se putea găsi direct din relația (4.15):

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \to -d\left(\frac{1}{R}\right) =$$

$$= -\bar{l}\,\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right) = \bar{l}\,\mathrm{grad}'\left(\frac{1}{R}\right),$$

în care s-a notat cu $\mathrm{grad}\left(\frac{1}{R}\right)$, gradientul calculat la deplasarea extremității razei vectoare $\bar{R}$, iar cu $\mathrm{grad}'\left(\frac{1}{R}\right)$ gradientul calculat la deplasarea originei razei vectoare; acești gradienți sînt egali și de semn contrar. Cu această valoare a diferenței $\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ se obține imediat, observînd că $\bar{l}q \to \bar{p}$:

$$\boxed{V_p = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{grad}'\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3}} \qquad (4.16)$$

4.3.2. Calculul cîmpului electric.

$$\bar{E}_{v_p} = -\mathrm{grad}\,V_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\mathrm{grad}\,\frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\frac{\bar{p}\bar{R}}{R^3}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R^3}\nabla(\bar{p}\bar{R}) + (\bar{p}\bar{R})\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right)\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{\bar{p}\bar{R}}{R^5}\bar{R} - \frac{\bar{p}}{R^3}\right] \qquad (4.17)$$

deoarece $\nabla\left(\frac{1}{R^3}\right) = -3\cdot R^{-4}\cdot\frac{\bar{R}}{R} = -\frac{3}{R^5}\bar{R}$

și $\nabla(\bar{p}\bar{R}) = \bar{i}\,p_x + \bar{j}\,p_y + \bar{k}\,p_z = \bar{p}.$

Notația simbolică precedentă, folosind operatorul de derivare ∇, se poate evita lucrînd în coordonate carteziene. Componentele cîmpului sînt:

$$E_x = -\frac{\partial V_p}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial V_p}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial V_p}{\partial z}. \qquad (4.18)$$

Dar:

$$-\frac{\partial V_p}{\partial x}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\bar{p}\ \bar{R})\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^3}\right)+\frac{1}{R^3}\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}\ \bar{R})\right]. \tag{4.19}$$

Se știe că:

$$\bar{p}\bar{R}=p_x(x-x')+p_y(y-y')+p_z(z-z')$$

$$\text{cu}\quad \bar{p}=\bar{i}p_x+\bar{j}p_y+\bar{k}p_z$$

$$\text{și}\quad \bar{R}=\bar{i}(x-x')+\bar{j}(y-y')+\bar{k}(z-z')=\bar{i}X+\bar{j}Y+\bar{k}Z,$$

iar pe de altă parte se cunoaște valoarea:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x-x'}{R}=\frac{X}{R}$$ cum rezultă și din expresia:

$R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, a cărei derivată în raport cu x este: $2R\frac{\partial R}{\partial x}=2(x-x')$. Se poate deci obține, prin înlocuirea în relația (4.19):

$$-\frac{\partial V_p}{\partial x}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[(\bar{p}\,\bar{R})\frac{3X}{R^5}-\frac{p_x}{R^3}\right] \tag{4.20}$$

Făcînd aceleași operații pentru componentele pe axele y și z ale cîmpului se obține relația (4.17):

$$\boxed{\bar{E}_{v_p}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\bar{p}\,\bar{R})\,\bar{R}}{R^5}-\frac{\bar{p}}{R^3}\right]}$$

Expresia intensității cîmpului electric al unui dipol (mic corp polarizat) diferă esențial de cea a cîmpului unei sarcini electrice punctuale. $\bar{E}_v$ scade cu puterea a treia a distanței R în loc să scadă cu puterea a doua ca în cazul cîmpului unei sarcini. Intensitatea cîmpului electric este foarte mare în apropierea corpurilor polarizate și foarte slabă la depărtare. Pe de altă parte, $|\bar{E}_{v_p}|$ depinde și de direcția razei vectoare, nu numai de distanța de la corpul polarizat.

4.3.3. **Componentele cîmpului în coordonate sferice.** În aplicații se folosesc componenta E_R pe direcția radială și componenta E_θ pe o direcție perpendiculară pe $E_{\bar{R}}$, dacă θ este unghiul între vectorii $\bar{p}$ și $\bar{R}$ (fig. 4.5).

Aceste componente au expresiile:

$$E_R=\bar{E}_{v_p}\cdot\bar{u}_R=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\bar{p}\,\bar{R})}{R^5}\bar{R}\cdot\frac{\bar{R}}{R}-\frac{\bar{p}}{R^3}\cdot\frac{\bar{R}}{R}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2(\bar{p}\,\bar{R})}{R^4}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p\cos\theta}{R^3}. \tag{4.21}$$

$$E_\theta=\bar{E}_{v_p}\cdot\bar{u}_\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3\frac{(\bar{p}\,\bar{R})}{R^5}\bar{R}\,\bar{u}_\theta-\frac{\bar{p}}{R^3}\bar{u}_\theta\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p\sin\theta}{R^3} \tag{4.22}$$

deoarece $\bar{R}\bar{u}_\theta=0$.

Determinarea ecuațiilor liniilor de cîmp este complicată. Ele sînt tangente în fiecare punct la vectorul cîmp electric. Suprafețele echipotențiale sînt ortogonale pe liniile de cîmp (fig. 4.6).

Scanned with OKEN Scanner

Se menționează că potențialul este nul la infinit ($R \to \infty$), dar și în toate punctele planului care este perpendicular pe axa dipolului și care trece prin mijlocul acestei axe (din relația (4.16) cos $\theta = 0$).

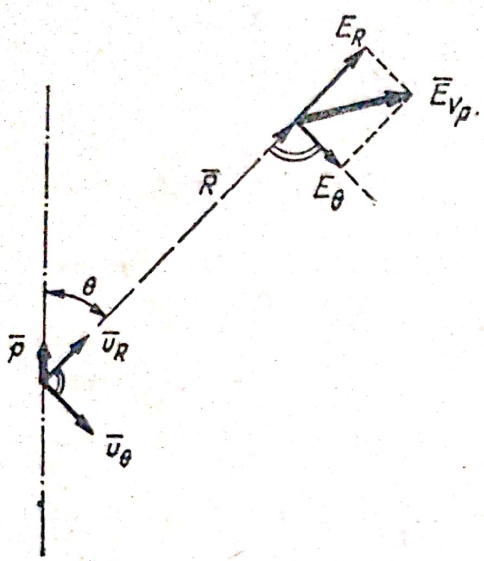


Fig. 4.5

4.3.4. Expresiile generale ale potențialului și cîmpului corpurilor polarizate.

Aplicînd principiul superpoziției se poate calcula potențialul electrostatic în vid al unui sistem oarecare de corpuri polarizate electric. Dacă $\bar{P}$ sînt polarizațiile electrice, $\bar{P}_s$ sînt puterile foițelor electrice și $\bar{p}_i$ momentele electrice discrete ale sistemului de corpuri, potențialul devine:

$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\int\int \bar{P}\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dv' + \int\int \bar{P}_s\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R}\,dA' + \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i\,\mathrm{grad}'\,\frac{1}{R_i}\right] \qquad (4.16')$$

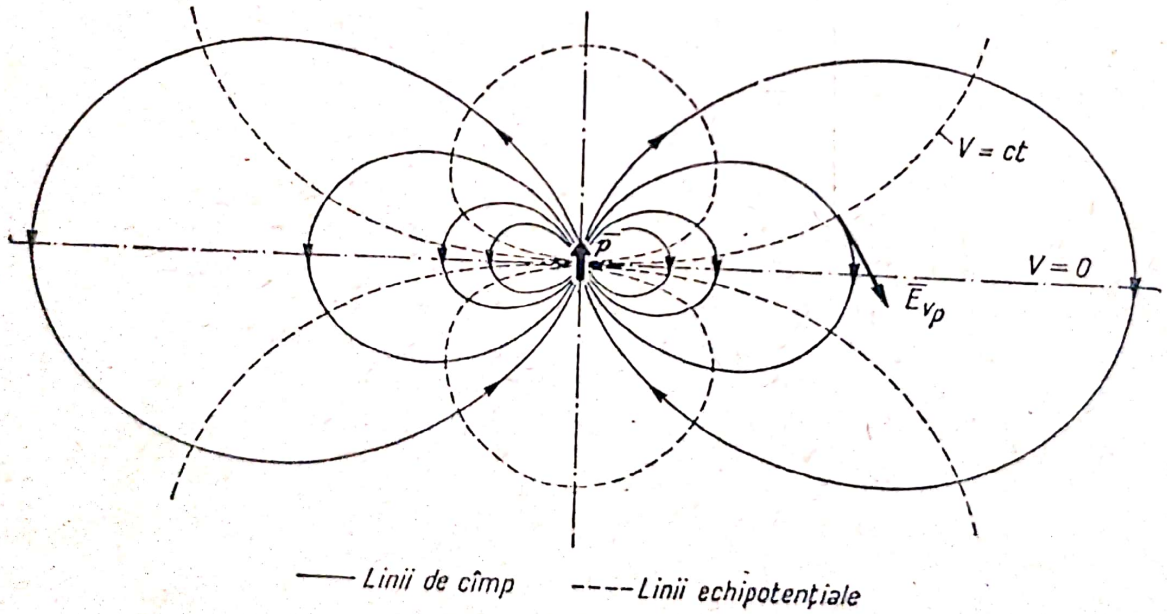


Fig. 4.6.

În mod similar se obține și valoarea vectorului cîmp electric corespunzător:

$$\bar{E}_{vp} = -\,\mathrm{grad}\ V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\int\int\left(\frac{3\bar{P}\bar{R}}{R^5} - \frac{\bar{P}}{R^3}\right)dv' + \int\int\left(\frac{3\bar{P}_s\bar{R}}{R^5} - \frac{\bar{P}_s}{R^3}\right)dA' + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3\bar{p}_i\bar{R}_i}{R_i^5} - \frac{\bar{p}_i}{R_i^3}\right)\right]. \qquad (4.17')$$

4.41 Sarcini de polarizație. Densitatea sarcinii de polarizație

4.4.1. **Sarcini de polarizație.** Sarcinile fictive a căror repartiție în volumul sau pe suprafața unui corp este echivalentă cu starea de polarizație reală a corpului respectiv, din punctul de vedere al cîmpului electrostatic produs, se numesc *sarcini de polarizație*.

Dacă se consideră volumul unui corp polarizat împărțit în elemente de volum în lungul liniilor de polarizație, fiecare element de volum se poate înlocui cu un dipol (fig. 4.7). Excesul local de sarcini dipolare de un nume față de cele de nume contrar dă sarcina electrică de polarizație q_p.

Pentru a stabili cîtă sarcină de polarizație se află local într-un corp, se consideră o mică suprafață închisă Σ în corpul polarizat electric și se trasează liniile de cîmp ale vectorului polarizație.

Dacă polarizația este mai slabă în partea în care intră liniile de cîmp ale polarizației în interiorul suprafeței decît în partea prin care ies aceste linii (cum este cazul în fig. 4.7, unde s-au trasat mai dese liniile de cîmp acolo unde polarizația este mai intensă), interiorul suprafeței are exces de sarcini dipolare negative.

Dacă polarizația electrică ar fi mai intensă în partea de jos a suprafeței, ar fi exces de sarcini dipolare pozitive.

Se observă că excesul de sarcină dipolară de un nume față de cea de nume contrar depinde numai de polarizația electrică de pe suprafața Σ (de pe frontieră), deoarece dipolii echivalenți elementelor corpului depărtate de ea au ambele extremități în interiorul sau în exteriorul suprafeței și au o contribuție

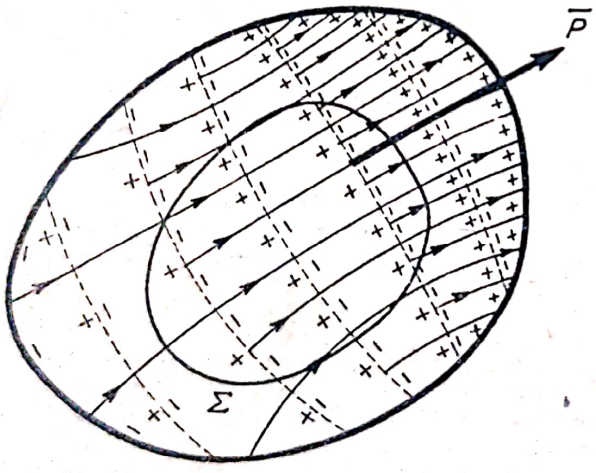


Fig. 4.7.

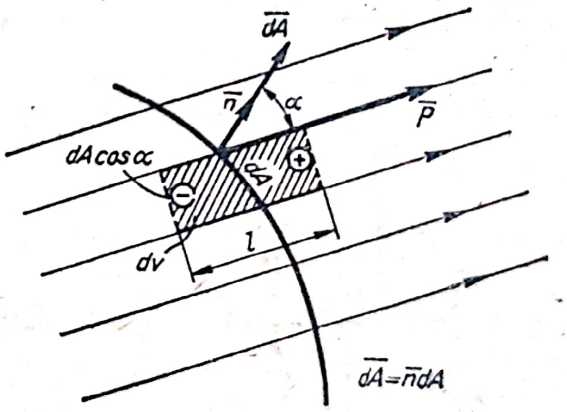


Fig. 4.8.

nulă la sarcina de polarizație din Σ. Prin urmare, numai dipolii ce sînt intersectați de suprafața Σ contribuie la valoarea sarcinii q_p. Se consideră un astfel de dipol, intersectat de suprafața Σ, echivalent unui element de corp „cilindric" de lungime l, de bază $dA\cos\alpha$ și de volum $dv = l dA\cos\alpha$, în care dA este aria elementară interceptată de elementul de corp pe Σ, iar α unghiul dintre direcția locală a polarizației $\overline{P}$ (adică de generatoarea „cilindrului" a cărui suprafață

laterală este un tub de linii de cîmp ale polarizației) și normala exterioară $\bar{n}$ a suprafeței Σ (v. fig. 4.8). Sarcina dipolară rămasă în exteriorul suprafeței, corespunzătoare acestui element de corp, de moment Pdv, rezultă din relația (4.12):

$$\delta q_d = Pdv/l = PdAl \cos \alpha/l = PdA \cos \alpha = \bar{P}d\bar{A}. \tag{4.23}$$

Sarcina dipolară corespunzătoare rămasă în interior și care contribuie la sarcina de polarizație q_p din Σ e

$$dq_p = -dq_d = -\bar{P}d\bar{A}, \tag{4.24}$$

iar sarcina totală de polarizație q_p din „interiorul" suprafeței Σ rezultă:

$$\boxed{q_p = -\iint_{\Sigma} \bar{P}\, d\bar{A}} \tag{4.25}$$

Sarcina electrică de polarizație localizată în interiorul unei suprafețe închise este egală și de semn contrar cu fluxul polarizației electrice din acea suprafață. Această sarcină este o mărime derivată din polarizația electrică.

4.4.2. **Densitatea sarcinii de polarizație.** Prin analogie cu densitatea sarcinii electrice adevărate (par. 2.3) se definește densitatea sarcinii de polarizație. Dacă se notează cu ρ_{vp} densitatea de volum a sarcinii electrice de polarizație, sarcina de polarizație din volumul V_Σ este:

$$q_p = \iiint_{V_\Sigma} \rho_{v_p} dv \tag{4;26}$$

Relația (4.25) se poate exprima și sub formă diferențială cu ajutorul noțiunii de divergență și al teoremei lui Gauss și Ostrogradski, cunoscută din analiza vectorială. Se consideră un cîmp de vectori $\bar{G}$, și o suprafață închisă Σ; se calculează fluxul vectorului cîmp prin această suprafață și se consideră raportul dintre flux și volumul Δv care este închis de suprafața Σ; se trece apoi la limită pentru suprafețe ale căror dimensiuni scad în toate direcțiile, astfel încît Δv tinde către zero. Se obține în acest mod o valoare de punct a fluxului specific, care se numește *divergența vectorului cîmp* $\bar{G}$ în punctul considerat:

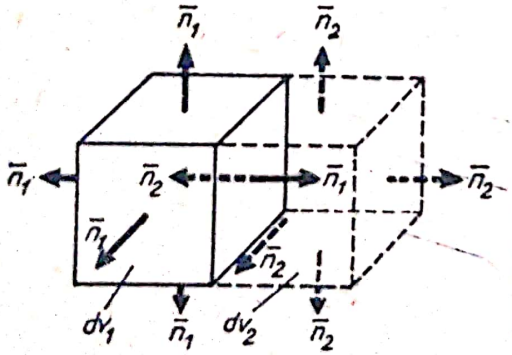


Fig. 4.9.

$$\operatorname{div} \bar{G} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\iint_{\Sigma} \bar{G} \cdot d\bar{A}}{\Delta v} \tag{4.27}$$

Mărimea definită în acest mod nu depinde de forma volumului închis de suprafața Σ și este o mărime scalară. Pentru a stabili forma anumită se imaginează un volum finit, închis de suprafață Σ, care se împarte în elemente de volum. Pentru fiecare element este valabilă, conform definiției divergenței (4.27), relația:

$$\operatorname{div} \bar{G} \cdot dv \approx \iint \bar{G} \cdot \overline{dA} = \iint \bar{G} \bar{n}\, dA.$$

Dacă se însumează pentru întregul volum, se obține în stînga semnului egal: $\iiint_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G} dv$, iar în dreapta rămîne numai integrala corespunzătoare elementelor suprafeței Σ, deoarece toate fluxurile vectorului cîmp $\bar{G}$ prin suprafețele interioare se anulează două cîte două [intervenind o dată cu semnul pozitiv și o dată cu semnul negativ, conform sensului normalei exte-

rioare pentru faţa comună a două elemente de volum adiacente (fig. 4.9.)] cîmpul $\bar{G}$ fiind considerat cu repartiţie continuă. Rezultă teorema lui Gauss şi Ostrogradski:

$$\iiint_{v_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G}\, dv = \iint_{\Sigma} \bar{G}\cdot\overline{dA} = \iint_{\Sigma} G_n\, dA \tag{4.28}$$

adică: *Fluxul unui cîmp de vectori $\bar{G}$ printr-o suprafaţă închisă este egal cu integrala de volum a div $\bar{G}$ pentru volumul închis de suprafaţa considerată.*

Pentru a calcula expresia divergenţei în coordonate carteziene se consideră un element de volum de dimensiuni dx, dy, dz (fig. 4.10). La distanţa x de planul yOz, fluxul care intră prin suprafaţa $dydz$ este: $dy\,dz\,G_x(x)$, deoarece se consideră componenta normală G_x a vectorului cîmp $\bar{G}$ pe suprafaţă. La distanţa $(x+dx)$, iese fluxul: $dydz\,G_x(x+dx)$. Deoarece sensul pozitiv al fluxului este considerat în sensul normalelor exterioare, se obţine diferenţa între fluxul care iese şi dintre cel care intră:

$$\left(G_x+\frac{\partial G_x}{\partial x}dx-G_x\right)\ dy\,dz=\frac{\partial G_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \tag{4.29}$$

Valoarea componentei $G_x(x+dx)$ s-a obţinut din valoarea G_x prin dezvoltarea în serie Taylor şi reţinerea termenilor de primul ordin. Valori analoge expresiei (4.29) se obţin şi pentru celelalte perechi de suprafeţe.

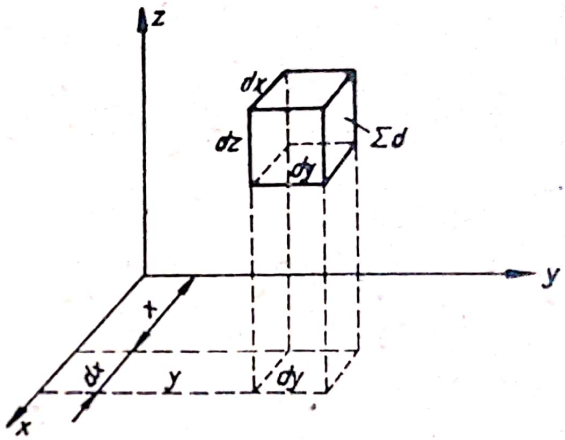


Fig. 4.10.

În concluzie:

$$\iint \bar{G}.d\bar{A}=\left(\frac{\partial G_x}{\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial y}+\frac{\partial G_z}{\partial z}\right)\,dx\,dy\,dz.$$

Împărţind cu $dv=dx\,dy\,dz$ se obţine cu (4.27):

$$\operatorname{div}\bar{G}=\frac{\partial G_x}{\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial y}+\frac{\partial G_z}{\partial x} \tag{4.30}$$

sau

$$\operatorname{div}\bar{G}=\nabla\bar{G}=\left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\,\bar{G}. \tag{4.30'}$$

Revenind la expresia densităţii de volum a sarcinii de polarizaţie, se poate obţine din relaţiile (4.25), (4.26) şi (4.28):

$$\rho_{vp}=-\operatorname{div}\,\bar{P} \tag{4.31}$$

sau, în coordonate carteziene:

$$\rho_{vp}=-\left(\frac{\partial P_x}{\partial x}+\frac{\partial P_y}{\partial y}+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right).$$

Cînd există suprafeţe de discontinuitate ale polarizaţiei $\bar{P}$, sarcina de polarizaţie este repartizată cu densitate de suprafaţă ρ_{sp} şi expresia acesteia din urmă este:

$$\rho_{sp}=-\lim_{\Sigma\to 0}\frac{\iint_{\Sigma}\bar{P}\cdot\overline{dA}}{\Delta A}=-\operatorname{div}_s\,\bar{P}. \tag{4.32}$$

Pentru a calcula divergența de suprafață $\mathrm{div}_s \overline{P}$ în funcție de valorile $\overline{P}_1$ și $\overline{P}_2$ ale vectorului polarizație pe cele două fețe *1* și *2* ale suprafeței de discontinuitate, se alege ca suprafață Σ, suprafața unui paralelipiped foarte plat (fig. 4.11). Se obține astfel:

$$\mathrm{div}_s \overline{P} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\overline{P}_1 \overline{n}_1 \Delta A + \overline{P}_2 \overline{n}_2 \Delta A}{\Delta A} = \overline{P}_1 \overline{n}_1 + \overline{P}_2 \overline{n}_2$$

sau

$$\mathrm{div}_s \overline{P} = \overline{n}_{12} (\overline{P}_2 - \overline{P}_1) \qquad (4.33)$$

în care $\overline{n}_{12}$ este versorul normal pe suprafața de discontinuitate dirijat de la *1* spre *2* ($\overline{n}_{12} = \overline{n}_2 = -\overline{n}_1$).

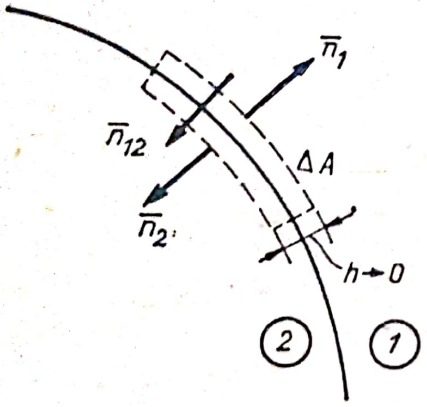


Fig. 4.11.

În consecință, relația (4.32) devine:

$$\rho_{sp} = -\overline{n}_{12}(\overline{P}_2 - \overline{P}_1) = \overline{n}_{12}(\overline{P}_1 - \overline{P}_2). \qquad (4.34)$$

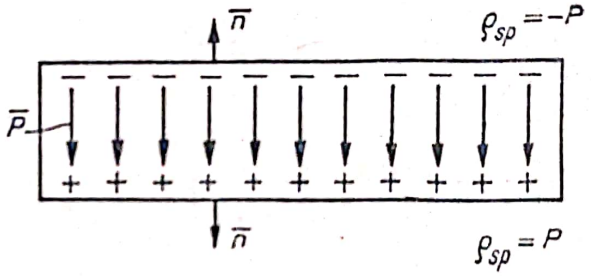


Fig. 4.12.

Valoarea ρ_{sp} la suprafața unui corp situat în vid:

$$\boxed{\rho_{sp} = \overline{P} \cdot \overline{n},} \qquad (4.35)$$

este egală cu componenta vectorului $\overline{P}$ pe direcția normalei exterioare $\overline{n}$ a corpului în punctul considerat (fig. 4.12). (În adevăr în acest caz $n = \overline{n}_{12}$ și $\overline{P}_2 = 0$ în vid).

4.5. Interpretarea microscopică a polarizației electrice

Proprietatea pe care o are un dielectric neîncărcat să influențeze cîmpul electric la acțiunea căruia este supus a fost atribuită stării lui de polarizare. Pentru a interpreta microscopic această stare, ca efect macroscopic al unei anumite repartiții de sarcină electrică microscopică, se consideră că orice corp este constituit din particule elementare cu sarcini pozitive și negative (în cantități egale pentru un corp electric neutru) și că la conductori o parte din particule sînt libere (electroni la metale, ioni la electroliți), iar la dielectrici particulele cu ambele feluri de sarcină sînt legate cvasielastic în atomi sau în molecule.

4.5.1. **Polarizarea temporară.** Sub acțiunea unui cîmp electric, particulele elementare din atomii și moleculele unui corp izolant (dielectric) se deplasează puțin (cele cu sarcini pozitive în sensul cîmpului electric și cele cu sarcini negative, în sens invers). Din punctul de vedere macroscopic, elementele corpului apar polarizate electric. Din punctul de vedere al mecanismului de producere, se deosebesc, în principal polarizarea de deformare și polarizarea de orientare.

Pentru simplificarea raționamentului se va considera atomul de hidrogen, al cărui model este dat în figura 4.13. În jurul nucleului pozitiv se rotește electronul negativ. În medie, centrul de greutate al pozițiilor electronului negativ coincide cu nucleul și momentul electric mijlociu al atomului e nul. Dacă un cîmp electric exterior acționează asupra atomului, se va

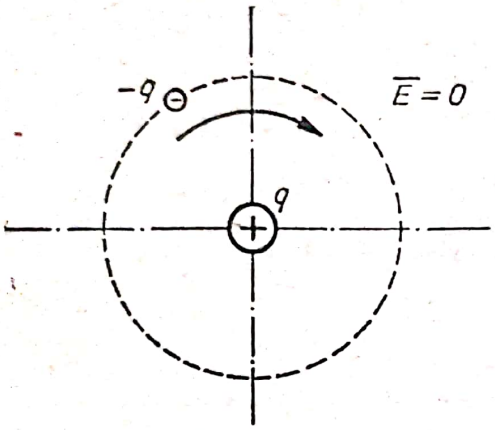


Fig. 4.13.

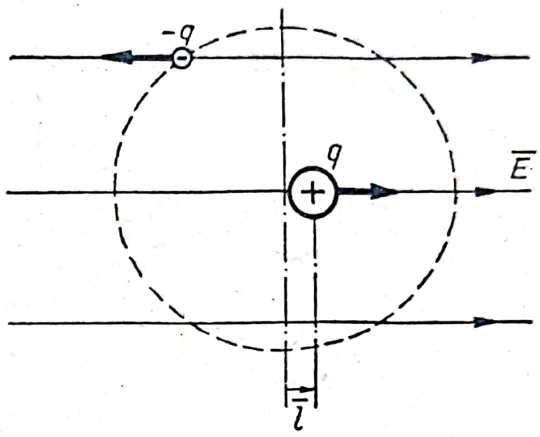


Fig. 4.14.

produce o deformare a orbitei electronului și deci o deplasare a centrului de greutate geometric al pozițiilor electronului față de nucleu, electronul și protonul fiind supuși unor forțe opuse (fig. 4.15). Momentul mijlociu va fi diferit de zero și atomul se va comporta ca un dipol, caracterizat printr-un moment $\bar{p}=q\bar{l}$ (q sarcina deplasată; $\bar{l}$ distanța cu care s-a deplasat centrul de greutate al pozițiilor electronului față de centrul de greutate al protonului).

Din cauza forțelor de atracție dintre electron și nucleu, deplasarea e foarte mică, practic proporțională cu intensitatea cîmpului exterior, ca și momentul $\bar{p}$. Se spune că dipolul obținut este *cvasielastic*.

Deformații analoge capătă și atomii sau moleculele cu o constituție mai complicată. Ca urmare, fiecare atom sau moleculă devine echivalent cu un dipol. Sensul momentelor acestor dipoli este cel al cîmpului exterior $\bar{E}$. Polarizația este egală cu suma momentelor dipolilor elementari cuprinși în unitatea de volum. Aceasta este *polarizarea de deformare*. Vectorul polarizației este în direcția cîmpului exterior $\bar{E}$.

Polarizarea de deformare (cu dipoli cvasielastici) e singura care se produce la substanțele cu *molecule nepolare*, simetrice, (fără moment electric inițial). Din această categorie fac parte, de exemplu: hidrogenul, oxigenul, azotul.

Există o clasă de materiale izolante cu molecule nesimetrice, al căror moment electric e diferit de zero, chiar cînd nu există un cîmp exterior. Aceste molecule au un moment electric spontan și se numesc *polare* (de exemplu HCl-acidul clorhidric, ale cărui molecule sînt formate din ionul pozitiv de hidrogen H, și ionul negativ de clor, Cl). Agitația termică determină o așezare dezordonată a moleculelor, astfel că pe un element macroscopic de volum momentele electrice ale diferiților dipoli se neutralizează. Dacă se aplică unui asemenea corp un cîmp exterior, dipolii tind să ocupe o poziție în care axele lor să fie orientate de-a lungul liniilor cîmpului. Acestei așezări ordonate i se opune însă agitația termică. Ca urmare se realizează o rotire medie incompletă a dipolilor în direcția cîmpului. Și în acest caz polarizația, egală cu suma vectorială a momentelor electrice ale dipolilor cuprinși în unitatea de volum, e practic proporțională cu cîmpul exterior. Aceasta este *polarizarea de orientare* (de rotație). O ordonare perfectă ar exista numai pentru un cîmp electric de intensitate infinită sau la temperatura zero absolut. De obicei, la corpurile cu molecule polare intervine și polarizarea prin deformare.

Experimental se constată că pentru ambele categorii de polarizare temporară este valabilă relația numită *legea polarizației electrice temporare* (v. și § 6.3).

$$\overline{P_t}=\varepsilon_0\chi_e\overline{E} \tag{4.36}$$

adică: polarizația temporară este proporțională cu vectorul cîmp electric $\overline{E}$. Mărimea χ_e se numește *susceptivitate electrică* și depinde de natura corpului. Dimensional χ_e este un număr:

$$\chi_e=\frac{[P]}{[\varepsilon_0 E]}=\frac{[Q\,L^{-2}]}{[Q\,L^{-2}]}=[1],$$

unde dimensiunea $[\varepsilon_0 E]$ se obține din teorema lui Gauss:

$$[E\,L^2]=\frac{[Q]}{[\varepsilon_0]}.$$

Corpurile la care predomină polarizarea prin deformare se mai numesc *diaelectrice*. Corpurile la care predomină polarizarea prin orientare se numesc *paraelectrice*. La aceste corpuri χ_e scade puternic cînd crește temperatura, ceea ce este evident, dacă se ține seama de rolul agitației termice în „limitarea" acestei polarizații.

4.5.2. **Polarizarea permanentă.** Polarizarea permanentă depinde de cauze neelectrice, după cum s-a menționat într-un paragraf precedent. Ea poate fi piezoelectrică (datorită deformării unui cristal), piroelectrică (datorită încălzirii unui cristal) sau se poate datori unui tratament termic prealabil (electreții). O formă specială este polarizarea feroelectrică.

4.5.3. **Polarizarea feroelectrică.** În general, prin histerezis se înțelege un fenomen ireversibil, în care o mărime de stare B depinde în mod neunivoc de parametrul independent A, și anume în funcție de istoricul realizării stării respective. În particular, B ia valoarea B_2 cînd A ia valoarea A_2, prin valori crescătoare (v. fig. 4.16) A_1, A_2, A_3 — și valoarea B_2' cînd A revine de la valoarea A_3 la valoarea A_2.

Anumite materiale izolante sînt caracterizate de o legătură complicată, neliniară, între $\overline{P}$ și $\overline{E}$, care pentru procese ciclice se poate reprezenta grafic ca în figura 4.16 și constituie

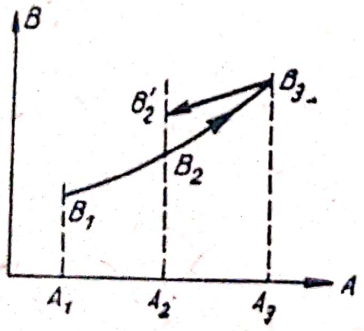


Fig. 4.15.

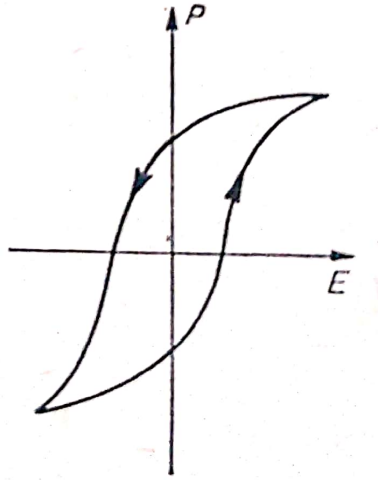


Fig. 4.16.

un fenomen de histeresis electric. Aceste materiale se numesc *feroelectrice* sau seignettoelectrice și au o polarizare atît temporară (dependentă de cîmp), cît și permanentă (diferită de zero în lipsa cîmpului). Exemple de astfel de materiale sînt sarea Seignette, titanatul de bariu etc. Susceptivitatea lor electrică este foarte mare, dependentă de cîmp, de temperatură etc. și în tehnica modernă au numeroase utilizări în care se folosesc aceste proprietăți.

4.5.4. **Viscozitatea electrică,** La frecvențe mari, variațiile polarizației temporare nu pot urmări instantaneu variațiile intensității cîmpului electric exterior care o condiționează. În reprezentare grafică, relația dintre $\overline{P}$ și $\overline{E}$ pentru o perioadă este o curbă închisă analogă unui ciclu dehisteresis. Fenomenul se numește *postefect* sau *viscozitate electrică* și determină pierderi de energie suplementare în dielectricul considerat, utilizate, de exemplu, în încălzirea dielectrică.

5. Cîmpul electric în interiorul corpurilor polarizate

5.1. Cîmpul electric în interiorul unei cavități

În electrostatică, calculul intensității cîmpului electric $\overline{E}_v$ produs în vid de corpuri încărcate electric și polarizate electric se poate face cu expresiile coulombiene 3.7, 3.8, 3.9, cu condiția de a lua în considerare atît sarcinile propriu-zise (adevărate) cît și sarcinile de polarizație (echivalente din punctul de vedere al producerii cîmpului electrostatic cu repartițiile de moment electric ale corpurilor polarizate electric). Se va nota cu $\overline{E}'$ și se va numi „mărime de calcul" mărimea vectorială care reprezintă rezultatul calculului efectuat cu expresiile coulombiene cînd punctul considerat se află în interiorul unui corp și nu în vid. *Semnificația ei fizică se poate lămuri numai după ce s-au definit în prealabil mărimile de natură electrică, necesare și suficiente pentru caracterizarea stării cîmpului electric în corpuri*, în regim static sau variabil.

Pînă acum, s-a definit o asemenea mărime —$\overline{E}_v$—numai pentru un punct din vid, cu ajutorul forței $\overline{F}$ exercitată asupra unui mic corp de probă, încărcat cu sarcina q, situat în punctul considerat:

$$\overline{E}_v = \lim_{q \to 0} \overline{F}/q \tag{5.1}$$

Pentru a extinde această definiție și la punctele *din interiorul* corpurilor, trebuie să presupunem că în jurul punctului M considerat s-a practicat un mic gol — o cavitate vidă delimitată de o suprafață închisă $\sum_c$ — și că dimensiunile acestui gol tind la limită către zero, suprafața $\sum_c$ strîngîndu-se către punctul M. În interiorul cavității, măsurarea forței electrice $\overline{F}$ exercitată asupra unui mic corp de probă, de sarcină q, este principial posibilă și permite definirea intensității cîmpului electric din cavitatea vidă (v. fig. 5.1):

$$\overline{E}_{cav} = \lim_{\substack{\Sigma_c \to M \\ q \to 0}} \frac{\overline{F}}{q} \tag{5.2}$$

Fără precizări suplimentare, această relație nu definește însă o mărime susceptibilă de a caracteriza starea locală a cîmpului electric, deoarece expe-

rienţa arată că oricît de mică ar fi cavitatea mărimea (5.2) *depinde de forma şi de orientarea ei*.

Într-un acelaşi punct M există, deci, o infinitate de mărimi $\overline{E}_{cav}$ dependente de forma şi de orientarea, faţă de $\overline{P}$, a suprafeţei $\sum_c$, deşi starea electrică locală (înainte de practicarea cavităţii) este aceeaşi.

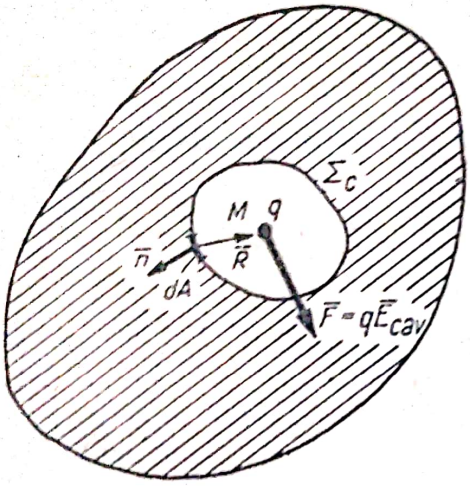


Fig. 5.1.

În limitele teoriei coulombiene a cîmpului electrostatic acest lucu se explică prin modificarea pe care practicarea cavităţii o aduce la repartiţia de sarcină adevărată şi de polarizaţie existentă mai înainte. În particular, la repartiţia de sarcină de polarizaţie existentă mai înainte de practicarea cavităţii se adaugă o repartiţie superficială cu densitatea (v.4.35):

$$\rho_{sp}=\overline{P}(-\overline{n})=-\overline{n}\,\overline{P} \tag{5.3}$$

pe faţa interioară a cavităţii (semnul minus provine din faptul că, în acest caz, s-a notat cu $\overline{n}$ normala exterioară la $\sum_c$ care, faţă de corp, este o normală interioară; normala exterioară faţă de corp este $-\overline{n}$). Această repartiţie suplimentară produce un „cîmp" suplimentar $\overline{E}'_{pcav}$, calculabil cu expresia coulombiană (3.8):

$$\overline{E}'_{pcav}=\lim_{\Sigma_c\to M}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{\Sigma_c}\frac{(-\overline{P}\overline{n})\overline{R}}{R^3}\,dA \tag{5.4}$$

pe care îl vom numi *cîmpul propriu al cavităţii* şi care nu se anulează în M, cînd $\Sigma_c\to M$, ci depinde de forma şi de orientarea suprafeţei Σ_c (cum se verifică uşor prin calcul direct).

Cavităţile utilizate pentru caracterizarea stării electrice locale trebuie astfel alese, încît prin practicarea lor să nu se aducă nici un fel de perturbaţie domeniului *exterior* suprafeţei Σ_c, chiar în imediata ei vecinătate. Numai în felul acesta se va putea afirma că starea electrică din domeniul exterior nu a fost perturbată şi că modificarea adusă la repartiţia de sarcină adevărată şi de polarizaţie, existentă mai înainte de practicarea cavităţii, constă exclusiv în repartiţia superficială (5.3). În aceste condiţii, intensitatea cîmpului electric din vidul cavităţii se poate scrie:

$$\overline{E}_{cav}=\overline{E}'+\overline{E}'_{pcav}, \tag{5.5}$$

în care $\overline{E}'$ este mărimea calculată cu repartiţia de sarcină existentă înainte de practicarea cavităţii, iar $\overline{E}'_{pcav}$ — cîmpul propriu al sarcinilor de polarizaţie de pe faţa interioară a cavităţii. Expresiile (5.4 şi 5.5) arată că $\overline{E}_{cav}$ este determinat local — la cavitate de formă şi orientare date — de valorile a numai două mărimi vectoriale locale: $\overline{E}'$ şi $\overline{P}$. Dacă s-ar cunoaşte, deci,

într-un punct dat, două valori $\overline{E}_{cav}$ distincte, corespunzătoare la două cavități diferite (ca formă și orientare) și dacă s-ar putea calcula cu ajutorul lor valorile locale ale lui $\overline{E}'$ și $\overline{P}$, determinarea intensității cîmpului $\overline{E}_{cav}$ *în orice altă cavitate* ar fi imediată și univocă.

De aceea, caracterizarea stărilor cîmpului electric în corpuri polarizate electric se poate face complet numai cu ajutorul a *două* mărimi vectoriale de stare.

Mărimile vectoriale de stare ale cîmpului electric în corpuri se definesc — după un procedeu utilizat încă de Maxwell — cu ajutorul intensității cîmpului din vidul a două cavități potrivit alese, care să satisfacă următoarele condiții:

— să nu aducă nici un fel de perturbație a stării electromagnetice din domeniul exterior lor;

— să permită exprimarea intensității cîmpului din vidul oricărei alte cavități, de formă dată (și care satisface prima condiție), în funcțiune de mărimile vectoriale de stare definite cu ajutorul lor:

— să conducă la mărimi vectoriale de stare care în vid, considerat ca stare de rarefiere extremă a corpurilor (în care deci $\overline{P}\to 0$), să tindă amîndouă către intensitatea cîmpului electric în vid $\overline{E}_0$ (eventual pînă la un factor, constantă universală).

Aceste mărimi vectoriale de stare sînt mărimi primitive ale teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic. Ele se numesc intensitatea cîmpului electric, notată cu $\overline{E}$, și inducția electrică, notată cu $\overline{D}$. Motivarea „electrostatică", dată mai înainte pentru utilitatea introducerii lor este justificată în fond numai de eficacitatea practică a teoriei cîmpului electromagnetic variabil în timp, fundamentată pe aceste mărimi.

5.2. Intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$. Tensiunea electrică U.

Pentru a defini prima mărime se utilizează o cavitate de forma unui canal drept, foarte scurt, extrem de strîmt în raport cu lungimea lui, cu axa paralelă cu vectorul polarizație $\overline{P}$ (fig. 5.2) și cu secțiunea de formă arbitrară.

Se numește intensitatea cîmpului electric $\overline{E}$, într-un punct dintr-un corp, o mărime de stare locală a cîmpului electromagnetic, egală numeric cu intensitatea cîmpului $E_{canal\,\|\,\overline{P}}$ din vidul unui mic canal extrem de subțire orientat în lungul direcției locale a polarizației electrice:

$$\boxed{\overline{E}=\overline{E}_{canal\,\|\,\overline{P}}.} \qquad (5.6)$$

Se observă că, în cazul acestei cavități, versorul $\overline{n}$ normal la suprafață este perpendicular pe polarizația $\overline{P}$, astfel că din (5.3) și (5.4) rezultă $\rho_{sp}=0$ și

$\overline{E}'_{p\ canal}=0$ (contribuția bazelor unde $\overline{n}\parallel\overline{P}$, dar ale căror arii sînt infiniți mici superiori, e neglijabilă). Din punctul de vedere al cîmpului sarcinilor de polarizație, perturbația introdusă prin practicarea canalului e nulă. Se obține:

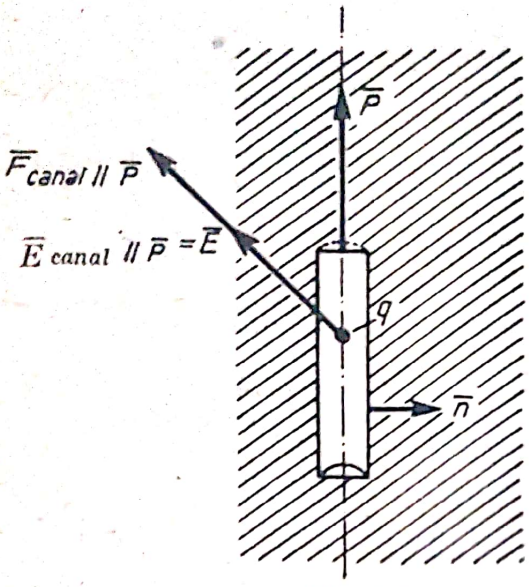


Fig. 5.2.

$$\overline{E}=\overline{E}'+\overline{E}'_{p\,canal}=\overline{E}', \qquad (5.7)$$

ceea ce înseamnă că semnificația fizică a mărimii de calcul $\overline{E}'$ este acum precizată.

Intensitatea $\overline{E}$ a cîmpului electric este o mărime primitivă. O mărime derivată de mare importanță practică este *tensiunea electrică*, definită cu ajutorul valorilor pe care intensitatea cîmpului electric le ia de-a lungul unei curbe C, între două puncte A și B, prin integrala de linie:

$$\boxed{u_{AB}=\int_{A(C)}^{B}\overline{E}\,\overline{ds}=\int_{A(C)}^{B}E\,ds\cos\alpha.} \qquad [\alpha=\sphericalangle(\overline{E},\overline{ds})]. \qquad (5.8)$$

Această definiție generalizează în corpuri definiția (2.6) dată în vid.

5.3. Inducția electrică $\overline{D}$. Fluxul electric Ψ.

Pentru a defini a doua mărime se utilizează o cavitate de forma unei mici fante cilindrice, extrem de turtite (fig. 5.3), cu planul bazelor normal pe direcția polarizației $\overline{P}$ și cu forma bazelor arbitrară.

Se numește inducție electrică[1] $\overline{D}$, *într-un punct dintr-un corp, o mărime de stare locală a cîmpului electromagnetic, egală numeric cu produsul dintre permitivitatea vidului* ε_0 *și intensitatea cîmpului* $\overline{E}_{fantă\perp\overline{P}}$ *din vidul unei mici fante extrem de plate, orientată transversal față de direcția locală a polarizației electrice:*

$$\boxed{\overline{D}=\varepsilon_0\cdot\overline{E}_{fantă\perp\overline{P}}.} \qquad (5.9)$$

[1] Inducția electrică se mai numește și *deplasare electrică*.

Se observă că în cazul acestei cavităţi apare o repartiţie de sarcină de polarizaţie de densitate superficială $\rho_{sp}=P$ pe baza inferioară şi $\rho'_{sp}=-P$ pe baza superioară, alcătuind un strat dublu, care (v. § 3.4.4.) produce un cîmp propriu nul în exterior, avînd în interior valoarea:

$$\overline{E}'_{p_{fantă}\perp\overline{P}}=-\overline{n}\frac{\rho_{sp}}{\varepsilon_0}. \tag{5.10}$$

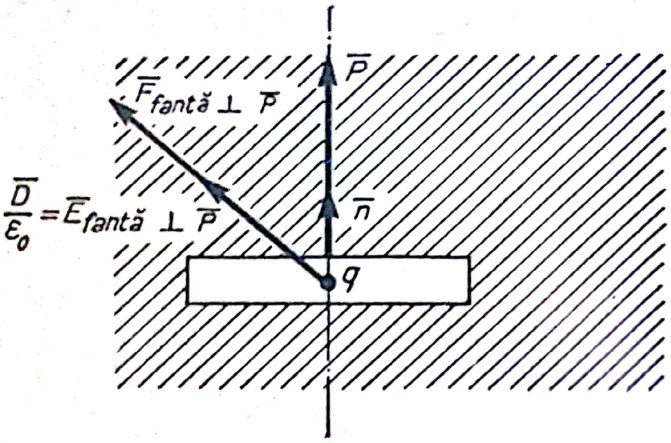


Fig. 5.3.

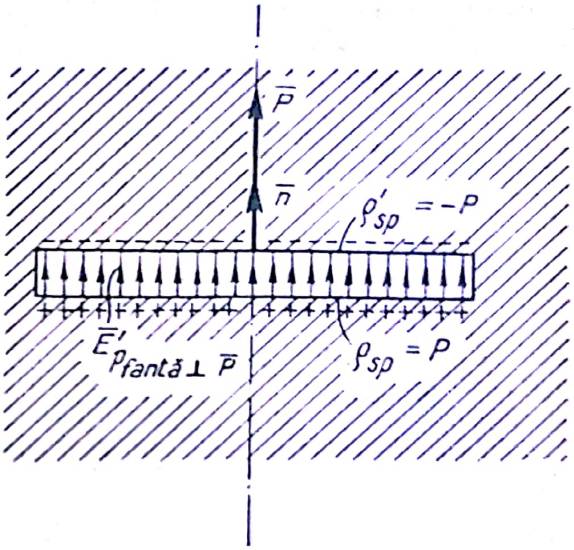


Fig. 5.4.

În figura 5.4 este indicată repartiţia sarcinilor de polarizaţie (pe faţa interioară a pereţilor cavităţii în formă de fantă transversală pe direcţia locală a polarizaţiei) şi sînt desenate liniile cîmpului propriu $\overline{E}'_{p_{fantă}\perp\overline{P}}$.

Din punctul de vedere al cîmpului sarcinilor de polarizaţie, perturbaţia introdusă prin practicarea fantei, este — deci — maximă. Se obţine:

$$\overline{D}/\varepsilon_0=\overline{E}_{fantă\perp P}=\overline{E}'+\overline{E}'_{p\ fantă\perp\overline{P}}=\overline{E}'+\overline{P}/\varepsilon_0. \tag{5.11}$$

Inducţia electrică $\overline{D}$ este o mărime primitivă. O mărime derivată de mare importanţă practică este *fluxul electric* Ψ, definit cu ajutorul valorilor pe care inducţia electrică le ia în punctele unei suprafeţe S (deschisă sau închisă), prin integrala de suprafaţă:

$$\boxed{\Psi_S=\iint_S\overline{D}\cdot\overline{dA}=\iint_S D\cdot dA\cdot\cos\alpha} \qquad [\alpha=\sphericalangle(\overline{D},\ \overline{dA})]. \tag{5.12}$$

Din (5.9) şi (5.11) se constată că în vid (aşa cum cerea ultima condiţie formulată în § 5.1) inducţia electrică diferă de intensitatea cîmpului electric numai printr-un factor — constantă universală:

$$\overline{D}_v=\varepsilon_0\overline{E}_v, \quad \text{iar} \quad \Psi=\iint_S\varepsilon_0\overline{E}_v\cdot\overline{dA}. \tag{5.13}$$

Ţinînd seama de teorema lui Gauss (3.14), se observă imediat că în sistemul MKSA raţionalizat fluxul electric se măsoară în coulombi (C), iar inducţia electrică în coulombi pe metru pătrat (C/m^2).

Scanned with OKEN Scanner

5.4. Legătura dintre inducție, intensitate și polarizație

Relațiile (5.7) și (5.12) exprimă intensitatea cîmpului electric și inducția electrică în funcție de $\overline{E}'$ și $\overline{P}$. Eliminînd pe $\overline{E}'$ între ele rezultă o relație între inducția electrică, intensitatea cîmpului electric și polarizația electrică, valabilă în fiecare punct al unui corp polarizat:

$$\overline{D}=\varepsilon_0\overline{E}+\overline{P}. \tag{5.14}$$

Această relație, demonstrată aici într-un caz particular cu mijloace specifice electrostaticii, se verifică în cazurile cele mai generale și se numește *legea legăturii dintre inducție, intensitate și polarizație în cîmpul electric* (v. și par. 6.3). Alături de (5.7) ea permite să se exprime local „mărimea de calcul" $\overline{E}'$ și polarizația $\overline{P}$ în funcție de mărimile de stare locală ale cîmpului $\overline{E}$ și $\overline{D}$:

$$\overline{E}'=\overline{E},\quad \overline{P}=\overline{D}-\varepsilon_0\overline{E}. \tag{5.15}$$

Cu (5.5) și (5.4) exprimarea cîmpului din vidul oricărei cavități date în funcție de $\overline{E}$ și $\overline{D}$, este asigurată — așa cum cerea penultima condiție formulată în par. 5.1.

5.5. Intensitatea cîmpului electric imprimat $\overline{E}_i$

Se constată experimental că, la atingerea stării de echilibru electrostatic, intensitatea cîmpului electric se anulează în interiorul conductoarelor omogene sau neaccelerate și ia anumite valori, independente de cîmpul electric exterior în care este plasat conductorul și determinate numai de starea fizico-chimică locală și de natura conductorului, în conductoarele neomogene sau accelerate. Valoarea pe care o ia intensitatea cîmpului electric într-un punct din interiorul unui conductor la atingerea stării de echilibru electrostatic constituie deci o proprietate a materialului respectiv, funcție de condițiile fizico-chimice *neelectrice* locale: temperatură, concentrație etc. Această proprietate se caracterizează cu ajutorul mărimii vectoriale de material numită *intensitatea cîmpului electric imprimat*, $\overline{E}_i$ (numită și intensitatea cîmpului electric străin sau intensitatea cîmpului electromotor), definită macroscopic de valoarea cu semn schimbat a intensității cîmpului electric care se stabilește în conductori la atingerea stării de echilibru electrostatic:

$$\overline{E}_i=-(\overline{E})_{\text{echilibru electrostatic}}. \tag{5.16}$$

Conform celor precedente, în conductoare omogene și neaccelerate $\overline{E}_i=0$, iar în conductori neomogeni și accelerați $\overline{E}_i$ este determinat de neomogenitățile fizico-chimice locale (ale constituției chimice, ale temperaturii etc.) sau de accelerația locală a corpului.

Scanned with OKEN Scanner

Din punct de vedere microscopic, interpretarea constatărilor experimentale menționate e imediată: în conductoare există particule libere încărcate cu sarcină electrică (electronii în metale, ionii în electroliți). Asupra unei astfel de particule, având sarcina q_m, se exercită o forță electrică $\overline{F}_{el}=\overline{E}_{qm}$ și o forță neelectrică $\overline{F}_{neel}$, datorită neomogenităților locale (de exemplu, datorită necompensării ciocnirilor dintre particula considerată și celelalte particule) sau accelerării corpului (forțe de inerție). Condiția macroscopică de echilibru electrostatic, adică de lipsă a unui curent electric, se exprimă microscopic prin condiția *statistică* de lipsă a unei mișcări ordonate a particulelor, adică de anulare a valorii medii (notate cu semnul ~ deasupra) a forței rezultante exercitate asupra unei particule:

$$\tilde{\overline{F}}_{el}+\tilde{\overline{F}}_{neel}=0 \text{ sau } q_m\tilde{\overline{E}}+\tilde{\overline{F}}_{neel}=0 \tag{5.17}$$

sau, împărțind cu q_m

$$\tilde{\overline{E}}+\tilde{\overline{F}}_{neel}/q_m=0, \text{ sau } \tilde{\overline{E}}+\tilde{\overline{E}}_i=0 \text{ dacă notăm } \tilde{\overline{E}}_i=\frac{\tilde{\overline{F}}_{neel}}{q_m} \tag{5.18}$$

Microscopic, intensitatea cîmpului electric imprimat e deci intensitatea cîmpului electric echivalentă cu forța neelectrică medie ce se exercită asupra unei particule încărcate libere dintr-un conductor.

6. Relațiile fundamentale ale electrostaticii

În cele ce urmează se vor prezenta succesiv relațiile fundamentale ale electrostaticii, dintre care unele sînt legi generale (în care nu apar mărimi de material), altele sînt legi de material și altele teoreme generale (cazuri particulare ale unor legi ce se vor da la electrocinetică sau la electrodinamică).

Aceste relații fundamentale sînt: legea conservării sarcinii; legea legăturii dintre inducție, intensitate și polarizație; legea polarizației temporare; legea fluxului electric; teorema potențialului electrostatic; condiția de echilibru electrostatic.

Unele dintre aceste relații au fost enunțate în paragrafele anterioare (eventual sub o formă particulară), iar altele vor fi enunțate în forma cea mai generală ulterior. În acest paragraf ele sînt reunite pentru a avea o privire unitară asupra fenomenelor electrostatice.

6.1. Legea conservării sarcinii unui corp izolat

Dacă un corp este *izolat electric*, suma sarcinilor lui electrice (adevărate) este constantă:

$$\boxed{\Sigma q=q=\text{const.}} \tag{6.1}$$

Într-o formă mai generală această lege va fi enunțată în electrocinetică (par. 12.2).

6.2. Legea legăturii dintre $\bar{D}$, $\bar{E}$ și $\bar{P}$.

În fiecare moment și în orice punct al unui corp inducția electrică e numeric egală cu suma dintre intensitatea cîmpului electric multiplicată cu permitivitatea vidului și polarizația electrică:

$$\boxed{\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}+\bar{P}.} \tag{6.2}$$

Această lege generală, stabilită într-un caz particular în par. 5.4, este exprimată aici în unități raționalizate. Din ea rezultă că vectorii $\bar{D}$ și $\bar{E}$ sînt paraleli numai dacă $\bar{P}$ și $\bar{E}$ sînt paraleli, ceea ce are loc în materiale izotrope și liniare.

6.3. Legea polarizației electrice temporare

La 4.5.1. relația (4.36) s-a enunțat această lege de material, valabilă pentru materialele dielectrice liniare și izotrope:

$$\boxed{\bar{P}_{temporară}=\varepsilon_0\chi_e\bar{E}} \tag{4.36}$$

în care χ_e este o mărime de material numită susceptivitate electrică (dependentă de natura materialului, temperatură etc.). Practic, la materiale fără polarizație permanentă, această lege se folosește în combinație cu legea legăturii (6.2) sub forma:

$$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}+\bar{P}=\varepsilon_0\bar{E}+\varepsilon_0\chi_e\bar{E}=\varepsilon_0(1+\chi_e)\bar{E}$$

sau

$$\boxed{\bar{D}=\varepsilon\bar{E}} \tag{4.36}$$

în care ε este o mărime de material numită *permitivitate* și care depinde de natura materialului, de temperatură etc. și are expresia:

$$\varepsilon=\varepsilon_0(1+\chi_e)=\varepsilon_0\varepsilon_r \tag{6.4}$$

cu $\varepsilon_r=1+\chi_e$, o mărime de material adimensională numită *permitivitate relativă* (sau constantă dielectrică).

În tabela 6.1 se dau cîteva valori ale permitivității relative ε_r pentru cîteva materiale izolante importante în tehnică.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 6.1

Denumirea materialului		Denumirea materialului	
Aer la 760 mm Hg și 0°C	1,0006	Mică	4,5...7,5
Apă distilată	80 ...81	Parafină	1,9...2,3
Bachelită	4,5... 5,5	Porțelan	5,5...8
Cauciuc	2,6... 3	Preșpan	3,0...5,0
Izolația cablurilor telefonice (hîrtie, aer)	1,6... 2	Pertinax	3,5...7,0
		Polistirol	2,3
Izolația cablurilor pentru transmisiunea energiei electrice (hîrtie, ulei)	3 ... 4,3	Sticlă	5 ...10
		Sticlă de cuarț	3,2...4,2
Lemn uscat	2,5... 5,0	Șelac	2,9...3,7
		Ulei de transformator	2,2...2,5

La materialele feroelectrice (de exemplu la titanatul de bariu), în anumite condiții de cîmp electric și de temperatură, ε_r poate atinge valori foarte mari (cîteva zeci de mii).

6.4. Legea fluxului electric

6.4.1. **Forma integrală a legii fluxului electric.** O lege generală, în care intervine fluxul inducției electrice sau *fluxul electric* definit pentru o suprafață oarecare de ralația:

$$\Psi_s = \iint_s \overline{D} \cdot \overline{dA} \tag{6.5}$$

are următorul enunț: Fluxul electric printr-o suprafață închisă este proporțional cu sarcina electrică localizată în interiorul acelei suprafețe (în unități raționalizate, fluxul electric este numeric egal cu sarcina electrică); fluxul electric nu depinde de sarcinile din exteriorul acelei suprafețe.

În consecință, fluxul electric care trece printr-o suprafață închisă Σ este:

$$\Psi_\Sigma = q_\Sigma \text{ sau } \boxed{\iint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{dA} = q_\Sigma} \tag{6.6}$$

Aceasta este *forma integrală* a legii fluxului electric; în această formă, normala care dă sensul elementului $\overline{dA}$ e normala exterioară și fluxul rezultă pozitiv cînd liniile de cîmp ies din suprafață și negativ în caz contrar.

Experiența verifică toate consecințele acestei legi nu numai în cîmpurile electrostatice, ci și în cele staționare și chiar în cele rapid variabile în timp.

Legea fluxului electric constituie generalizarea teoremei lui Gauss și se poate deduce, în electrostatică, din această teoremă, adică în fond din expresia cîmpului electric coulombian. Și anume, dacă se consideră cîmpul electrostatic al unor corpuri care au atît sarcină adevărată cît și de polarizație, se vede ușor că teorema lui Gauss (v. 3.14) ia forma:

$$\iint_\Sigma \overline{E} \cdot \overline{dA} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q_\Sigma + q_{P_\Sigma}), \tag{6.7}$$

care este valabilă pentru orice mediu, deoarece prin introducerea sarcinilor de polarizație $q_{P\Sigma}$ se ține seama și de cîmpul produs de polarizația dielectricilor.

Relația (6.7) se mai poate scrie ținînd seama de expresia (4.25) a sarcinii de polarizație:

$$\iint_{\Sigma} \overline{E}\cdot d\overline{A}=\frac{1}{\varepsilon_0}q_{\Sigma}-\frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{\Sigma}\overline{P}\cdot d\overline{A} \tag{6.8}$$

sau

$$\iint_{\Sigma}\left(\overline{E}+\frac{1}{\varepsilon_0}\overline{P}\right)d\overline{A}=\frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon_0}. \tag{6.9}$$

Multiplicînd ambii membri ai ecuației cu ε_0 se obține:

$$\iint_{\Sigma}(\varepsilon_0\overline{E}+\overline{P})\,\overline{dA}=q_{\Sigma} \tag{6.10}$$

sau, conform rel. (5.10):

$\iint_{\Sigma}\overline{D}\cdot\overline{dA}=q_{\Sigma}$, ceea ce reprezintă legea fluxului electric (v. rel. 6.6).

6.4.2. **Forma locală a legii.** Pentru a obține precizarea relațiilor care au loc în vecinătatea unui punct dat, se consideră sarcina electrică adevărată repartizată cu densitatea de volum ρ_v și se aplică teorema Gauss-Ostrogradski termenului:

$$\iint_{\Sigma}\overline{D}\cdot\overline{dA}=\iiint_{V_{\Sigma}}\operatorname{div}\,\overline{D}\,dv \tag{6.11}$$

Pe de altă parte:

$$q_{\Sigma}=\iiint_{V_{\Sigma}}\rho_v dv \tag{6.12}$$

prin definiția densității de sarcină. Egalînd expresiile precedente, conform cu (6.6) și observînd că egalitatea trebuie să aibă loc oricare ar fi volumul v_{Σ}, rezultă:

$$\boxed{\operatorname{div}\,\overline{D}=\rho_v} \tag{6.13}$$

adică *forma locală* a legii fluxului electric.

În coordonate carteziene:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho_v(x,y,z). \tag{6.13'}$$

Dacă sarcina adevărată este repartizată cu densitatea de suprafață ρ_s, se folosește expresia divergenței de suprafață și rezultă pe orice suprafață de discontinuitate:

$$\rho_s=\operatorname{div}_s\overline{D}=\overline{u}_{12}(\overline{D}_2-\overline{D}_1) \tag{6.14}$$

(această proprietate va fi reluată în paragraful 6.8).

6.4.3. **Observații asupra trasării liniilor de cîmp electric.** După determinarea vectorului inducției electrice în fiecare punct, se pot trasa o serie de linii astfel încît tangentele în orice punct la aceste linii să coincidă cu direcția vectorului $\bar{D}$. Acestea sînt liniile inducției electrice. Totalitatea liniilor care trec prin toate punctele unui mic contur închis formează un tub de flux electric. Liniile inducției electrice încep în regiunile unde există sarcini adevărate pozitive și se sfîrșesc în regiunile unde există sarcini adevărate negative.

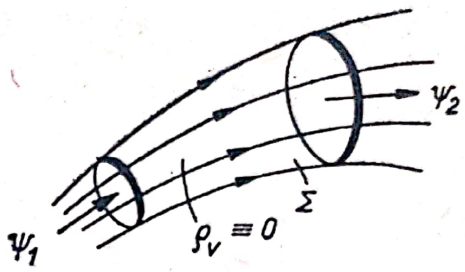


Fig. 6.1.

Aplicînd legea fluxului electric la o suprafață Σ care limitează o porțiune de tub de flux, se obține printr-o demonstrație analogă celei de la par. 3.2.3 următorul rezultat:

Fluxul vectorului inducție electrică (fluxul electric) prin orice secțiune transversală a tubului rămîne constant, dacă în interiorul tubului nu există sarcini adevărate (fig. 6.1). Dacă Ψ_1 este fluxul care intră în tub și Ψ_2 cel care iese, se poate scrie:

$$\Psi_1=\Psi_2=\text{const.}$$

Se poate introduce noțiunea de *tub-unitate*, a cărui secțiune transversală este străbătută de un flux egal cu unitatea de flux. *Se convine ca fiecare tub-unitate să fie reprezentat în spațiu printr-o linie de cîmp a inducției electrice, care să coincidă cu axa tubului.* Cu această convenție de reprezentare a liniilor de cîmp, fluxul printr-o suprafață oarecare va fi egal cu numărul tuburilor-unitate care intersectează suprafața, ceea ce dă o reprezentare foarte sugestivă.[1] Valoarea absolută a vectorului $\bar{D}$ poate fi dedusă prin această reprezentare, deoarece este egală cu numărul de tuburi-unitate care trec prin unitatea de suprafață transversală.

Liniile inducției electrice străbat continuu regiunile corpurilor unde se află sarcini de polarizație (de exemplu, suprafețele de separație a doi dielectrici, unde numai se refractă, par. 6.8). Spre deosebire de acestea, liniile intensității cîmpului electric încep și se termină nu numai unde există sarcini adevărate, ci și acolo unde există sarcini de polarizație (de exemplu, la suprafețele de separație a doi dielectrici), deoarece, conform cu (6.7), intensitatea cîmpului electric admite ca surse ambele feluri de sarcini. De aceea, cele două familii de linii de cîmp prezintă deosebiri esențiale.

6.4.4. **Teorema lui Coulomb într-un dielectric omogen și liniar.** În vid, teorema lui Coulomb este dată de relația (2.19). Dacă în loc de vid mediul este un dielectric de permitivitate ε, se poate demonstra cu ajutorul legii

[1] Din acest motiv, în expunerile elementare, fluxul este definit ca egal cu numărul liniilor de cîmp ce străbat o suprafață dată. Corect trebuie spus numărul liniilor unitate, sau mai bine numărul tuburilor-unitate.

fluxului electric că forța exercitată de un corp punctiform, cu sarcina q_1, asupra unui corp punctiform, încărcat cu sarcina q_2, așezat la distanța R_{12}, este (v. fig. 6.2.):

$$F_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q_1q_2}{R_{12}^2}\bar{u}_{12}. \tag{6.15}$$

Anume, în analogie cu situația din vid, liniile de cîmp ale unui corp punctual încărcat cu sarcina q sînt radiale și dirijate dinspre corp, respectiv spre corp, după cum sarcina considerată este pozitivă, respectiv negativă. Aplicînd legea fluxului electric (fig. 6.3) pentru suprafața Σ a unei sfere de rază R_{12}, care înconjură micul corp încărcat cu sarcina q_1 așezat în centrul ei, se obține conform relațiilor (6.6) și (6.3) (știind că mediul este omogen și deci ε este constant):

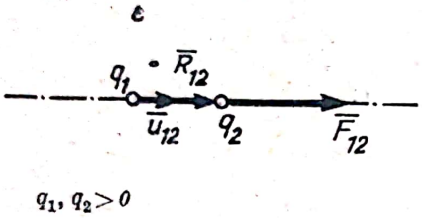


Fig. 6.2.

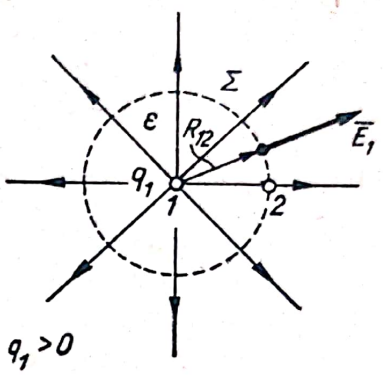


Fig. 6.3.

$$\iint_{\Sigma}\overline{D}_1\,\overline{dA}=\varepsilon\iint_{\Sigma}\overline{E}_1\,\overline{dA}=q_1. \tag{6.16}$$

Datorită simetriei, E_1 este același în orice punct la distanța R_{12} de corpul punctiform și are direcția radială. Deci:

$$\iint_{\Sigma}\overline{E}_1\overline{dA}=\iint_{\Sigma}E_1dA=E_1\iint_{\Sigma}dA=E_1 4\pi R_{12}^2 \tag{6.17}$$

Din relațiile (6.16) și (6.17) se obține:

$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q_1}{R_{12}^2} \tag{6.18}$$

sau

$$\overline{E}_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q_1}{R_{12}^3}\overline{R}_{12} \tag{6.19}$$

iar cu $\overline{F}_{12}=\overline{E}_1q_2$ rezultă relația (6.15).

Se observă din relațiile (6.19) și (6.3) că intensitatea cîmpului electric produsă într-un dielectric liniar și omogen de permitivitate ε este de $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}=\varepsilon_r$ ori mai mică decît intensitatea cîmpului produsă în vid de același sistem de sarcini:

$$\overline{E}=\frac{\overline{E}_v}{\varepsilon_r}=\frac{\varepsilon_0\overline{E}_v}{\varepsilon}. \tag{6.20}$$

Concluzie: Toate formulele determinate pentru vid sînt valabile într-un mediu liniar și omogen dacă se înlocuiește ε_0 cu ε.

Micșorarea intensității cîmpului într-un mediu de permitivitate ε se explică prin apariția pe suprafața corpului a unor sarcini de polarizație (ale mediului) ce neutralizează parțial sarcinile proprii ale corpului. Se observă că din relațiile (6.7) și (6.3) se poate deduce (într-un mediu liniar și omogen):

$$q_\Sigma + q_x = \varepsilon_0 \iint_\Sigma \bar{E}\, \overline{dA} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \iint_\Sigma \bar{D}\, \overline{dA} = \frac{q_x}{\varepsilon_r}. \tag{6.21}$$

6.5. Teorema potențialului electrostatic

6.5.1. Forma integrală a teoremei. Se arată experimental că un cîmp electrostatic odată stabilit se menține fără a fi nevoie de vreun aport de energie din exterior. Din principiul de conservare a energiei rezultă în acest caz următoarea proprietate: în cîmpurile electrostatice nu se poate obține (nici consuma) lucru mecanic prin efectuarea unui ciclu de transformare reversibil.

Dacă ciclul de transformare reversibil consistă în purtarea pe o curbă *închisă* Γ, oarecare, a unui corp de probă încărcat cu sarcina q, mișcarea acestui corp fiind destul de înceată pentru ca fiecare din stările lui succesive să fie considerată electrostatică (fig. 6.4.), lucrul mecanic efectuat de forța electrică $\bar{F}$, care se exercită asupra micului corp de probă, are expresia

$$L = \oint_\Gamma \bar{F} \cdot d\bar{s} = q \oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{s} = W_{in} - W_{fin}, \tag{6.22}$$

în care W_{in} este energia cîmpului în starea inițială, iar W_{fin} — în starea finală.

Deoarece $W_{in} = W_{fin}$, cînd mișcarea are loc pe curba închisă Γ cu revenirea la punctul inițial, rezultă: *circulația intensității cîmpului electric este nulă pentru orice curbă închisă*:

$$\boxed{\oint_\Gamma \bar{E}\, d\bar{s} = 0.} \tag{6.23}$$

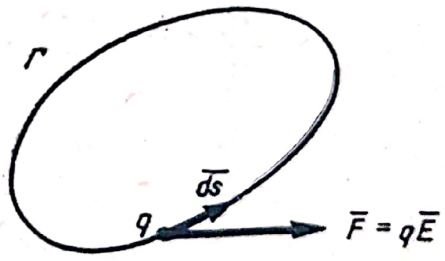


Fig. 6.4.

Aceasta este *forma integrală cea mai generală* a teoremei potențialului electrostatic. Ea se deduce și din legea inducției electromagnetice (v. Electrodinamica) ca teoremă generală valabilă în toate cîmpurile electrice staționare în care nu există fluxuri magnetice variabile în timp. Rezultă următoarele *consecințe*:

a) *În cîmpul electrostatic nu există linii de cîmp închise*, deoarece circulația vectorului $\bar{E}$ este nulă pe orice curbă închisă. Presupunînd că ar exista linii de cîmp închise (v. fig. 6.5), ar rezulta, aplicînd relația 6.23, acestor curbe:

$\oint_\Gamma \bar{E} \cdot \overline{ds} = \oint_\Gamma |\bar{E}| \cdot |\overline{ds}| = 0$, deoarece $\bar{E} \,||\, \overline{ds}$, ceea ce este absurd, deoarece o sumă de termeni pozitivi nu poate fi nulă. În concluzie, liniile de cîmp sînt

deschise. Ele încep acolo unde sînt sarcini pozitive și se sfîrșesc acolo unde sînt sarcini negative. (v. și fig. 3.2).

b) *În cîmpul electrostatic tensiunea electrică între două puncte nu depinde de drum.* În adevăr, considerînd figura 6.6, se poate scrie, integrînd pe conturul punctat în sensul săgeții:

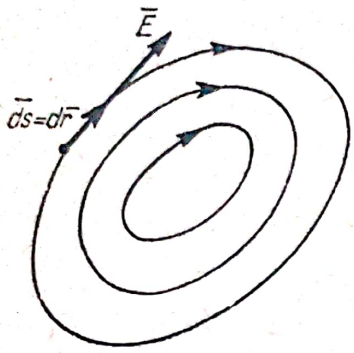


Fig. 6.5.

$$\oint_{\Gamma} \bar{E}\,\bar{ds} = \int_{1,(C_1),2,(C_2),1} \bar{E}\cdot\bar{ds} = \int_{1\frac{}{(C_1)}2} \bar{E}\,\bar{ds} + \int_{2\frac{}{(C_2)}1} \bar{E}\,\bar{ds} = 0$$

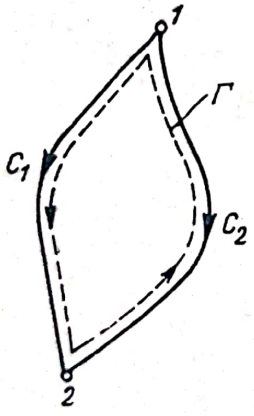
conform relației (6.23), sau:

$$U_{12} = \int_{1\frac{}{(C_1)}2} \bar{E}\cdot\bar{ds} = -\int_{2\frac{}{(C_2)}1} \bar{E}\cdot\bar{ds} = \int_{1\frac{}{(C_2)}2} \bar{E}\,\bar{ds}. \quad (6.24)$$

c) Deoarece în cîmpul electrostatic este îndeplinită condiția ca integrala de linie între două puncte, a vectorului $\bar{E}$, să fie independentă de curba pe care se calculează, *se poate defini o funcție scalară de punct numită potențial* cu următoarea regulă de calcul:

$$\boxed{V_P = V_{P_0} - \int_{P_0}^{P} \bar{E}\cdot d\bar{s}} \quad (6.25)$$

cu $V_P = V(\bar{r})$ și $V_{P_0} = V_0 = V(\bar{r}_0)$ arbitrar, drumul de integrare fiind arbitrar.



F g. 6.6.

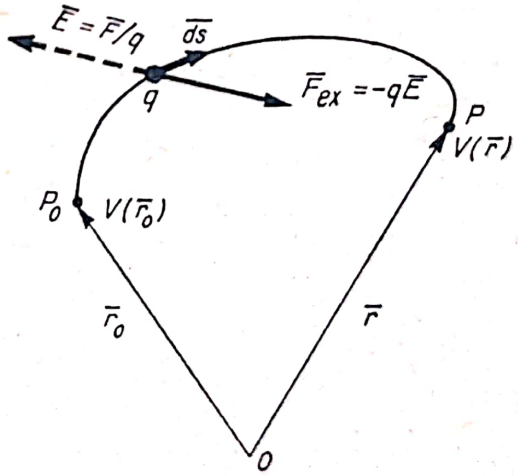


Fig. 6.7.

Mai rezultă:

$$dV = -\bar{E}\cdot\bar{ds} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz). \quad (6.26)$$

Relația (6.25) se mai poate exprima și în felul următor (fig. 6.7):

$$V(\bar{r}) = V(\bar{r}_0) - \int \bar{E}\cdot\bar{ds} \quad (6.27)$$

sau

$$V(\bar{r}) = V(\bar{r}_0) + \frac{1}{q}\int \bar{F}_{ex}\cdot\bar{ds} \quad (6.28)$$

în care $\bar{F}_{ex}=-q\bar{E}$ este forța ce trebuie aplicată din exterior pentru a învinge forța electrică $q\bar{E}$ și pentru a aduce (oricît de lent) micul corp încărcat cu sarcina q din punctul de referință (P_0) în punctul dat (P). Relația (6.29) se mai poate scrie:

$$V(\bar{r})=V(\bar{r}_0)+\frac{L_{ex(\bar{r}_0\to\bar{r})}}{q} \tag{6.29}$$

și se obține următoarea interpretare pentru potențial:

Potențialul într-un punct (P) este egal cu potențialul din alt punct (P_0) luat ca referință, la care se adaugă lucrul mecanic ce trebuie cheltuit din exterior pentru a muta o sarcină unitate din punctul de referință în punctul considerat. Adesea punctul de referință se ia la infinit, iar potențialul lui se ia nul; dacă o astfel de alegere duce la valori infinite pentru potențial, punctul de referință nu poate fi luat la infinit.

d) *În cîmpul electrostatic tensiunea electrică între două puncte este egală cu diferența de potențial* dintre aceste puncte:

$$U_{12}=\int_1^2 \bar{E}\cdot d\bar{s}=-\int_1^2 dV=V_1-V_2. \tag{6 30}$$

6.5.2. **Formele locale ale teoremei potențialului electrostatic.** Din expresia dată de relația (6.26) se deduce o formă locală a teoremei

$$\bar{E}=-\operatorname{grad} V=-\left(\bar{i}\frac{\partial V}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial V}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\nabla V \tag{6.31}$$

iar componentele vectorului $\bar{E}$ sînt:

$$E_x=-\frac{\partial V}{\partial x};\quad E_y=-\frac{\partial V}{\partial y};\quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{6.32}$$

La o repartiție dată a potențialului, intensitatea cîmpului electric este deci univoc determinată.

Teorema potențialului electrostatic se poate exprima local și prin ecuații cu derivate parțiale, satisfăcute de componentele vectorului cîmp electric $\bar{E}$ și exprimate sub formă vectorială cu ajutorul rotorului lui $\bar{E}$.

După cum se știe din analiza vectorială (v. și par. 19.4), *expresia rotorului unui vector* $\bar{G}$ este:

$$\operatorname{rot}\bar{G}=\bar{u}_n\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\oint_\Gamma \bar{G}\cdot d\bar{s}}{\Delta A} \tag{6.33}$$

în care $\bar{u}_n$ este versorul după care trebuie orientat local vectorul arie al curbei Γ pentru ca valoarea limitei să fie maximă.

Denumirea de rotor își are originea în mecanica fluidelor: dacă vectorul cîmp este viteza unui fluid, rotorul vitezei este proporțional cu viteza unghiulară de rotație a unei particule de fluid.

Expresia rotorului se mai poate scrie simbolic cu ajutorul operatorului nabla și în coordonate carteziene:

$$\operatorname{rot}\bar{G}=\nabla\times\bar{G}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}$$

sau

$$\text{rot } \bar{G}=\bar{i}\left(\frac{\partial G_z}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial z}\right)+\bar{j}\left(\frac{\partial G_x}{\partial z}-\frac{\partial G_z}{\partial x}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial G_y}{\partial x}-\frac{\partial G_x}{\partial y}\right) \tag{6.34}$$

Conform *teoremei lui Stokes* (v. și par, 19.4) circulația vectorului cîmp $\bar{G}$ de-a lungul oricărei curbe închise Γ este egală cu fluxul rotorului lui prin orice suprafață S_Γ mărginită de curbă (v. fig. 6.8):

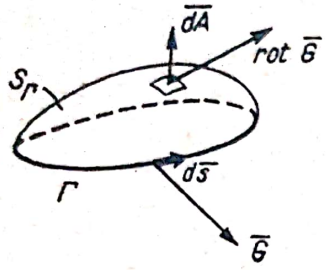


Fig. 6.8.

$$\oint_\Gamma \bar{G}\cdot\overline{ds}=\iint_{S_\Gamma}\text{rot } \bar{G}\cdot\overline{dA}. \tag{6.35}$$

Dacă se calculează conform relației (6.34) rot $\bar{E}$, în care $\bar{E}=-\text{grad } V$, se obține:

$$\text{rot } \bar{E}=0, \tag{6.36}$$

relație care este o altă formă locală a teoremei potențialului.

Același rezultat se obține aplicînd teorema lui Stokes (6.35) la relația (6.23). El reprezintă o proprietate generală: un cîmp care derivă dintr-un potențial într-un anumit domeniu are rotorul intensității cîmpului nul în orice punct al domeniului.

6.5.3. **Calculul potențialului unei sarcini punctuale într-un mediu omogen.** Dacă originea sistemului de coordonate se consideră în punctul în care se găsește sarcina punctuală, expresia dată de relația (6.27) se scrie:

$$V(\bar{R})=V(\bar{R}_0)-\int_{\bar{R}_0}^{\bar{R}}\bar{E}\cdot\overline{ds}$$

$$V(\bar{R})=V(\bar{R}_0)-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\bar{R}_0}^{\bar{R}} q\frac{\bar{R}\cdot\overline{ds}}{R^3} \tag{6.37}$$

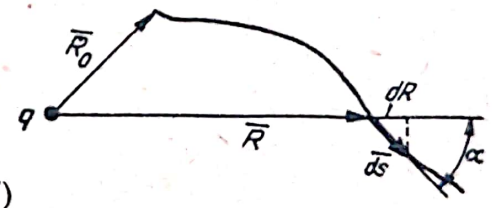


Fig. 6.9.

în care s-a pus $\bar{E}$ dat de relația (6.19). Deoarece (v. fig. 6.9):

$$\bar{R}\,\overline{ds}=R\,ds\cos\alpha=R\,dR$$

și dacă potențialul punctului de referință se ia egal cu zero:

$V(\bar{R}_0)=0$, expresia (6.37) devine:

$$V=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}q\int_{R_0}^{R}\frac{R\,dR}{R^3}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}q\int_{R_0}^{R}d\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)$$

De obicei, se ia $R_0=\infty$ [și deci $V(\infty)=0$] și rezultă:

$$\boxed{V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{q}{R}} \tag{6.38}$$

Pentru repartiții de volum, de suprafață, de linie, ale sarcinii electrice, precum și în prezența sarcinilor punctuale într-un mediu omogen și izotrop de permitivitate ε, care nu are polarizație permanentă, potențialul:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\iiint\frac{\rho_v}{R}\,dv+\iint\frac{\rho_s}{R}\,dA+\int\frac{\rho_l}{R}\,ds+\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{R_i}\right] \qquad (6.39)$$

are o expresie identică cu cea din relația (3.34) în care ε_0 se înlocuiește cu ε.

6.6. Condiția de echilibru electrostatic

6.6.1. Condiția de echilibru electrostatic în conductoare omogene. În cursul paragrafelor anterioare s-a arătat că:

— într-un izolant, particulele elementare încărcate cu sarcini electrice sînt legate cvasielastic de anumite poziții fixe;

— într-un conductor, cel puțin o parte din particulele elementare sînt libere, ele putîndu-se deplasa continuu și ordonat. Starea electrostatică este starea în care e îndeplinită condiția de a nu avea o mișcare ordonată a particulelor și deci nici forță rezultantă medie exercitată asupra lor. A rezultat *condiția de echilibru electrostatic* (5.18):

$$\boxed{\overline{E}+\overline{E}_i=0} \qquad (6.40,)$$

Cu anumite excepții, conductoarele sînt omogene. În acest caz, $\overline{E}_i=0$, și condiția de echilibru electrostatic 6.40 devine:

$$\boxed{\overline{E}=0} \qquad (6.41)$$

Consecințele acestor condiții pentru conductoare omogene sînt:

a) Toate punctele din interiorul conductorului au același potențial. În adevăr, rezultă din relația (6.30):

$$U_{12}=V_1-V_2=\int_1^2\overline{E}\,\overline{ds}=0 \qquad (6.42')$$

între oricare două puncte (1 și 2) din interiorul conductorului, deoarece $\overline{E}=0$.

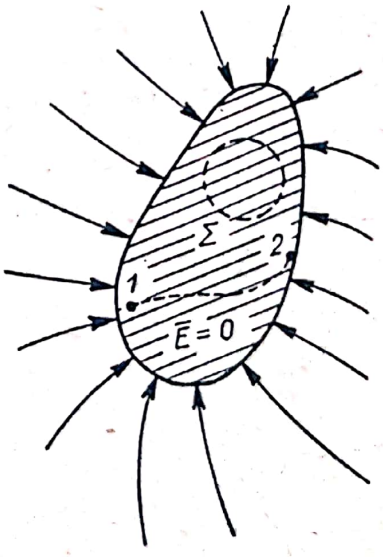


Fig. 6.10

În consecință, și suprafața conductorului este o suprafață echipotențială (fig. 6.10), iar liniile cîmpului din exterior *sînt perpendiculare* pe această suprafață.

b) Sarcina electrică este repartizată superficial. Sarcina din interiorul conductorului este nulă. În adevăr, orice suprafață închisă Σ (fig. 6.10) situată

în interiorul corpului, nu poate avea sarcină în cuprinsul ei ($q_\Sigma \equiv 0$) deoarece din $\overline{E}=0$ rezultă:

$$\iint_\Sigma \overline{E}\cdot d\overline{A}=\frac{q_\Sigma}{\varepsilon}=0.$$

6.6.2. **Influența electrostatică.** Se numește *influență electrostatică* (sau inducție electrostatică) fenomenul de încărcare superficială cu sarcini de nume diferite a diferitelor porțiuni ale unui conductor inițial neîncărcat, sub acțiunea unui cîmp electrostatic exterior. Încărcarea se face astfel încît cîmpul electric propriu al repartiției de sarcină astfel obținută să compenseze exact cîmpul electric exterior, în interiorul conductorului, pentru a fi satisfăcută condiția de echilibru electrostatic în cîmpul rezultant: $\overline{E}=\overline{E}_{exterior}+\overline{E}_{propriu}=0$.

Microscopic, fenomenul se explică prin faptul că, sub acțiunea cîmpului exterior, electronii liberi (în cazul unui metal, de exemplu) se deplasează spre suprafața conductorului. Se creează astfel o repartiție superficială de sarcină și deplasarea electronilor continuă pînă cînd cîmpul propriu al acestei repartiții echilibrează acțiunea cîmpului exterior și se realizează echilibrul electrostatic. Practic, procesul tranzitoriu de separare a sarcinilor de nume contrare prin influență electrostatică durează extrem de puțin (sub 10^{-12} s, în cazul metalelor). Corpul electrizat pe această cale se numește *electrizat prin influență* și dacă este secționat în două părți izolate una de alta, cele două părți rămîn electrizate și după suprimarea cîmpului exterior, dacă fiecare dintre ele avea exces de sarcină de un anumit nume (pozitivă sau negativă) în urma electrizării prin influență. Electrizarea prin influență este folosită mult în mașinile electrostatice.

6.6.3. **Efectul de ecran.** Liniile de cîmp din exteriorul unui conductor nu pătrund în interiorul unui gol existent în conductor.

O demonstrație simplă a acestui efect e următoarea: presupunem că în interiorul unui conductor există un gol (o cavitate) și că în acest gol (în care nu sînt sarcini) ar exista linii de cîmp. Aceste linii nu pot fi închise (conform raționamentului de la pct. 6.5.2), și deci pleacă dintr-un punct și ajung în alt punct al feței interioare a golului (fig. 6.11).

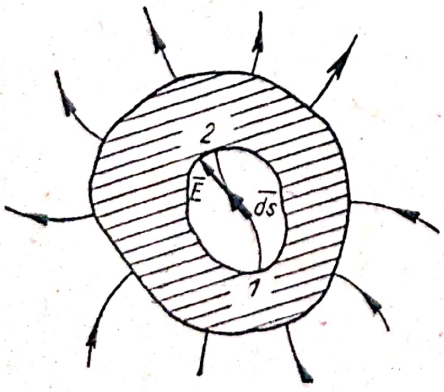


Fig. 6.11

Tensiunea în lungul unei astfel de linii de cîmp interioare ar fi:

$$U_{12}=\int_1^2 \overline{E}\cdot\overline{ds}=\int_1^2 |\overline{E}|\cdot|\overline{ds}|\geqslant 0.$$

Dar $U_{12}=V_1-V_2=0$ (v. 6.42); în consecință și $\overline{E}=0$ în fiecare punct din interior.

Dacă în cavitate ar exista sarcini electrice adevărate, cîmpurile din domeniile exterior și interior ar fi independente unul de altul, în sensul că orice modificare a configurației sarcinilor dintr-un domeniu nu ar afecta

cîmpul electric static din celălalt domeniu. Ecranarea este eficace (deși parțială), chiar în cazul cînd conductorul (ecranul) nu este o suprafață complet închisă, dar este legat la pămînt (v. fig. 6.12 unde C e un conductor încărcat, iar A zona ecranată de ecranul G).

6.6.4. **Principiul metalizării.** Se poate considera că o suprafață echipotențială este înlocuită cu o foiță foarte subțire metalică, fără ca prin aceasta cîmpul electric să fie perturbat. În adevăr, prin această înlocuire condiția de ortogonalitate a liniilor de cîmp pe suprafața considerată nu este afectată.

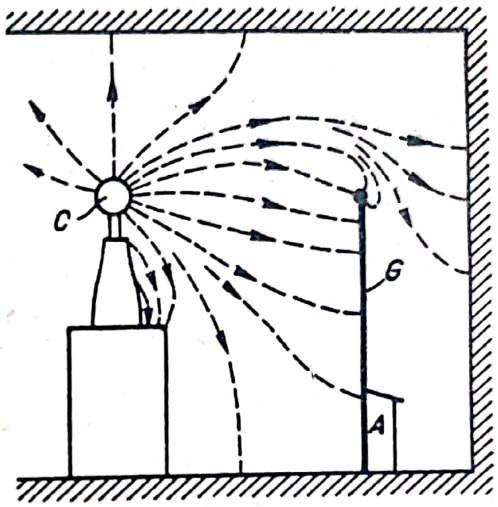


Fig. 6.12

6.6.5. **Observații.** *a*) Calitatea de izolant a unui material se poate pierde dacă intensitatea cîmpului electric din materialul considerat depășește o valoare limită care se numește *rigiditate dielectrică* E_d. Se dau mai jos cîteva valori pentru E_d al unor materiale izolante mai uzuale:

Preșpan	$E_d = 10 \ldots 100$ kV/cm;
Pertinax	$E_d = 100 \ldots 150$ kV/cm;
Porțelan	$E_d = 150 \ldots 250$ kV/cm;
Micanit	$E_d = 250 \ldots 350$ kV/cm;
Sticlă, mică	$E_d = 500 \ldots 600$ kV/cm.

Dacă $|\overline{E}| < E_d$ se menține echilibrul electrostatic în izolant. În caz contrar, izolantul se străpunge (este traversat de un curent electric).

Rigiditatea dielectrică *nu* este o *constantă* a materialului, ci depinde și de o serie întreagă de factori ca: umiditate, presiune, temperatură, capacitatea de cedare a căldurii de către epruveta de material în condițiile încercării, durata de aplicare a tensiunii electrice între electrozi.

b) Condiția de echilibru electrostatic e un caz particular al legii conducției electrice (legea lui Ohm), conform căreia, în cazul general, $\overline{E} + \overline{E}_i = \rho \overline{J} \neq 0$ unde ρ e rezistivitatea corpului, iar $\overline{J}$ densitatea de curent (v. par. 12.3).

6.7. Suprafețe de discontinuitate. Condiții de frontieră la suprafața de separație a doi dielectrici

6.7.1. **Conservarea componentelor normale ale inducției.** Din legea fluxului electric rezultă că valoarea componentelor normale ale inducției electrice în două puncte foarte apropiate situate de o parte și de alta a unei suprafețe de discontinuitate este aceeași, dacă suprafața nu este încărcată cu sarcină. Pentru a demonstra aceasta se aplică legea fluxului electric unei suprafețe închise Σ de forma unui mic cilindru plat, cu bazele ΔA și de înălțime foarte mică prin comparație cu dimensiunile bazelor (fig. 6.13).

Legea fluxului electric aplicată suprafeței închise are expresia:

$$\overline{D}_1 \overline{n}_{21} \Delta A + \overline{D}_2 \overline{n}_{12} \Delta A = \Delta q = \rho_s \Delta A,$$

în care ρ_s este densitatea de sarcină electrică pe suprafața de discontinuitate (s-a neglijat fluxul prin suprafața laterală cilindrică, infinit mică).

Dacă $\rho_s=0$, pe suprafața de separație, componentele după o direcție normală ale vectorului $\bar{D}$ rezultă egale:

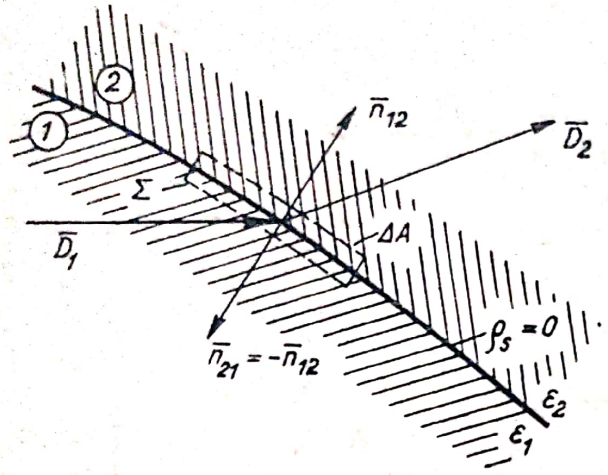


Fig. 6.13

$$\bar{n}_{12}(\bar{D}_2-\bar{D}_1)=0$$

sau

$$(D_n)_1=(D_n)_2. \qquad (6.42)$$

Componentele normale ale inducției electrice trec deci continuu prin orice suprafață de discontinuitate neîncărcată cu sarcină.

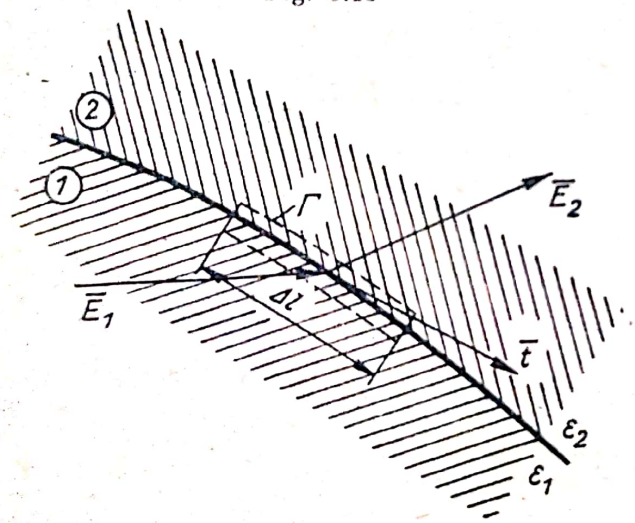


Fig. 6.14.

6.7.2. **Conservarea componentelor tangențiale ale intensității.** Din teorema potențialului rezultă că valoarea componentei tangențiale a lui $\bar{E}$ este aceeași pe ambele fețe ale suprafeței de discontinuitate. În adevăr, considerînd un mic contur Γ (fig. 6.14) și scriind integrala de linie a vectorului cîmp electric în lungul lui se obține:

$$\bar{E}_2\,\Delta l\,\bar{l}+\bar{E}_1\,\Delta l(-\bar{l})=0$$

(deoarece înălțimea micului drept-

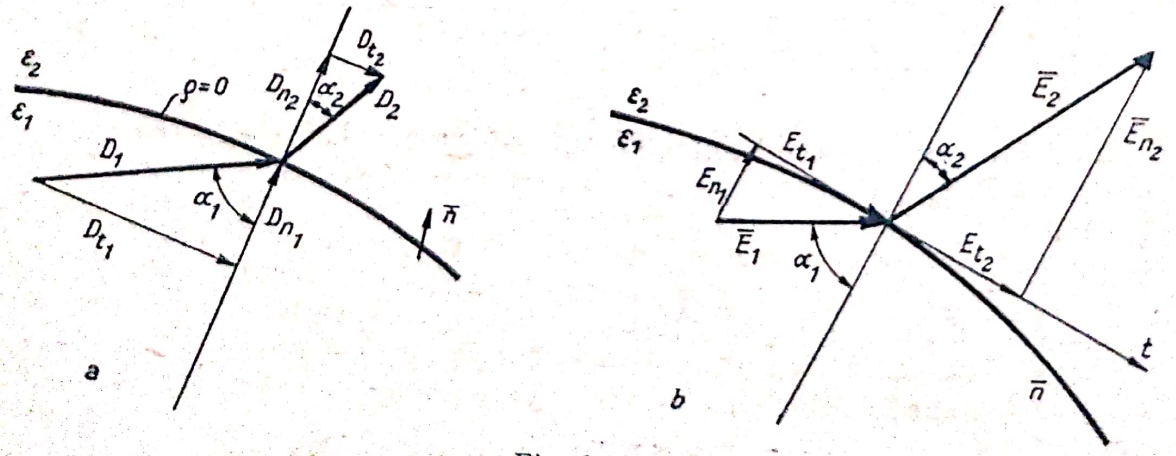


Fig. 6.15

unghi este infinit mică față de dimensiunea Δl a lui), adică:

$$\bar{l}(\bar{E}_2-\bar{E}_1)=0$$

sau

$$(E_t)_1=(E_t)_2 \tag{6.43}$$

cele două componente fiind raportate la aceeași tangentă de versor $\bar{l}$.

Componentele tangențiale ale intensității cîmpului electric trec deci continuu prin orice suprafață de discontinuitate.

Grafic, aceste proprietăți se pot reprezenta ca în figura 6.15 (*a* și *b*).

Relațiile (6.42) și (6.43) reprezintă *teoremele de conservare ale componentelor* vectorilor $\bar{D}$ și $\bar{E}$ la trecerea prin suprafețe de discontinuitate. Ele sînt în fond forme locale particulare ale legii fluxului electric și teoremei potențialului electrostatic.

6.7.3. **Teorema refracției liniilor de cîmp.** Din considerente geometrice (fig. 6.15) rezultă:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{D_{t_1}}{D_{n_1}}=\frac{\varepsilon_1 E_{t_1}}{D_{n_1}} \quad \text{și}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{D_{t_2}}{D_{n_2}}=\frac{\varepsilon_2 E_{t_2}}{D_{n_2}}$$

sau

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1 E_{t_1}}{D_{n_1}}\cdot\frac{D_{n_2}}{\varepsilon_2 E_{t_2}}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \tag{6.44}$$

ținînd seama de teoremele de conservare (6.41) și (6.43). Se obține relația:

$$\boxed{\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \tag{6.45}$$

care exprimă teorema refracției liniilor de cîmp:

La trecerea dintr-un mediu de permitivitate mai mică într-un mediu de permitivitate mai mare, liniile de cîmp electric (și de inducție electrică) se îndepărtează de normală (dacă liniile nu au fost normale pe suprafața de incidență), astfel încît raportul tangentelor unghiurilor făcute cu normala e egal cu raportul permitivităților.

7. Capacități

7.1. Unicitatea și superpoziția cîmpurilor electrostatice

Se consideră n conductoare omogene (cu $\bar{E}=0$ în interior, astfel încît suprafețele conductoarelor sînt suprafețe echipotențiale) și pămîntul (fig. 7.1). În spațiul dintre conductoare se presupune că nu există sarcini electrice adevărate (în dielectrici $\rho_e=0$). Se pot enunța teoremele următoare:

7.1.1. **Teorema unicității.** Cîmpul electrostatic al unui sistem de conductoare omogene situate într-un mediu izolant și liniar este complet determinat fie de sarcinile conductoarelor, fie de potențialele lor, fie de sarcinile a o parte din conductoare și de potențialele celorlalte conductoare. Nu se demonstrează aici această teoremă.

În cazul din figura 7.1, problema determinării cîmpului are o singură soluție, dacă se dau q_1, q_2 și q_3, sau V_1, V_2 și V_3, sau încă dacă se dau q_1, q_2 și V_3 etc. (presupunînd nul potențialul V_0 al pămîntului).

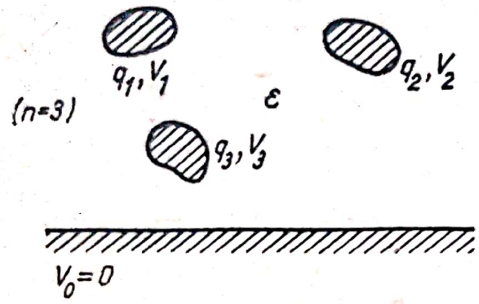


Fig. 7.1.

7.1.2. **Teorema superpoziției.** Cîmpul electrostatic produs de două sau mai multe distribuții de sarcină, în medii liniare, este egal cu suma cîmpurilor produse de fiecare distribuție în parte.

Această teoremă mai are următoarea formă: dacă sarcinile tuturor conductoarelor cresc de λ ori, potențialele conductoarelor respectiv potențialul fiecărui punct din spațiu, cresc de λ ori.

Valabilitatea acestei teoreme derivă din faptul că relațiile fundamentale ale cîmpului electrostatic sînt liniare (în medii liniare). Teorema superpoziției permite ca din soluții corespunzătoare unor cazuri simple să se obțină (prin superpoziție) soluții corespunzătoare pentru cazuri mai complicate.

În consecință, în cazul din figura 7.1, dacă există o distribuție de sarcini q_1'; q_2'; q_3' (și $V_0=0$), potențialul într-un punct oarecare va fi $V'(\bar{r})$, intensitatea cîmpului electric corespunzător $\bar{E}'(\bar{r})=-\text{grad } V'(\bar{r})$ și inducția electrică $\bar{D}'(r)=\varepsilon\bar{E}'(\bar{r})$.

Pentru o distribuție de sarcini diferită: q_1''; q_2''; q_3'' se va obține potențialul $V''(\bar{r})$; intensitatea cîmpului electric $\bar{E}''(\bar{r})=-\text{grad } V''(\bar{r})$; $D''(\bar{r})=\varepsilon\bar{E}''(\bar{r})$.

Dacă cele două distribuții există simultan $q_1=q_1'+q_1$; $q_2=q_2'+q_2''$; $q_3=q_3'+q_3''$ rezultă din teorema superpoziției că potențialul este $V(\bar{r})=V'(\bar{r})+V''(\bar{r})$; intensitatea cîmpului electric este $\bar{E}(\bar{r})=\bar{E}'(\bar{r})+\bar{E}''(\bar{r})$; inducția electrică este $\bar{D}(\bar{r})=\bar{D}'(\bar{r})+\bar{D}''(\bar{r})$.

Dacă s-ar considera o altă distribuție de sarcini:

$$q_1=\lambda q_1';\ q_2=\lambda q_2';\ q_3=\lambda q_3,$$

ar rezulta: $V(\bar{r})=\lambda V'(\bar{r})$; $\bar{E}(\bar{r})=\lambda\bar{E}'(\bar{r})$; $\bar{D}(\bar{r})=\lambda\bar{D}'(\bar{r})$.

Se va demonstra teorema superpoziției în cazul particular în care permitivitatea dielectricului este constantă $\varepsilon=\text{ct}$. Potențialul, rezultat din existența unei densități de suprafață de sarcină electrică (cazul conductorilor încărcați), este:

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint\frac{\rho_s\,dA}{R}\quad\text{conform relației (6.39).}$$

Dacă:

$$\rho_s=\rho_s'+\rho_s'',$$

potențialul se va putea scrie (datorită aditivității integrării):

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint\frac{\rho_s' dA}{R}+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint\frac{\rho_s'' dA}{R}=V'+V'',$$

adică suma potențialelor produse de fiecare distribuție în parte.

7.2. Teorema capacității electrostatice

7.2.1. **Capacitatea.** Se consideră un sistem format din două conductoare omogene, încărcate cu sarcini electrice adevărate q_1, q_2, egale și de nume contrare: $q_1=q$; $q_2=-q$. Un asemenea sistem se numește *condensator electric*. Între conductoare (armături) sînt dielectrici omogeni sau neomogeni, dar liniari (care au o permitivitate independentă de intensitatea cîmpului electric, neîncărcată și fără polarizație permanentă: $\rho_v=0$ și $\bar{P}_p=0$). În aceste condiții, mărimea definită de raportul (pozitiv) dintre sarcina unuia dintre conductoare și diferența de potențial dintre ele se numește *capacitatea* electrică a condensatorului

$$C=\frac{q_1}{V_1-V_2}=\frac{q_1}{U_{12}}=\frac{q_2}{U_{21}}=\frac{q}{U}>0 \qquad (7.1)$$

(cu $U_{12}=U$ tensiunea dintre armătura de sarcină q_1 și cealaltă armătură).

Practic, un sistem de două conductoare formează un *condensator*, dacă aplicînd o tensiune între cele două *armături*, toate liniile de cîmp care pleacă de la o armătură ajung pe cealaltă. În adevăr, aplicînd tensiunea U_{12} condensatorului, pe o armătură apare sarcina pozitivă:

$$q_1=q>0,$$

iar pe cealaltă apare sarcina negativă:

$$q_2<0.$$

Considerînd o suprafață închisă Σ, care trece prin cele două conductoare și se închide în interiorul lor astfel încît să nu intersecteze linii de cîmp (fig. 7.2), fluxul electric prin ea este nul (deoarece $\bar{D}=0$ în conductor):

$$\psi_\Sigma=q_\Sigma=0.$$

Dar $q_\Sigma=q_1+q_2$; în consecință, se verifică relația $q_2=-q_1$ (teorema ariilor corespondente).

Unitatea de măsură a capacității electrice este *faradul* (F) în sistemul MKSA (capacitatea unui condensator care fiind supus la tensiunea de 1 V se încarcă cu sarcina de 1 C este de 1 F).

Se utilizează foarte mult submultiplii faradului:

1 μF$=10^{-6}$F (microfarad)
1 nF$=10^{-9}$F (nanofarad)
1 pF$=10^{-12}$F (picofarad).

Scanned with OKEN Scanner

Legătura dintre farad și unitățile din sistemele CGS este dată de relațiile:

$$1\ \text{F}=\frac{3\cdot10^9}{\frac{1}{300}}=9\cdot10^{11}\text{u CGS es}$$

unitățile CGS es de capacitate se numesc și „centimetri" (deoarece dacă nu se ia în considerare dimensiunea permitivității capacitatea are dimensiunea lungimii rel. 7.5).

$$1\text{„cm"}=\frac{10}{9}\text{ pF}$$

$$1\ \text{F}=\frac{10^{-1}}{10^{8}}=10^{-9}\ \text{u.CGS em}$$

(a se vedea și corespondența între unități de la pct. 2.5.)

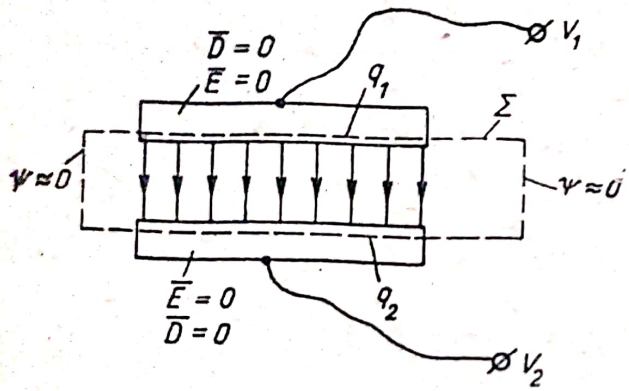


Fig. 7.2.

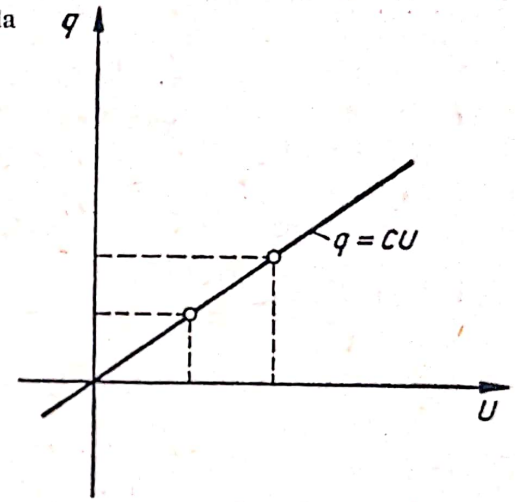


Fig. 7.3.

7.2.2. **Teorema capacității.** Valoarea capacității unui condensator cu dielectric liniar este independentă de sarcină și de diferența de potențial, fiind o caracteristică (de material) a condensatorului. În adevăr, din teorema superpoziției rezultă:

$$C=\frac{q_1}{U_{12}}=\frac{\lambda q_1}{\lambda U_{12}}=\frac{q_1'}{U_{12}'}=C'.$$

Această relație se poate verifica practic. Se încarcă condensatorul sub diferite tensiuni și se măsoară sarcinile electrice. Se obține caracteristica condensatorului (fig. 7.3), care este liniară în condițiile expuse.

Capacitatea condensatorului depinde numai de poziția relativă a conductoarelor, de dimensiunile lor (*nu* și de natura lor) și de *natura dielectricului*.

7.3. Calculul capacităților electrostatice

7.3.1. **Calculul capacităților.** Se procedează în felul următor:

— se presupune condensatorul încărcat cu sarcinile q și $-q$;

— se determină intensitatea cîmpului electric (sau potențialul electric) în dielectricul dintre armături;

— se calculează tensiunea $U_{12}=\int_1^2 \overline{E}\ \overline{ds}$ (în mod obișnuit de-a lungul unei linii de cîmp) sau cu $U_{12}=V_1-V_2$.

— se aplică relația (7.1) pentru determinarea capacității.

Dintre toate etapele expuse, cea mai complicată rămîne cea a calculului intensității cîmpului electric. În cazuri simple (indicate în continuare), pentru acest calcul se folosește legea fluxului electric.

7.3.2. **Capacitatea condensatorului plan.** Condensatorul plan are armăturile plane paralele și apropiate, despărțite de un dielectric de permitivitate ε.

Dacă distanța d între armături este foarte mică față de dimensiunile suprafețelor armăturilor, cîmpul între cele două plăci poate fi considerat omogen. (La capetele condensatorului, liniile de cîmp se curbează. Acesta este efectul de margine, care se neglijează în cazul considerat. Practic, dacă este nevoie, se poate elimina acest efect prin așezarea unui inel de gardă în prelungirea armăturilor, supus la aceeași tensiune ca și condensatorul).

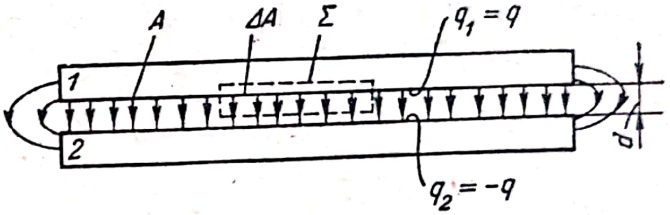


Fig. 7.4.

Aplicînd legea fluxului electric suprafeței Σ (fig. 7.4):

$$\psi_\Sigma=\iint_\Sigma \overline{D}\cdot\overline{dA}=\iint D\cdot dA=D\cdot\Delta A=\Delta q,$$

(baza din dielectric)

deci

$$D=\frac{\Delta q}{\Delta A}=\rho_s=\frac{q_1}{A} \tag{7.2}$$

sau

$$E=\frac{q_1}{\varepsilon A} \tag{7.3}$$

este intensitatea cîmpului electric între armăturile unui condensator plan, de arie A (a se compara cu rezultatul obținut la par. 3.4.4).

Tensiunea între cele două armături în lungul unei linii de cîmp este:

$$U_{12}=\int_1^2 \overline{E}\cdot\overline{ds}=\int_1^2 E\,ds=Ed=\frac{q_1\cdot d}{\varepsilon A}, \tag{7.4}$$

iar capacitatea condensatorului plan este, conform relației (7.1):

$$C=\frac{q_1}{U_{12}}=\frac{\varepsilon A}{d}, \tag{7.5}$$

capacitatea unui condensator plan e proporțională cu permitivitatea dielectricului, cu aria uneia dintre plăci și invers proporțională cu distanța dintre plăci.

Din această relație se poate deduce unitatea de permitivitate care este $\frac{F}{m}$ în sistemul MKSA raționalizat.

Expresia dată de relația (7.5) se utilizează și în cazul unui condensator cu armături curbe, dacă distanța între armături este foarte mică față de raza de curbură. În aceste condiții, cîmpul electric între armături poate fi considerat omogen (cazul condensatoarelor cu dielectric hîrtie).

7.4. Aplicații

7.4.1. **Capacitatea unui condensator cilindric** (cazul cablului electric coaxial).

Armăturile condensatorului sînt doi cilindri coaxiali de raze a și $b > a$, de lungime l, între care există un mediu de permitivitate ε. Fie q sarcina armăturii interioare. Din motive de simetrie, liniile de cîmp au direcția radială. Pentru aplicarea legii fluxului electric se consideră ca suprafață Σ, suprafața unui cilindru coaxial cu ceilalți, de rază r și de lungime l (fig. 7.5). Observînd că fluxul prin bazele cilindrului (nestrăbătute de linii de cîmp) e nul, rezultă din legea fluxului electric:

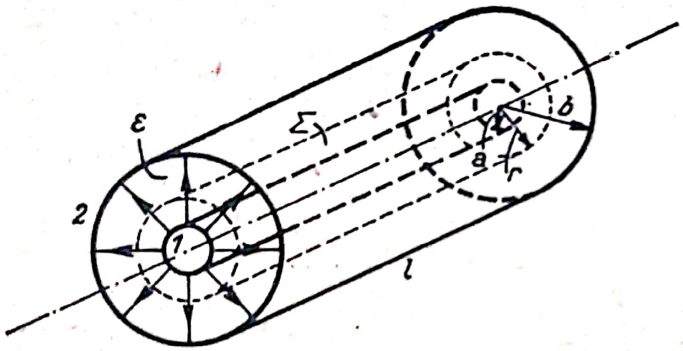


Fig. 7.5.

$$\Psi_\Sigma = \iint_\Sigma \bar{D} \cdot \overline{dA} = D \cdot 2\pi r l = q$$

sau

$$D = \frac{q}{2\pi r l}. \tag{7.6}$$

Intensitatea cîmpului electric este:

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{q}{2\pi r \varepsilon l}, \tag{7.7}$$

iar tensiunea între cele două armături, calculată de-a lungul unei linii de cîmp:

$$U = \int_1^2 \bar{E} \cdot \overline{ds} = \int_1^2 E \cdot dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \int_1^2 \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \ln \frac{b}{a}. \tag{7.8}$$

Capacitatea este conform relației (7.1):

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{b}{a}}. \tag{7.9}$$

Din această relație se deduce expresia capacității pe unitatea de lungime:

$$C_s = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{b}{a}} \tag{7.9'}$$

utilizată în cazul cablurilor monofilare (coaxiale).

Expresiile din relațiile (7.9) și (7.9') sînt valabile în cazul cînd condensatorii cilindrici sînt destul de lungi, pentru ca liniile de cîmp să aibă direcția radială între armături. Dacă

condensatorii cilindrici sînt de lungime mică (de exemplu, dacă sînt utilizați pentru măsurări în tehnica înaltei tensiuni), se așază prelungiri de-o parte și de alta a condensatorului (inele de gardă) (v. fig. 7.6), puse la același potențial ca și armătura condensatorului. Prin această dispoziție, liniile de cîmp în porțiunea centrală, a cărei capacitate trebuie cunoscută exact, au direcția radială.

7.4.2. **Condensatorul sferic.** Armăturile condensatorului sînt două sfere concentrice de raze a, respectiv b (fig. 7.7), între care există un dielectric de permitivitate ε. Fie q sarcina armăturii interioare de rază a.

Aplicînd legea fluxului electric unei suprafețe sferice de rază r ($a < r < b$) se obține:

$$\Psi_\Sigma = \iint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{dA} = D \cdot 4\pi r^2 = q_\Sigma = q$$

deoarece liniile de cîmp sînt radiale. Rezultă:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}, \qquad (7.10)$$

iar

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}. \qquad (7.11)$$

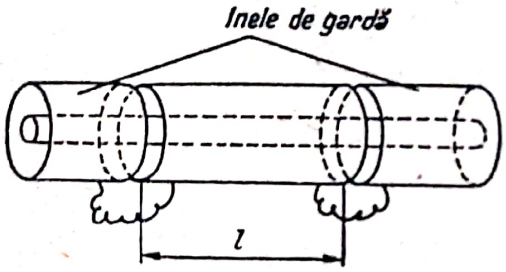


Fig. 7.6.

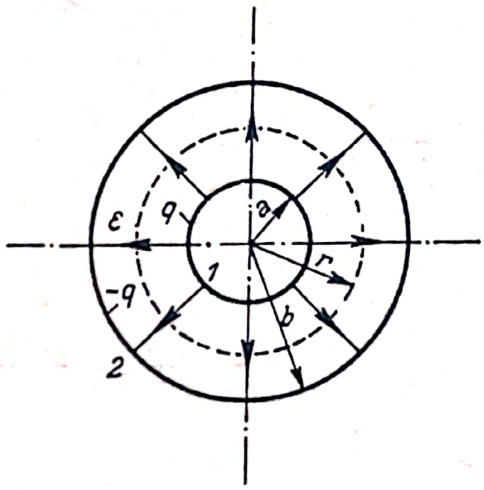


Fig. 7.7.

Tensiunea electrică calculată de-a lungul unei linii de cîmp este:

$$U = \int_1^2 \overline{E}\, \overline{ds} = \int_1^2 E\, dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \qquad (7.12)$$

Deci capacitatea devine:

$$C = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon \frac{ab}{b-a}. \qquad (7.13)$$

Dacă raza sferei exterioare este foarte mare, $b \gg a$, atunci capacitatea „sferei" are valoarea:

$$C = 4\pi\varepsilon a. \qquad (7.13')$$

Observație. În unități neraționalizate, expresiile (7.5), respectiv (7.9), respectiv (7.13) ale condensatoarelor plan, respectiv cilindric, respectiv sferic, sînt:

$$C = \frac{\varepsilon' A}{4\pi d}; \quad C = \frac{\varepsilon' l}{2 \ln \frac{b}{a}}; \quad C = \varepsilon' \frac{ab}{b-a}, \qquad (7.14)$$

în aceste relații $\varepsilon' = 4\pi\varepsilon$ e permitivitatea în unități neraționalizate.

7.5. Teoremele capacităților echivalente

În cazul unei rețele de condensatoare, cu două borne A și B de acces, se numește capacitatea echivalentă mărimea:

$$C_e=\frac{q_A}{U_{AB}}=\frac{q_B}{U_{BA}} \tag{7.15}$$

în care $q_A=-q_B$ e sarcina absorbită pe la borna A cînd se aplică tensiunea U_{AB} rețelei, inițial descărcată. Capacitatea echivalentă a unei rețele de condensatoare este deci capacitatea unui condensator care aplicîndu-i-se aceeași tensiune ca și sistemului de condensatoare, se încarcă cu aceeași sarcină electrică ca și sistemul dat. În consecință, în exteriorul sistemului nu se constată nici o schimbare la înlocuirea rețelei cu condensatorul de capacitate echivalentă cu ea.

7.5.1. **Condensatoare legate în paralel.** Fie un ansamblu de n condensatoare legate în paralel (fig. 7.8), adică avînd toate aceeași tensiune la borne.

Aplicînd relația (7.1) fiecărui condensator se obține:

$$q_1=C_1\ U_{AB};\ q_2=C_2\ U_{AB}\ \dots\ q_n=C_nU_{AB}. \tag{7.16}$$

Rezultă:

$$C_e=\frac{q_A}{U_{AB}}=\frac{q_1+q_2+\cdots+q_n}{U_{AB}}=C_1+C_2+\cdots+C_n \tag{7.17}$$

sau

$$\boxed{C_e=\sum_{i=1}^{n}C_i.} \tag{7.18}$$

Capacitatea echivalentă a n condensatoare conectate în paralel este egală cu suma capacităților condensatoarelor.

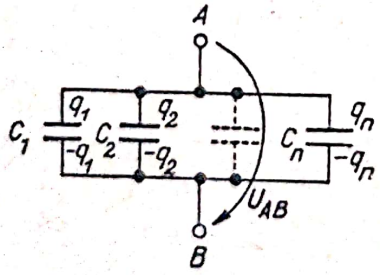


Fig. 7.8.

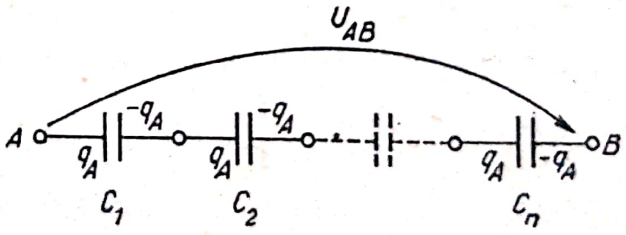


Fig. 7.9.

7.5.2. **Condensatoare legate în serie.** Fie un ansamblu de n condensatoare legate în serie (fig. 7.9), adică astfel încît între cele două borne exterioare A și B ele constituie o succesiune de elemente în care borna de ieșire a unuia e conectată la borna de intrare a următorului. Tensiunea între A și B este suma tensiunilor condensatoarelor:

$$U_{AB}=U_1+U_2+\cdots+U_n. \tag{7.19}$$

Sarcina electrică cu care se încarcă fiecare dintre condensatoarele legate în serie este:

$$q_1=q_2=\cdots=q_n=q_A. \tag{7.20}$$

În adevăr, sarcina $q_1=q_A$ de pe armătura pozitivă a primului condensator provoacă prin influență apariția sarcinii $-q_A$ pe cealaltă armătură; datorită legii conservării sarcinii, apare sarcina $q_2=q_A$ pe armătura pozitivă a celui de-al doilea condensator (care împreună cu armătura negativă a primului constituie un conductor inițial neîncărcat cu $q_2+(-q_1)=0$) ș.a.m.d.

Conform relației (7.1):

$$U_1=\frac{q_A}{C_1}\ ;\quad U_2=\frac{q_A}{C_2}\ ;\quad \cdots\quad U_n=\frac{q_A}{C_n}. \tag{7.21}$$

Din relațiile (7.19) și (7.21) se deduce:

$$U_{AB}=q_A\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}\right) \tag{7.22}$$

sau conform relației (7.15):

$$\frac{1}{C_e}=\frac{U_{AB}}{q_A}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}, \tag{7.23}$$

în consecință:

$$\boxed{\frac{1}{C_e}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}}. \tag{7.24}$$

Valoarea reciprocă a capacității echivalente a n condensatoare legate în serie este egală cu suma valorilor reciproce ale capacităților condensatoarelor.

Dacă se notează cu $S=\frac{1}{C}$, valoarea reciprocă a capacității, numită și *elastanța* condensatorului, relația (7.24) se poate transforma în:

$$S_e=\sum_{i=1}^{n}S_i. \tag{7.24'}$$

7.5.3. **Aplicații.** *a)* Să se calculeze capacitatea unui condensator format din $2n=12$ lame paralele de arie egală $A=64$ cm². Distanța între două lame consecutive este $d=0{,}5$ mm. Dielectricul este aer $\varepsilon_r\approx 1$ (fig. 7.10).

Soluție: Cele $2n$ lame paralele formează $(2n-1)$ condensatoare, de capacitate C, legate în paralel. În consecință:

$$C_e=(2n-1)C=(2n-1)\frac{\varepsilon A}{d}\approx(2n-1)\frac{A\varepsilon_0}{d}.$$

$$\text{Numeric } C_e=(12-1)\frac{64\cdot10^{-4}}{0{,}5\cdot10^{-3}}\cdot\frac{1}{4\pi\cdot9\cdot10^{9}}=$$

$$=1{,}2475\cdot10^{-9}\ F=1247{,}5\ \text{pF}.$$

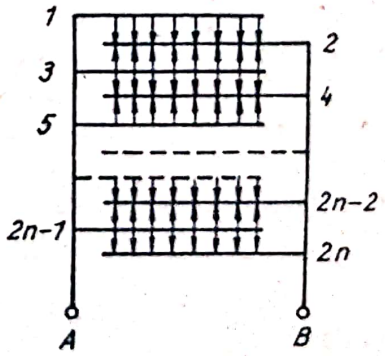


Fig. 7.10.

La această valoare mai trebuie să se adauge capacitatea reziduală a porțiunilor de armături care nu sînt paralele și față în față, de ordinul zecilor de picofarazi.

b) Să se calculeze capacitatea unui condensator plan a cărui dielectric este format din două straturi (paralele cu armăturile) de materiale izolante diferite, de permitivități ε_1, respectiv ε_2 și de grosimi d_1, respectiv d_2 (fig. 7.11).

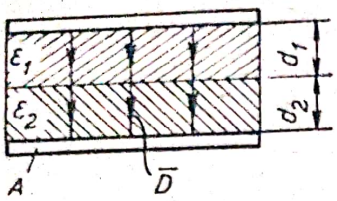


Fig. 7.11.

Soluție:

Liniile de cîmp electric și de inducție electrică nu se refractă la suprafața de separație a celor două medii dacă aceasta este o suprafață echipotențială. În consecință cîmpul este omogen în fiecare dielectric.

Din teoremele de conservare, relația (6.42), se poate deduce:

$$D_1 = D_2 \tag{7.25}$$

sau

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2 \tag{7.25'}$$

Tensiunea între plăci este:

$$U_{AB} = \int \bar{E}\,d\bar{s} = \int_0^{d_1} E_1 \cdot ds + \int_{d_1}^{d_2+d_1} E_2 ds = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{D_2}{\varepsilon_2} d_2 = \frac{q}{A}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right), \tag{7,26}$$

în care $D_1 = D_2 = \frac{q}{A}$ conform relației (7.2).

Capacitatea echivalentă este:

$$C_e = \frac{q}{U} = \frac{A}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{\varepsilon_1 A}{d_1}} + \frac{1}{\frac{\varepsilon_2 A}{d_2}}} \tag{7.27}$$

adică tocmai capacitatea a două condensatoare în serie. Condensatorul poate fi, deci, considerat ca fiind format din două condensatoare legate în serie.

Caz particular: dacă $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, iar $d = d_1 + d_2$ se obține expresia capacității condensatorului plan cu dielectric omogen relația (7.5).

În cazul a n straturi izolante paralele cu armăturile unui condensator plan formula (7.27) devine:

$$C_e = \frac{A}{\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\varepsilon_i}} \tag{7.28}$$

care se poate deduce și din relația (7.24) pentru condensatoarele serie:

$$\frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\varepsilon_i A} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\varepsilon_i}.$$

Este interesantă următoarea consecință, care derivă din relațiile (7.25') și (7.26):

$$E_1 = \frac{U_{AB}}{d_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} d_2}.$$

În cazul particular $d_2 \gg d_1$, de exemplu, un strat subțire (d_1) de aer inclus în materialul izolant (d_2), se obține, cu $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ și $\varepsilon_2 = \varepsilon$:

$$E_{aer} = E_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{U_{AB}}{d_2} \approx \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot \frac{U_{AB}}{d_1 + d_2} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} E_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Concluzie: în stratul de aer, E_{aer} este de $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ ori mai mare decît în cazul în care între armături era un dielectric omogen (de exemplu aer). Se explică fenomenul care apare în practică: dacă între plăcile unui condensator este aer, nu apar străpungeri pentru o anumită tensiune aplicată U. Dacă se introduce un dielectric bun și rămîne un strat de aer, pot apare străpungeri.

7.6. Relațiile lui Maxwell privitoare la capacități

În cazul unui sistem de două conductoare care formează un condensator, relația (7.1) de definiție a capacității se poate scrie:

$$q_1 = C(V_1 - V_2)$$
$$q_2 = C(V_2 - V_1).$$

Între sarcini și potențiale există deci în cazul unui condensator relații liniare și omogene. Maxwell a generalizat aceste formule pentru un sistem de n conductoare omogene, izolate, încărcate cu sarcini electrice adevărate, între care se găsește un dielectric fără sarcini adevărate și liniar (a cărui permitivitate nu depinde de intensitatea cîmpului) (v. fig. 7.1 pentru cazul $n=3$).

Scrierea relațiilor se va face pentru $n=3$, pămîntul luîndu-se de potențial $V_0=0$.

Conform teoremei superpoziției se poate deduce expresia potențialelor V_1, V_2, V_3 ale celor trei conductoare în funcție de sarcinile q_1, q_2, q_3 ale lor, în cazul în care acestea se cunosc:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 \\ V_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 \\ V_3 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 \end{aligned}\right\} \qquad (7.29)$$

În adevăr, pentru diferitele cazuri particulare, notînd cu V_{jk} potențialul conductorului j produs de sarcina q_k tot din teorema superpoziției rezultă:

dacă $q_1 \neq 0$, $q_2=0$, $q_3=0$, atunci $V_{11}=\alpha_{11}q_1$;

dacă $q_1=0$, $q_2 \neq 0$, $q_3=0$, atunci $V_{12}=\alpha_{12}q_2$;

dacă $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3 \neq 0$, atunci $V_{13}=\alpha_{13}q_3$,

adică potențialul corpului 1 este proporțional cu sarcina care îl produce. Dacă $q_1 \neq 0$; $q_2 \neq 0$; $q_3 \neq 0$, potențialul V_1 este egal cu suma potențialelor produse de fiecare sarcină în parte, ca și cum ar acționa separat (teorema superpoziției). Un raționament analog se face pentru V_2 și pentru V_3.

Coeficienții α_{jk} se numesc coeficienți de potențial; ei depind numai de configurația geometrică și de natura dielectricului.

Sistemul (7.29) constituie *prima formă a relațiilor lui Maxwell.*

Deseori se cunosc potențialele corpurilor și se cere determinarea sarcinilor electrice. Sistemul (7.29) se poate prezenta sub forma:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \gamma_{11}V_1+\gamma_{12}V_2+\gamma_{13}V_3 \\ q_2 &= \gamma_{21}V_1+\gamma_{22}V_2+\gamma_{23}V_3 \\ q_3 &= \gamma_{31}V_1+\gamma_{32}V_2+\gamma_{33}V_3 \end{aligned}\right\} \qquad (7.30)$$

care constituie a doua formă a relațiilor lui Maxwell. În adevăr, dacă se rezolvă cu ajutorul regulei lui Cramer sistemul (7.29) se obține, de exemplu:

$$q_2=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & V_1 & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & V_2 & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & V_3 & \alpha_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{vmatrix}}=V_1\frac{-\begin{vmatrix}\alpha_{21} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}}{\Delta}+V_2\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{31} & \alpha_{33}\end{vmatrix}}{\Delta}+V_3\frac{-\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix}}{\Delta}=$$

$$=\gamma_{21}V_1+\gamma_{22}V_2+\gamma_{23}V_3$$

în care s-a notat cu Δ determinantul sistemului 7.29.

Aceeași operație se aplică și pentru găsirea expresiilor sarcinilor q_1 și q_3.

Coeficienții γ_{jk} se numesc coeficienți de influență electrică, iar coeficienții γ_{jj} se numesc coeficienți de capacitate electrică. Rezultă deci din cele precedente cum se pot calcula acești coeficienți în funcție de coeficienții de potențial.

Se poate demonstra că $\gamma_{jj}>0$ și $\gamma_{jk}<0$ pentru $j\neq k$.

De multe ori, în practică sarcina electrică a unui conductor se exprimă în funcție de diferența de potențial între conductorul dat și celelalte conductoare.

De exemplu, a doua relație din (7.30) se poate pune sub forma:

$$q_2=\gamma_{21}(V_1-V_2)+\gamma_{22}(V_2-V_2)+\gamma_{23}(V_3-V_2)+(\gamma_{21}+\gamma_{22}+\gamma_{23})V_2=U_{21}(-\gamma_{21})+$$
$$+U_{23}(-\gamma_{23})+U_{20}(\gamma_{21}+\gamma_{22}+\gamma_{23})=U_{21}C_{21}+U_{23}C_{23}+U_{20}C_{20},$$

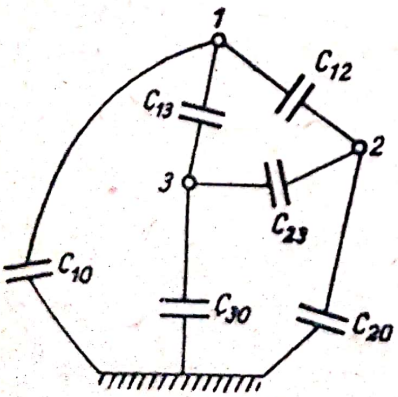


Fig. 7.12.

unde s-a considerat: $V_2=V_2-V_0=U_{20}$; $C_{21}=-\gamma_{21}$, $C_{23}=-\gamma_{23}$; $C_{20}=\gamma_{21}+\gamma_{22}+\gamma_{23}$, potențialul nul fiind potențialul pământului ($V_0=0$).

Se obține astfel cea de-a *treia și cea mai importantă formă a relațiilor lui Maxwell*:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= C_{12}U_{12}+C_{13}U_{13}+C_{10}U_{10} \\ q_2 &= C_{21}U_{21}+C_{23}U_{23}+C_{20}U_{20} \\ q_3 &= C_{31}U_{31}+C_{32}U_{32}=C_{30}U_{30} \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

în care C_{jk} se numește capacitatea parțială între conductoarele j și k; C_{jo} sînt capacitățile parțiale față de pământ.

Se poate demonstra că $C_{jk}>0$ și că $C_{jk}=C_{kj}$.

Observație. Se consideră o rețea de condensatoare cu patru noduri (fig. 7.12), dintre care unul este pământul. Pentru calculul sarcinii totale a conductoarelor

legate în nodul 2 şi care în definitiv constituie un singur conductor, se aplică relaţia:

$$q_2 = C_{21}U_{21} + C_{23}U_{23} + C_{20}U_{20}.$$

Această relaţie este de aceeaşi formă cu relaţia 7.31.

Prin urmare, a treia formă a relaţiilor lui Maxwell arată echivalenţa dintre un sistem de conductoare şi o reţea de condensatoare ale căror capacităţi ar fi egale cu capacităţile parţiale C_{jk} care intervin în aceste relaţii. Această echivalenţă priveşte doar sarcinile totale ale conductoarelor şi potenţialele lor, şi nu se poate extinde nici la spectrele cîmpurilor electrice şi nici la distribuţia densităţii de sarcină pe conductoare.

8. Energie şi forţe electrostatice

8.1. Energia electrostatică a cîmpului unui sistem de conductoare

Pentru a produce un cîmp electrostatic într-o regiune unde acesta încă nu există (în care intensitatea cîmpului electric e nulă în toate punctele), este necesar un anumit lucru mecanic. Energia unui cîmp electrostatic este egală cu lucrul mecanic total ce trebuie efectuat din exterior pentru a aduce sarcinile de la infinit în poziţiile pe care le ocupă în cîmp (adică pentru a încărca corpurile care erau iniţial neîncărcate). Operaţia se efectuează foarte lent şi izoterm, pentru a avea mereu echilibru electrostatic (fără dezvoltare sau transfer de căldură), în medii liniare din punctul de vedere electric (în care ε nu depinde de cîmp).

Se consideră că stabilirea cîmpului se produce în aşa fel, încît la un moment dat sarcina electrică în fiecare punct să fie egală cu o aceeaşi fracţiune λ din valoarea ei în starea finală; astfel, fiecare etapă va fi o stare electrostatică (conform teoremei superpoziţiei). Se presupune că sarcinile se aduc de la infinit cu ajutorul unor mici corpuri de probă.

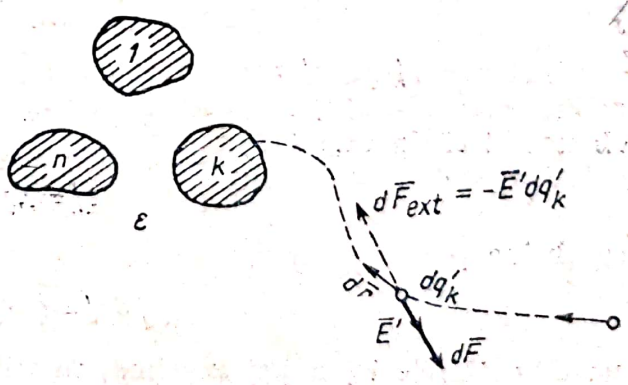


Fig. 8.1.

Se va efectua calculul în cazul particular, frecvent întîlnit în practică, a n conductoare omogene şi imobile, avînd sarcinile q_k şi potenţialele V_k ($k=1, 2, 3, \ldots n$). În starea finală, $\lambda=1$. Într-o stare intermediară a sistemului, sarcinile fiind $q'_k=\lambda q_k$ se produce un cîmp electrostatic avînd în fiecare punct din spaţiu intensitatea $\bar{E}'$ şi potenţialul V' (respectiv V'_k, pentru fiecare

conductor) (fig. 8.1). Pentru a trece sistemul în starea infinit apropiată în care sarcinile sînt $q'_k+dq'_k$ iar potențialele $V'_k+dV'_k$ trebuie aduse de la infinit, cu n corpuri de probă încărcate, sarcinile elementare dq'_k, cu care să se mărească sarcinile conductoarelor. Pentru aducerea fiecărui corp de probă trebuie ca de-a lungul întregului lui drum să se exercite asupra lui cîte o forță $d\bar{F}=-\bar{E}'dq'_k$ egală și opusă celei exercitate de cîmpul electric al sarcinilor q'_k (existente în acea etapă pe conductoare). Trebuie cheltuit, deci, lucrul mecanic elementar:

$$\delta\mathcal{L}=\sum_{k=1}^{n}\int_{\infty}^{\Sigma_k}(-\bar{E}'dq'_k)\overline{ds}=\sum_{k=1}^{n}dq'_k\left[-\int_{\infty}^{\Sigma_k}\bar{E}'\overline{ds}\right]$$

pentru a trece sistemul din starea intermediară într-o stare infinit apropiată. Fiecare integrală de sub sumă se efectuează de la infinit și pînă la suprafața Σ_k a conductorului k.

În conformitate cu relația (6.25) de definiție a potențialului, integralele cu semn schimbat dintre paranteze drepte sînt chiar potențialele $V'_k=-\int_{\infty}^{\Sigma_k}\bar{E}'\overline{ds}$ ale conductoarelor în starea intermediară considerată și în ipoteza că potențialul se ia nul la infinit ($V(\infty)=V_0=0$). Rezultă deci că lucrul mecanic elementar necesar pentru a spori cu dq'_k sarcinile celor n conductoare este:

$$\delta\mathcal{L}=\sum_{k=1}^{n}V'_k dq'_k\,. \tag{8.1}$$

În conformitate cu principiul conservării energiei, transformarea considerată fiind reversibilă și izotermă, acest lucru mecanic elementar (singurul efectuat, deoarece conductoarele se presupun imobile), este egal cu diferențiala exactă a energiei W a sistemului (mai exact a energiei lui libere electrice) adică $\delta\mathcal{L}=dW$ și

$$dW=\sum_{k=1}^{n}V'_k dq'_k \tag{8.2}$$

Valorile V'_k și dq'_k pot fi însă exprimate în funcție de parametrul λ (sau de creșterea lui, $d\lambda$), de potențialele V_k și de sarcinile q_k din starea finală, observînd că în cazul cînd

$$q'_k=\lambda q_k \tag{8.3}$$

se obține și

$$dq'_k=q_k\cdot d\lambda, \tag{8.4}$$

iar potențialele V_k se pot exprima, cu relațiile lui Maxwell (7.29), ca funcții liniare și omogene de sarcini (deoarece mediul e liniar):

$$\begin{gathered}V'_k=\alpha_{k1}q'_1+\alpha_{k2}q'_2+\cdots+\alpha_{kn}q'_n=\alpha_{k1}\lambda q_1+\alpha_{k2}\lambda q_2+\cdots+\alpha_{kn}\lambda q_n\\ V'_k=\lambda(\alpha_{k1}q_1+\alpha_{k2}q_2+\cdots+\alpha_{kn}q_n)=\lambda V_k.\end{gathered} \tag{8.5}$$

Înlocuind (8.4) şi (8.5) în (8.2) se deduce:

$$dW=\sum_{k=1}^{n}\lambda V_k\cdot d(\lambda q_k)=\sum_{k=1}^{n}V_k q_k\lambda d\lambda. \tag{8.6}$$

Energia electrică a cîmpului sistemului de conductoare încărcate se calculează integrînd această expresie de la starea iniţială ($\lambda=0$) la starea finală ($\lambda=1$):

$$W=\int dW=\sum_{k=1}^{n}V_k q_k\int_0^1\lambda d\lambda.$$

Cum integrala e $\frac{\lambda^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$, rezultă:

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}V_k q_k,} \tag{8.7}$$

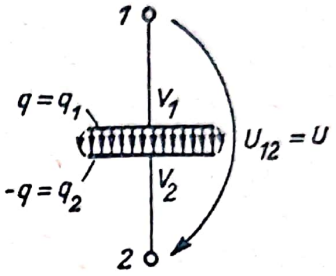


Fig. 8.2.

Aceasta este expresia căutată a energiei cîmpului electrostatic produs într-un mediu liniar de un sistem de n conducte încărcare, avînd potenţialele V_k şi sarcinile q_k ($k=1, 2, \ldots, n$).

Aplicaţie. *Energia electrică acumulată într-un condensator electric.* Se consideră un condensator (fig. 8.2) supus la tensiunea $U=V_1-V_2$, care se încarcă cu sarcinile $q_1=q$ şi $q_2=-q$. Aplicînd formula (8.7) în acest caz particular (în care $n=2$) rezultă:

$$W=\frac{1}{2}q_1V_1+\frac{1}{2}q_2V_2=\frac{q}{2}(V_1-V_2)=\frac{1}{2}q\,U=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}C\,U^2. \tag{8.8}$$

Dacă se menţine sarcina constantă (se deconectează condensatorul de la sursa de tensiune U), energia creşte cînd capacitatea scade, de exemplu îndepărtînd armăturile. Rezultă de aici că armăturile condensatorului se atrag, deoarece pentru a le îndepărta trebuie cheltuită energie din exterior.

8.2. Repartizarea (localizarea) energiei în cîmpul electric. Densitatea de energie electrică

În expresia (8.7) energia electrică este exprimată în funcţie de potenţialele punctelor din spaţiu în care există sarcină electrică (adevărată). Această expresie nu indică localizarea corectă a acestei energii, care, de fapt, *este repartizată în cîmpul electric*, adică în afara corpurilor conductoare încărcate, aşa cum rezultă din concepţia cîmpului electromagnetic ca formă aparte de materie şi cum se verifică experimental în cazul cîmpului electromagnetic variabil în timp.

Pentru a obține o localizare corectă a energiei, se caută o exprimare a energiei în funcție de mărimile de stare ale cîmpului electric ($\bar{E}$ și $\bar{D}$). Fie w densitatea de energia electrică:

$$w=\lim_{\Delta v=\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta v}=\frac{dW}{dv} \tag{8.9}$$

adică energia înmagazinată în unitatea de volum.

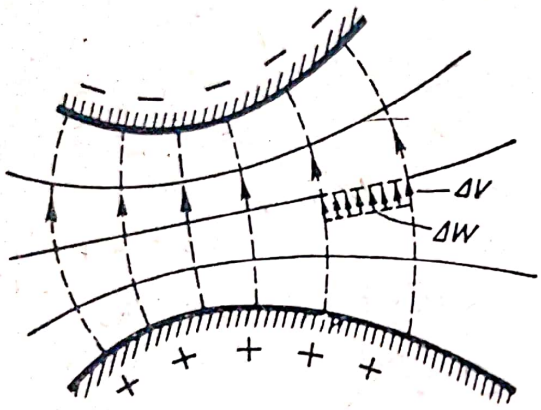


Fig. 8.3.

Se caută să se stabilească expresia $w=w(\bar{E}, \bar{D})$ a acestei densități, ca funcție de intensitatea cîmpului electric și de inducția electrică.

Pentru simplificarea calculelor, se consideră mai întîi cazul cel mai simplu, al unui cîmp omogen cuprins între două plăci paralele situate la distanța d, de arie A (cîmpul unui condensator plan).

Energia totală a condensatorului este, conform relațiilor (8.8) și (7.5), cu $U=Ed$:

$$W=\frac{CU^2}{2}=\frac{\varepsilon A}{2d}\cdot U^2=\frac{\varepsilon Ad}{2}E^2=V\frac{\varepsilon E^2}{2} \tag{8.10}$$

sau

$$w=\frac{W}{V}=\frac{\varepsilon E^2}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon}=\frac{\bar{D}\bar{E}}{2} \tag{8.11}$$

(unde $V=Ad$ este volumul ocupat de cîmp, în dielectricul condensatorului).

Valabilitatea acestei expresii se menține și în cazul general al cîmpului neomogen. În acest caz (v. fig. 8.3), volumele elementare ΔW, mărginite de cîte două mici porțiuni de suprafețe echipotențiale, pot fi considerate echivalente cu mici condensatoare plane, în care energia are o valoare identică cu cea determinată din relațiile anterioare. În adevăr, se pot considera metalizate (v. Principiul metalizării, par. 6.6.4) cele două porțiuni de suprafețe echipotențiale fără ca să se modifice cîmpul dintre ele, a cărui energie va fi, deci, cu (8.10):

$$\Delta W=\frac{E^2\varepsilon}{2}\Delta V,$$

de unde rezultă pentru densitatea de energie electrică expresiile:

$$\boxed{w=\frac{\Delta W}{\Delta V}=\frac{\varepsilon E^2}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon}=\frac{\bar{E}\bar{D}}{2}} \tag{8.11'}$$

Primele două expresii ale densității de energie w sînt valabile pentru un mediu izotrop. Se poate demonstra că ultima expresie e valabilă și pentru un mediu anizotrop (dar liniar).

Energia totală localizată în cîmpul electric este dată de relația

$$W=\iiint_{V_\infty} w dv=\iiint_{V_\infty}\frac{\bar{E}\,\bar{D}}{2}dv, \tag{8.12}$$

în care simbolul V_∞ precizează că integrala trebuie efectuată asupra întregului spațiu.

Această expresie este echivalentă cu cea dată de relația (8.7). Diferența între cele două exprimări ale valorii energiei cîmpului constă în următoarele: relația (8.7) este valabilă numai în electrostatică, cînd cîmpul este produs de repartiții invariabile de sarcină; se poate însă demonstra că relația (8.12) este valabilă și în cazul cîmpurilor electrice, variabile în timp (de exemplu, în cazul cîmpurilor electrice produse prin variația în timp a cîmpului magnetic, chiar atunci cînd nu există sarcini electrice).

Calculul energiei cîmpurilor electrostatice se face și pentru a permite calculul forțelor electrostatice.

8.3. Forțele electrostatice și calculul lor (teoremele forțelor generalizate)

8.3.1. **Coordonate generalizate.** Forțele care se exercită asupra corpurilor situate într-un cîmp electric nu se pot calcula totdeauna cu teorema lui Coulomb, deoarece această teoremă e valabilă numai pentru dielectrici omogeni și presupune cunoașterea prealabilă a repartiției de sarcină electrică. De aceea, s-au elaborat metode de calcul al forțelor prin intermediul lucrului mecanic care s-ar efectua la o deplasare oarecare a corpurilor asupra cărora ele se exercită. Aceste metode folosesc conceptele de „coordonată generalizată" și de „forță generalizată" cunoscute din mecanică, care se vor preciza cu această ocazie.

În cazul cînd configurația geometrică a unui sistem de corpuri se poate caracteriza complet cu ajutorul unui număr determinat de variabile scalare — (cu variații independente), aceste variabile se numesc *coordonatele generalizate* (sau parametrii de poziție) ale sistemului și numărul lor este egal cu numărul de grade de libertate ale acestuia. Coordonatele generalizate pot fi distanțe (de exemplu, coordonate carteziene ale unor puncte ale sistemului), dar și unghiuri de rotație în jurul unui ax fix, ariile unor suprafețe variabile, volume (de exemplu, în cazul unui gaz a cărui formă nu prezintă interes) etc. De aceea, vor fi notate cu simbolul x (cu sau fără indici suplementari).

Cînd configurația geometrică a unui sistem de corpuri are o variație infinitesimală, coordonatele generalizate au variații elementare dx, iar forțele care se exercită asupra corpurilor efectuează un lucru mecanic elementar), care — în cazul variației unei singure coordonate de acest fel — este:

$$L=Xdx \tag{8.13}$$

Mărimea scalară X, care este coeficientul variației coordonatei generalizate în expresia lucrului elementar, se numește *forță generalizată* și nu este totdeauna o forță propriu-zisă. Dacă, de exemplu, x e o deplasare, X e compo-

nenta unei forțe în lungul acelei deplasări; dacă x e un unghi de rotație, X e momentul forțelor în raport cu axul de rotație; dacă x e o arie, X e o tensiune superficială; dacă x e un volum, X e o presiune; ș.a.m.d.

Se consideră acum un sistem de n conductoare încărcate și se presupune că unul dintre corpurile sistemului (unul dintre conductoare sau chiar un corp izolant situat între ele) notat cu A, se deplasează astfel încît variază o singură coordonată generalizată a sa cu dx, forța generalizată corespunzătoare, exercitată de cîmpul electric, fiind X (fig. 8.4).

Se face ipoteza că atît variațiile posibile ale sarcinilor corpurilor, cît și deplasarea corpului A se produc foarte lent, pentru a fi menținută mereu starea de echilibru electrostatic.

În aceste condiții, lucrul efectuat de sursele de energie exterioare pentru variația cu dq_k a sarcinilor conductoarelor (calculabil cu relația 8.1) trebuie să acopere nu numai creșterea energiei cîmpului electric (ca în cazul studiat în 8.1) ci și lucrul mecanic efectuat de forța electrică X, care modifică poziția corpului A.

Deci:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k dq_k = dW + X dx. \qquad (8.14)$$

Pentru exemplificare, se consideră dispozitivul din figura 8.5, format dintr-un condensator C supus unei tensiuni electrice, care poate fi variată cu ajutorul unui reostat montat potențiometric. Una dintre armăturile condensatorului este fixă, iar cealaltă este mobilă și solidară cu platanul unei balanțe. Cu acest dispozitiv se pot realiza de exemplu următoarele transformări infinetisinale:

— Se poate deplasa cu dx armătura mobilă menținînd sarcina electrică constantă (menținînd întreruptorul I deschis);

— Se poate deplasa cu dx armătura mobilă menținînd tensiunea electrică constantă (menținînd întreruptorul I închis cu cursorul K în poziție neschimbată).

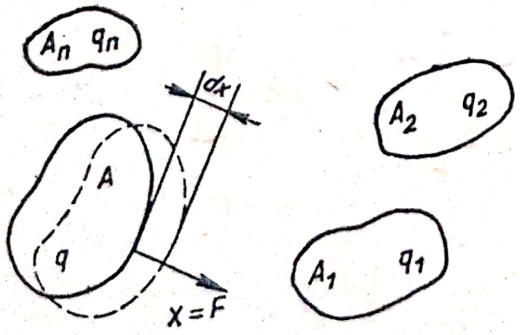


Fig. 8.4.

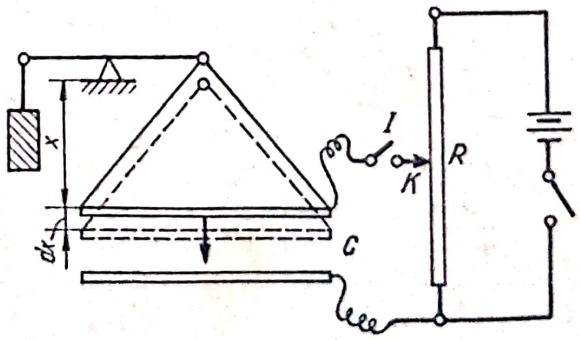


Fig. 8.5.

8.3.2. **Prima teoremă a forțelor generalizate în electrostatică.** Pentru a obține o expresie simplă a forței generalizate X, se presupune că sarcinile corpurilor rămîn constante: q_k=ct. (Condiția este îndeplinită dacă conduc-

toarele sînt deconectate de la sursele exterioare). În acest caz, $dq_k=0$, iar relaţia (8.14) devine:

$$\sum_{k\times 1}^{n} V_k dq_k=0 \tag{8.15}$$

şi deci:

$$(dW)_q=-Xdx$$

şi

$$\boxed{X=-\frac{(dW)_q}{dx}=-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_q=\text{ct.}} \tag{8.16}$$

Semnul — se interpretează imediat observînd că dacă dx este deplasarea produsă sub acţiunea forţei electrice X şi lucrul efectuat de această forţă este pozitiv ($Xdx>0$), energia cîmpului electric scade ($dW<0$). În adevăr, cînd sursele exterioare sînt deconectate, lucrul mecanic se poate produce numai pe seama rezervelor interne de energie ale sistemului, adică pe seama energiei cîmpului electric.

Forţa generalizată X corespunzătoare coordonatei generalizate x, este egală cu derivata cu semn schimbat a energiei (exprimată ca funcţie de sarcini şi de coordonata generalizată) în raport cu coordonata generalizată, la sarcini constante ale conductoarelor (prima teoremă a forţelor generalizate).

8.3.3. **A doua teoremă a forţelor generalizate în electrostatică.** Un alt caz care prezintă interes e următorul: în timpul variaţiei configuraţiei sistemului, potenţialele tuturor corpurilor se menţin invariabile, adică $V_k=\text{ct.}$ Un astfel de regim se produce cînd toate corpurile sînt conectate la bornele unor surse exterioare de tensiune constantă. Cînd configuraţia geometrică a sistemului se modifică, variază capacităţile între conductoare şi, deoarece $V_k=\text{ct.}$, variază şi sarcinile lor.

Sarcinile suplimentare sînt transmise sistemului de sursele exterioare. Astfel, relaţia (8.14) devine:

$$\sum_{k=1}^{n} V_k\, d\, q_k=(dW)_V+Xdx\neq 0. \tag{8.17}$$

Dacă însă $V_k=\text{ct.}$, iar permitivităţile mediului nu depind de intensitatea cîmpului, este valabilă pentru energia cîmpului electric relaţia (8.7). În consecinţă, variaţia de energie, la $V=\text{ct.}$, este

$$(dW)_{V=\text{ct}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} V_k\, d\, q_k, \tag{8.18}$$

adică jumătate din lucrul mecanic al surselor exterioare. Cealaltă jumătate este consumată pentru efectuarea lucrului mecanic Xdx.

În consecinţă, acest lucru mecanic este egal cu:

$$Xdx=(dW)_{V=\text{ct}} \tag{8.19}$$

Dacă în sistem se produce o deplasare sub acţiunea forţei X, lucrul mecanic este pozitiv: $Xdx>0$; cînd $V_k=\text{ct.}$, creşterea energiei rezultă de asemenea

pozitivă. Aportul de energie din exterior este deci egal cu dublul creșterii energiei cîmpului și se împarte în mod egal între creșterea energiei și lucrul mecanic efectuat de forțele electrice.
Din relația (8.19) se obține:

$$X=\frac{(dW)}{\alpha x}\,V=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{V=\text{ct}} \tag{8.20}$$

Forța generalizată X, *corespunzătoare coordonatei generalizate* x, *este egală cu derivata energiei* (*exprimată ca funcție de potențiale și de coordonata generalizată*) *în raport cu coordonata generalizată, la potențiale constante ale conductoarelor* (a doua teoremă a forțelor generalizate).

Observație. Cele două expresii (8.16) și (8.20) sînt complet echivalente și dau *același* rezultat: forța depinde numai de poziția corpurilor și de valorile sarcinilor lor în momentul considerat și nu poate depinde de modul în care se va dezvolta procesul energetic în cazul în care sistemul se va pune în mișcare sub acțiunea ei. Acest proces este utilizat numai pentru calculul ei și are forme diferite, după cum vor fi menținute constante sarcinile sau potențialele corpurilor (în cazul general ar putea varia și sarcinile și potențialele).

8.4. Aplicatii. Electrometrul Thomson.

Electrometrul e un instrument de măsură electrostatic pentru măsurarea sarcinilor și tensiunilor electrice.

Electrometrul Thomson este format dintr-un condensator plan (fig. 8.6). Un inel de gardă este legat cu un fir conductor flexibil foarte subțire de placa de sus; astfel se elimină efectul de margine (neuniformitatea cîmpului) care este „mutat" la periferia inelului de gardă, cîmpul fiind peste tot uniform în dreptul armăturii centrale.

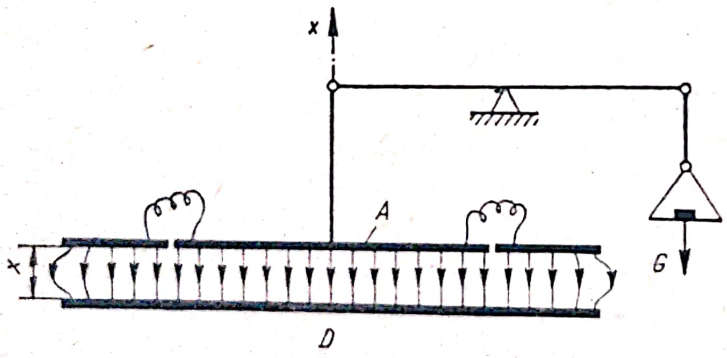


Fig. 8.6.

Forța între armăturile condensatorului se măsoară cu un dinamometru sau cu o balanță. Armătura inferioară și inelul de gardă sînt fixe; armătura superioară — de diametru mai mic — este mobilă. Aria ei e notată cu A, iar distanța x dintre plăci e coordonata generalizată.

Energia condensatorului încărcat este dată de una dintre relațiile (8.8).

— Prima metodă de calcul a forței folosește relația (8.16) și expresia energiei în funcție de sarcini:

$$W=\frac{q^2}{2C}.$$

În consecință:

$$X=-\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{q=\text{ct.}}=-\frac{q^2}{2}\left(-\frac{1}{C^2}\frac{dC}{dx}\right)=\frac{q^2}{2C^2}\cdot\frac{dC}{dx}. \tag{8.21}$$

— A doua metodă de calcul a forţei foloseşte relaţia (8.20) şi expresia energiei în funcţie de tensiune (diferenţa de potenţial):

$$W=\frac{U^2}{2}C=\frac{(V_1-V_2)^2}{2}C$$

Rezultă:

$$X=\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)_{V=\text{ct,}}=\frac{U^2}{2}\frac{dC}{dx}. \tag{8.22}$$

Relaţia (8.21) este identică cu relaţia (8.22), deoarece $q = CU$.

Folosind expresia capacităţii condensatorului plan $C=\frac{\varepsilon A}{x}$, valoarea forţei (echilibrată de greutatea G) devine:

$$X=-\frac{U^2}{2}\frac{\varepsilon A}{x^2}=-G. \tag{8.23}$$

Forţa generalizată este negativă, adică de sens contrar sensului de creştere al coordonatei generalizate x: ea este deci o forţă de atracţie. Forţele electrice care lucrează asupra armăturilor condensatorului tind să-i mărească capacitatea. Forţa este funcţie de pătratul tensiunii dintre plăci şi, deci, nu depinde de polaritatea plăcilor condensatorului. Această forţă are o valoare medie diferită de zero şi în cazul tensiunilor alternative, a căror valoare pătratică medie poate fi măsurată cu acest instrument.

Prin măsurarea forţei (fig. 8.5) se poate deduce tensiunea

$$U=\sqrt{\frac{2x^2}{\varepsilon A}|X|}=\sqrt{\frac{2x^2}{\varepsilon A}G}=\sqrt{\frac{2x}{C}G} \tag{8.24}$$

sau sarcina:

$$q=CU=\sqrt{2CxG}. \tag{8.25}$$

Din cunoaşterea sarcinii electrice se poate obţine şi valoarea permitivităţii ε. Dacă aparatul este gradat direct în volţi, se numeşte *voltmetru electrostatic*. De obicei, voltmetrele electrostatice folosesc rotirea unei armături plane mobile în jurul unui ax fix asupra căruia acţionează cuplul rezistent proporţional cu unghiul de rotaţie α (cuplu de torsiune elastic) de valoare $M_r=k\alpha$. Prin aplicarea teoremelor forţelor generalizate se deduce că forţa generalizată corespunzătoare coordonatei generalizate α este momentul activ $M=\frac{U^2}{2}\frac{dC}{d\alpha}$. La echilibru, $M_r=M$ şi rezultă $\alpha=\frac{1}{k}\frac{U^2}{2}\frac{dC}{d\alpha}$.

8. 5. Tensiuni maxwelliene

Faraday şi Maxwell nu au acceptat teoria acţiunii la distanţă, ci au considerat că toate acţiunile fizice se propagă continuu prin cîmpul electromagnetic de la un corp la altul. Faraday a interpretat această localizare a transmiterii acţiunilor ponderomatoare în cîmp ca o stare de tensiune (încordare) în spaţiul ocupat de cîmpul electric sau magnetic; el a propus o interpretare mecanicistă a fenomenelor electrice.

O expresie matematică a acestui punct de vedere a fost dată de Maxwell. El a considerat o serie de corpuri electrizate cuprinse într-o suprafaţă închisă Σ, de normală exterioară $\bar{n}$ şi între care se găseşte un mediu dielectric de permitivitate ε. Forţa electrică rezultantă exercitată asupra acestor corpuri (fig. 8.7) a fost calculată — în electrostatică — de

Maxwell și are (în cazul cînd se neglijează dependența permitivității de starea de deformare a mediului) expresia:

$$F_\Sigma = \iint_\Sigma \left[(\bar{D}\,\bar{n})\,\bar{E} - \bar{n}\frac{\bar{D}\bar{E}}{2} \right] dA \tag{8.26}$$

(relația se citează fără demonstrație).

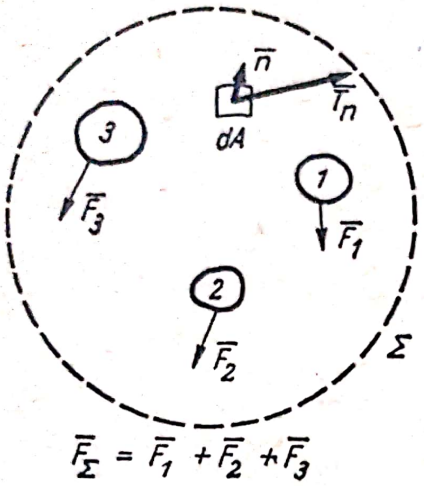


Fig. 8.7.

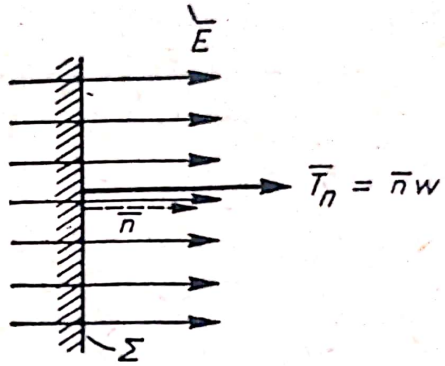


Fig. 8.8.

Forța rezultantă exercitată de un corp electrizat asupra corpurilor din suprafața Σ este, deci, egală cu integrala de suprafață a unei mărimi numită *tensiune maxwelliană* $\bar{T}_n$ avînd expresia:

$$\bar{T}_n = (\bar{D}\,\bar{n})\,\bar{E} - \bar{n}\frac{\bar{D}\,\bar{E}}{2} \tag{8.27}$$

în care $\bar{n}$ este normala exterioară în fiecare punct a suprafeței Σ.

Din punctul de vedere fizic, totul se petrece ca și cum mediul dinafara suprafeței ar acționa asupra suprafeței cu o tensiune mecanică suplimentară (efort unitar, forță pe unitatea de arie) de valoare $\bar{T}_n$.

a) Dacă suprafața Σ este local normală pe liniile de cîmp (fig. 8.8):

$$\bar{E} = E\bar{n}; \quad \bar{D} = D\bar{n}, \tag{8.28}$$

iar relația (8.27) devine:

$$\bar{T}_n = DE\bar{n} - \bar{n}\frac{DE}{2} = \bar{n}\frac{\bar{D}\bar{E}}{2} = \bar{n}w. \tag{8.29}$$

În consecință, în regiunea în care suprafața Σ se confundă cu o suprafață echipotențială, $\bar{T}_n$ este o *întindere* dirijată după normala la suprafață și egală în modul cu densitatea de energie (relația 8.11).

b) Dacă suprafața Σ este local paralelă cu liniile de cîmp (fig. 8.9):

$$\bar{n}\,\bar{D} = 0, \tag{8.30}$$

atunci

$$\bar{T}_n = -\bar{n}\frac{\bar{D}\bar{E}}{2} = -\bar{n}w. \tag{8.31}$$

În consecință, cînd suprafața Σ este paralelă cu liniile de cîmp, $\bar{T}_n$ este o *compresiune* perpendiculară pe liniile de cîmp, în sens contrar normalei exterioare și egală în modul tot cu densitatea de energie.

Dacă se consideră o porţiune de tub de flux, imaginea mecanică a tensiunilor exercitate asupră-i are aspectul din figura 8.10. Tot 1 se produce ca şi cum liniile de cîmp ar exercita o întindere în lungul lor şi o compresiuune laterală, de mărimi egale cu densitatea de energie.

Această imagine permite interpretarea imediată a forţelor dintre două mici corpuri cu sarcini electrice (fig. 8.11 şi 8.12).

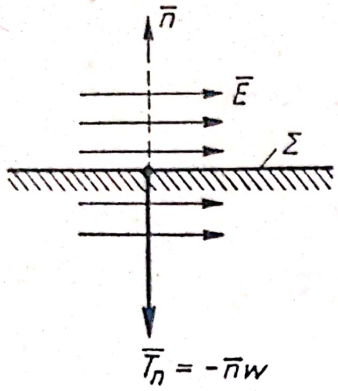


Fig. 8.9.

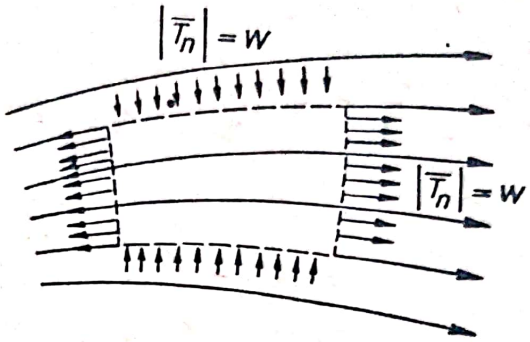


Fig. 8.10.

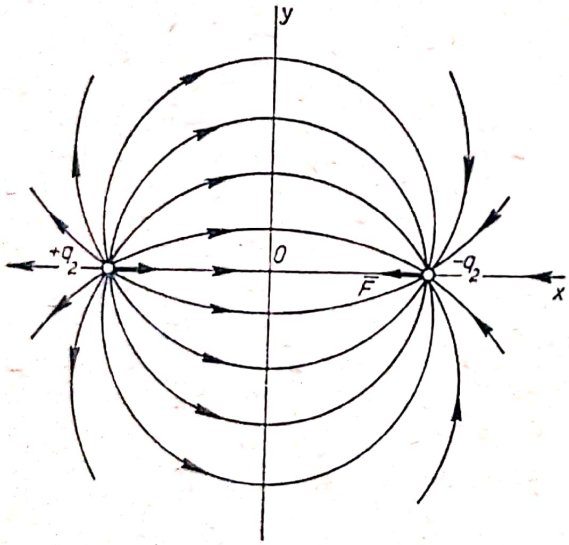


Fig. 8.12.

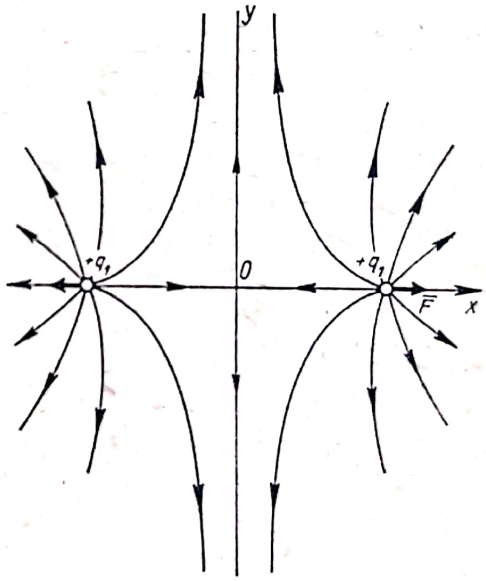


Fig. 8.11.

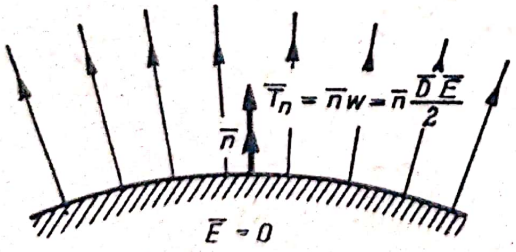


Fig. 8.13.

Suprafaţa Σ este în acest caz considerată ca fiind formată din planul *Oyz* (perpendicular pe figură) care se închide la infinit. Pe suprafaţa de închidere de la infinit contribuţia tensiunilor maxwelliene e nulă (ele se anulează o dată cu E^2 la distanţe mari faţă de sarcini).

— În cazul sarcinilor egale şi de acelaşi semn, liniile de cîmp sînt paralele cu planul *oyz*. Din dreapta se exercită deci, o compresiune asupra semispaţiului stîng (deci şi asupra sarcinii din stînga) şi invers (fig. 8.11): corpurile electrizate se resping.

— În cazul sarcinilor egale şi de semn contrar, liniile de cîmp sînt perpendiculare pe suprafaţa planului *Oyz*. Se exercită în consecinţă întinderi (fig. 8.12): corpurile electrizate se atrag.

Consecință: În cazul suprafeței corpurilor conductoare, fiecare element de suprafață este tras spre exterior cu o forță (numită *presiune electrostatică*) egală numeric cu densitatea de energie electrică (fig. 8.13), deoarece liniile de cîmp sînt perpendiculare pe suprafața conductorului.

În cazul cîmpurilor rapid variabile în timp, interpretările mecaniciste precedente nu sînt, în general, valabile. Interpretarea corectă a mărimii $\overline{T}_n$ este aceea de densitate a fluxului de impuls al cîmpului electromagnetic (mai exact partea ei electrică — v. și parag. 28.6).

9. Metodele electrostaticii

(pentru rezolvarea problemelor de determinare a cîmpului electric)

9.1. Metoda elementară

Această metodă consistă în aplicarea directă a legilor sub forma integrală. Este utilizată cînd cîmpurile prezintă proprietăți de simetrie, care permit stabilirea directă a formei liniilor de cîmp și care au importanță la alegerea suprafețelor închise pentru aplicarea legii fluxului electric sau a curbelor închise pentru aplicarea teoremei potențialului electrostatic. Metoda elementară a fost folosită în paragrafele 3.4, 6.5, 6.8, 7.3, 7.4 etc.

S-a calculat în acest mod, de exemplu, intensitatea cîmpului și potențialului unui fir (par. 3.4.4) încărcat uniform cu $\rho_l = \frac{q}{l}$, densitatea de linie a sarcinii electrice. Relațiile obținute sînt (3.39) și (3.40). Se consideră din nou această problemă, în cazul cînd mediul are permitivitatea ε. Se obține:

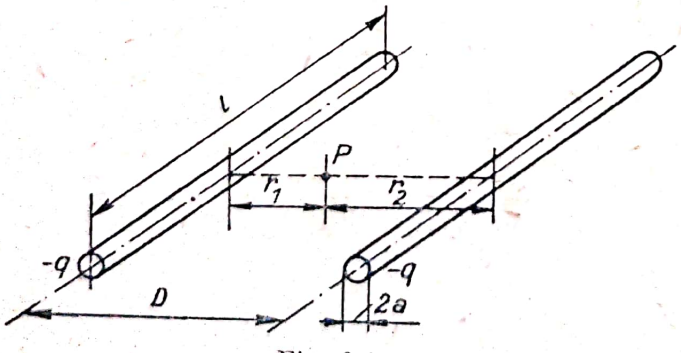


Fig. 9.1.

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{l} \cdot \frac{\overline{r}}{r^2} \qquad (9.1)$$

(în care s-a notat cu $q = l \cdot \rho_l$ sarcina totală a firului)

și

$$V = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{l} \ln r + \text{ct}. \qquad (9.2)$$

în care constanta additivă depinde de alegerea potențialului de referință.

Aplicație. *Capacitatea liniei bifilare depărtate de pămînt.* Se consideră o linie bifilară (fig. 9.1) (cu conductoare subțiri de rază $a \ll D$, unde D este distanța dintre axele lor), unul dintre conductoare fiind încărcat cu $(+q)$, iar celălalt cu $(-q)$. Într-un punct P situat între cele două fire, potențialul este cu (9.2), prin suprapunere:

$$V = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{l} (\ln r_2 - \ln r_1) + \text{ct} = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{l} \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{ct}. \qquad (9.3)$$

Tensiunea între cele două fire rezultă:

$$U = U_{12} = V_1 - V_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{l}\left(\ln\frac{D-a}{a} - \ln\frac{a}{D-a}\right) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\frac{q}{l}\ln\frac{D-a}{a}.$$

Capacitatea sistemului se calculează imediat:

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\pi\varepsilon \cdot 2}{\ln\frac{D}{a}} \tag{9.4}$$

în care s-a considerat $a \ll D$ și $D - a \approx D$.

9.2. Metoda imaginilor electrice

Se aplică în cazul în care există corpuri încărcate în prezența unui conductor de suprafață mai mare. Metoda se bazează pe următorul artificiu: se înlocuiește suprafața conductoare Σ cu un sistem de sarcini (numite imagini) de valori și poziții astfel alese, încît în cîmpul rezultant al sarcinilor reale (q_1, q_2, q_3, ...) și al imaginilor lor (q'_1, q'_2, q'_3, ...), suprafața conductoare să rămînă tot o suprafață echipotențială (fig. 9.2). Această substituție nu modifică condiția de frontieră pentru cîmpul electric dinafara suprafeței Σ care *este același* în ambele cazuri. În felul acesta, problema determinării

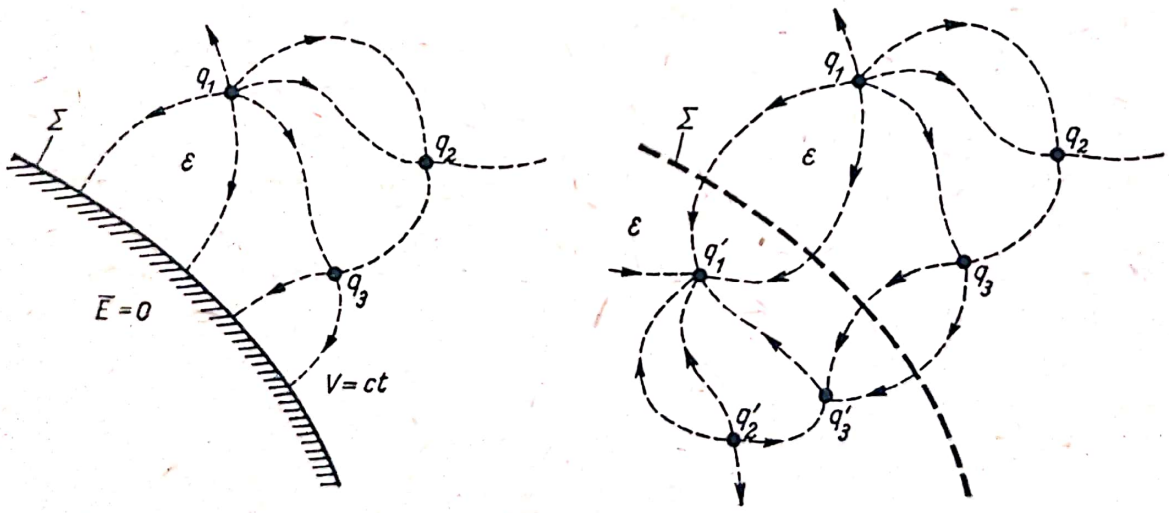


Fig. 9.2.

cîmpului unui sistem de sarcini în prezența unei suprafețe conductoare se înlocuiește cu problema determinării cîmpului unui sistem de sarcini mai complex într-un mediu omogen.

Aplicație. *Calculul capacității de serviciu a unei linii aeriene bifilare simetrice în prezența pămîntului.* Raza firului este a, distanța între fire D; înălțimea față de pămînt R (fig. 9.3); $q_1 = q$; $q_2 = -q$.

Capacitatea de serviciu este o mărime care se folosește în studiul liniilor electrice și care generalizează noțiunea de capacitate a unui condensator în cazul unei perechi de conductoare

în prezența *altor* conductoare. Capacitatea de serviciu este definită de raportul dintre sarcina unuia dintre conductoare și diferența de potențial între acestea:

$$C_{(s)ik}=\frac{q_i}{V_{(s)i}-V_{(s)k}} \tag{9.5}$$

într-un anumit „serviciu" notat cu indicele s (de exemplu, serviciul pentru care suma sarcinilor conductoarelor este nulă). Capacitatea de serviciu se poate defini numai dacă, în serviciul considerat, raportul (9.5) nu depinde decît de configurația geometrică a conductoarelor și nu depinde de potențialele lor. Dacă nu s-ar introduce anumite restricții sau simetrii prin acest serviciu, acest raport ar depinde și de potențialele celorlalte conductoare, cum rezultă din folosirea relațiilor lui Maxwell (7.31).

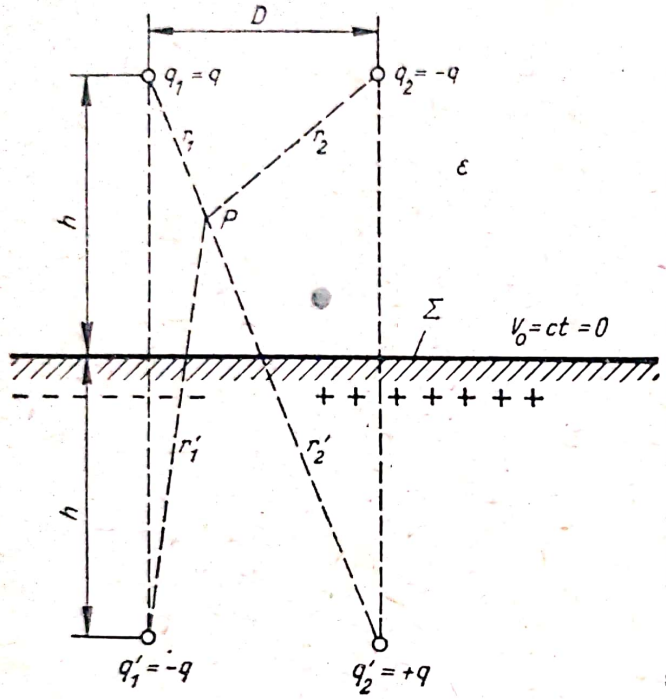


Fig. 9.3.

Metoda imaginilor consistă în înlocuirea pămîntului din punctul de vedere al contribuției lui la producerea cîmpului (pămîntul se încarcă prin influență) cu un sistem de conductoare filiforme (imaginile conductoarelor reale).

Se observă ușor că planul pămîntului rămîne cu potențialul $V=$ ct. $=0$, dacă sarcinile imagini au valorile:

$$q_1'=-q_1=-q \quad \text{și} \quad q_2'=-q_2=q \tag{9.6}$$

și sînt plasate simetric față de plan (fig. 9.3).

În adevăr, într-un punct P potențialul este conform relației (9.3):

$$V_{(P)}=\frac{q_1}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_1'}{r_1}+\frac{q_2}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_2'}{r_2}. \tag{9.7}$$

Dar $q_1=q$ și $q_2=-q$ și deci:

$$V_{(P)}=\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\left(\ln\frac{r_1'}{r_1}-\ln\frac{r_2'}{r_2}\right)=\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\cdot\ln\frac{r_1'r_2}{r_1r_2'} \tag{9.8}$$

și se constată imediat că pe suprafața pămîntului: $r'_1=r_1$, $r'_2=r_2$ și $V=0$. Deoarece cu relația (9.8) se cunoaște potențialul în orice punct se pot calcula:

$$\left.\begin{aligned}V_1&=\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{2h\cdot D}{a\sqrt{(2h)^2+D^2}}\\ V_2&=\frac{q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{a\sqrt{(2h)^2+D^2}}{D\cdot 2h}=-V_1.\end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Capacitatea de serviciu a unui conductor față de pămînt este ($V_0=0$)

$$C_1=\frac{q}{V_1-V_0}=\frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{2h\cdot D}{a\sqrt{(2h)^2+D^2}}}=C_2=\frac{q}{V_2-V_0} \tag{9.10}$$

Pentru a calcula capacitatea între cele două conductoare, în prezenţa pămîntului, se determină:

$$\text{Tensiunea } V_1-V_2=2\ V_1=\frac{q}{\pi\varepsilon\, l}\ln\frac{D\cdot 2h}{a\sqrt{(2h)^2+D^2}} \tag{9.11}$$

deci:

$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=\frac{\pi\varepsilon\, l}{\ln\dfrac{2h\cdot D}{a\sqrt{(2h)^2+D^2}}}. \tag{9.12}$$

Dacă $h\gg D$, $\left(\frac{D}{2h}\right)^2\ll 1$ se obţine relaţia (9.4).

În prezenţa pămîntului capacitatea creşte, deoarece pe lîngă capacităţile parţiale intervin şi capaciţăţile faţă de pămînt.

Observaţii. Relaţiile (9.9) sînt forme particulare ale relaţiilor lui Maxwell (7.29):

$$\left.\begin{aligned} V_1&=\alpha_{11}\,q_1+\alpha_{12}\ q_2=(\alpha_{11}-\alpha_{12})\,q\\ V_2&=\alpha_{21}\,q_1+\alpha_{22}\ q_2=(\alpha_{21}-\alpha_{22})\,q\end{aligned}\right\} \tag{9.9'}$$

în care

$$\alpha_{11}=\frac{1}{2\pi\varepsilon\, l}\ln\frac{2h}{a}=\alpha_{22}$$

$$\alpha_{12}=\frac{1}{2\pi\varepsilon\, l}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+D^2}}{D}=\alpha_{21}. \tag{9.13}$$

În general, pentru un sistem de conductoare filiforme paralele (1,2, ... k .... p ....) în prezenţa pămîntului, coeficienţii de potenţial au expresiile:

$$\alpha_{kk}=\frac{1}{2\pi\varepsilon\, l}\ln\frac{2h_k}{a_k}\ \text{şi}\ \alpha_{kp}=\frac{1}{2\pi\varepsilon\, l}\ln\frac{r'_{pk}}{r_{pk}} \tag{9.14}$$

în care h_k şi $a_k\ll h_k$ sînt înălţimea deasupra solului şi raza conductorului k, r'_{pk} este distanţa de la imaginea conductorului p la conductorul k, iar r_{pk} este distanţa dintre conductoarele p şi k.

9.3. Metoda de aproximare a liniilor de cîmp

Pentru rezolvarea unor probleme de electrostatică se poate aproxima forma liniilor de cîmp, de exemplu prin arce de cerc şi linii drepte, ceea ce permite calculul capacităţilor prin aproximaţie, respectiv calculul forţelor electrostatice prin aproximaţie (pentru detalii asupra acestor metode ca şi asupra celor care mai sînt amintite în continuare se pot consulta: R. R ă d u l e ţ, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I).

9.4. Metoda rezolvării ecuaţiilor Laplace şi Poisson

Problemele de cîmpuri electrostatice, mai complicate, se pot studia în cazul general pe calea rezolvării (în condiţii de frontieră date) a unei ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al II-lea, satisfăcută de potenţialul electro-

static. Ecuația se obține înlocuind expresia $\bar{E}=-\text{grad } V$ (forma locală a teoremei potențialului electrostatic) în forma locală din $\bar{D}=\text{div } \varepsilon \bar{E}=\rho_v$ a legii fluxului electric. Se obține (într-un dielectric omogen), ecuația $-\text{div}(\varepsilon \text{ grad } V)=\rho_v$ sau

$$-\text{div grad } V\equiv -\Delta V\equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial V}{\partial z}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\rho_v$$

sau

$$\Delta V\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho_v \tag{9.15}$$

Simbolul $\Delta\equiv\text{div grad}$ se citește uneori „laplacian de ...“

Această ecuație se numește *ecuația lui Poisson* și se verifică imediat că o soluție a ei (v. par. 25.2) este dată de expresia potențialului coulombian.

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\frac{\rho_v dv}{R} \tag{9.16}$$

Dacă sarcinile lipsesc în dielectric, ecuația potențialului devine:

$$V\equiv\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{9.15'}$$

și se numește *ecuația lui Laplace* (stabilită de acesta în 1782 pentru potențialul cîmpului de gravitație). Rezolvarea ecuației lui Laplace, în condiții de frontieră date, constituie una dintre problemele fundamentale ale fizicii matematice și se poate efectua de la caz la caz cu metode exacte (metoda suprapunerii soluțiilor, metoda separării variabilelor, metoda funcțiilor analitice, metoda reprezentării conforme etc.) sau numai aproximative (v. R. Rădulet, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I).

Electrocinetica

Electrocinetica cuprinde studiul conductoarelor care nu sînt în echilibru electrostatic, ci sînt parcurse de curent electric de conducţie, ceea ce se pune în evidenţă experimental şi prin dezvoltarea de căldură care se produce în aceste conductoare.

În cazul echilibrului electrostatic era valabilă relaţia (5.40). La sfîrşitul par. 5.5 s-a arătat că această condiţie provine dintr-o compensare statistică a mişcărilor particulelor elementare încărcate. În electrocinetică, compensarea nu se mai produce şi mişcările acestor particule cu o componentă ordonată: curentul electric.

Experienţele de electrocinetică permit să se împartă conductorii în două categorii:

— *conductori de specia I* (de primul ordin), în care la trecerea curentului electric nu se produc reacţii chimice (metale, semiconductori, cu conducţie electronică);

— *conductori de specia II-a* (de al doilea ordin) în care la trecerea curentului electric se produc reacţii chimice (electroliţi, cu conducţie ionică).

Această clasificare va fi adesea folosită în cele ce urmează.

10. Tensiunea electromotoare şi tipuri de cîmpuri imprimate

10.1. Tensiunea electromotoare

Integrala de linie a sumei dintre intensitatea cîmpului electric şi intensitatea cîmpului electric imprimat în lungul unei curbe închise:

$$u_e = e = \oint_\Gamma (\bar{E} + \bar{E}_i)\, \overline{ds} \tag{10.1}$$

se numeşte *tensiune electromotoare de contur* (t.e.m. de contur) se măsoară în aceleaşi unităţi ca tensiunea electrică şi se notează cu simbolul u_e sau e.

Scanned with OKEN Scanner

Interpretarea energetică a acestei mărimi se obține din relația

$$u_e=\frac{1}{q_m}\oint_\Gamma(\bar{F}_{el.}+\bar{F}_{neel.})\,\overline{ds}=\frac{L_\Gamma}{q_m} \tag{10.2}$$

în care s-a folosit expresia (5.18).

T.e.m. de contur este deci egală numeric cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă (electrică și neelectrică) exercitată asupra unei particule de sarcină unitate, cînd particula se mișcă pe un drum închis. În multe lucrări, tensiunea electromotoare este numită *forță electromotoare* (f.e.m.).

În cazul echilibrului electrostatic, $u_e=0$ pentru orice contur închis care trece prin conductoare, deoarece în fiecare punct $\bar{E}+\bar{E}_i=0$ (condiția de echilibru electrostatic 6.40). Dacă intensitatea cîmpului imprimat are însă o astfel de valoare încît $u_e\neq0$ cel puțin de-a lungul unui contur dus prin conductor, echilibrul electrostatic nu se poate menține într-un circuit conductor închis și în acest circuit apare un curent electric.

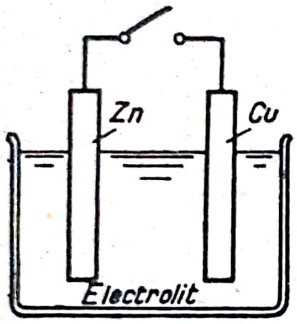


Fig. 10.1.

Se consideră un sistem de trei conductoare, dintre care doi metalici și unul electrolitic (fig. 10.1), care constituie o pilă galvanică. Dacă se leagă electrozii cu un fir conductor exterior, apare un curent electric. Dacă se întrerupe firul, se stabilește din nou echilibrul electrostatic.

Dacă starea electrică este staționară, sarcinile electrice au o repartiție invariabilă și cîmpul electric $\bar{E}$ produs este un cîmp coulombian. Ținînd seama că în acest caz e valabilă teorema potențialului $\oint_\Gamma \bar{E}\,\overline{ds}=0$, conform relației (6.23), rezultă că:

$$u_e=e=\oint_\Gamma \bar{E}_i\,\overline{ds} \tag{10.3}$$

deci t.e.m. este dată numai de cîmpul imprimat.

Integrala de linie a intensității cîmpului electric imprimat în lungul unei curbe deschise sau închise se numește *tensiune imprimată*:

$$e_i=\int_{A(C)}^{B}\bar{E}\,\overline{ds}. \tag{10.4}$$

Ca și în cazul tensiunii electrice, trebuie precizată și pentru tensiunea imprimată curba C, de-a lungul căreia se integrează.

Se numește *intensitate a cîmpului electric în sens larg* suma dintre intensitatea cîmpului electric și intensitatea cîmpului electric imprimat:

$$\bar{E}_l=\bar{E}+\bar{E}_i. \tag{10.5}$$

Prin opoziție cu această denumire, intensitatea cîmpului electric $\bar{E}$ se mai numește uneori și *intensitatea cîmpului electric în sens restrîns.*

Dacă starea electrică nu este staționară, cîmpul electric (în sens restrîns) poate fi descompus într-un cîmp coulombian de intensitate $\bar{E}_c$ și un cîmp electric indus $\bar{E}_s$ care poate fi produs prin variația în timp a unui cîmp magnetic, după cum se va arăta ulterior (v. par. 22 legea inducției electromagnetice). Acest din urmă cîmp este un cîmp solenoidal (se numește cîmp solenoidal un cîmp de vectori cu divergența nulă). În acest caz, mai general, relația (10.3) devine:

$$u_e = e = \oint_\Gamma (\bar{E}+\bar{E}_i)\overline{ds} = \oint_\Gamma (\bar{E}_c+\bar{E}_s+\bar{E}_i)\overline{ds} = \oint_\Gamma (\bar{E}_s+\bar{E}_i)\overline{ds} \qquad (10.3')$$

deoarece

$$\oint_\Gamma \bar{E}_c\overline{ds} = 0.$$

În cazul în care sursele de energie sînt caracterizate prin prezența unor cîmpuri electrice imprimate, iar $\bar{E}_s=0$, t.e.m. se reduce la tensiunea cîmpului electric imprimat, relația (10.3), care diferă de zero numai în zonele de neomogeneitate din interiorul surselor. În acest caz, t.e.m. a cîmpului imprimat este localizată exclusiv de-a lungul curbei în dreptul căreia există stările care condiționează cîmpul electric imprimat.

Folosind descompunerea intensității cîmpului electric într-o componentă potențială (cîmpul coulombian $\bar{E}_c$) și una solenoidală (cîmpul indus $\bar{E}_s$), se definește tensiunea electromotoare și pentru porțiuni deschise de circuit prin relația:

$$u_{e_{AB}} = e_{AB} = \int_A^B (\bar{E}_s+\bar{E}_i)\overline{ds}. \qquad (10.1')$$

Tensiunea electromotoare este deci integrala de linie a părții necoulombiene din cîmpul electric în sens larg. Ea depinde, în general, de drumul de integrare și se reduce la tensiunea imprimată în cazul $\bar{E}_s=0$ (regim staționar)

În cele ce urmează vor fi prezentate simplificat unele cauze fizice de apariție a cîmpurilor imprimate, care pot fi localizate într-un întreg domeniu spațial (cîmpuri imprimate de volum) sau numai pe anumite suprafețe de discontinuitate (cîmpuri imprimate pe interfețe sau de contact).

10.2. Cîmpuri imprimate de volum

10.2.1. Cîmpuri imprimate de accelerație. Dacă se rotește un disc metalic în jurul unei axe perpendiculare pe centrul său, cu viteza de rotație ω (fig. 10.2), electronii fiind supuși forței centrifuge se deplasează spre marginea discului. Deci periferia discului se încarcă negativ, iar centrul se încarcă pozitiv. Forța neelectrică care acționează asupra unui electron este forța centrifugă:

$$F_{neel.} = mr\omega^2\bar{u}$$

în care: m este masa electronului, iar $\bar{u}$ versorul în sensul razei dirijat spre periferie.

Scanned with OKEN Scanner

Din punctul de vedere electric, această forță determină un cîmp electric imprimat de intensitate:

$$\bar{E}_i = \frac{\bar{F}_{neel.}}{q_m} = \frac{m\omega^2 r}{q_m}\bar{u} \tag{10.6}$$

în care q_m este sarcina electronului.

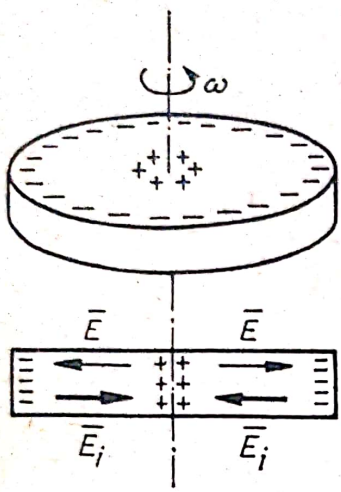


Fig. 10.2.

Dacă se ține seama că sarcina electronului este negativă, $q_m = -q_0$, expresia din relația (10.4) devine:

$$\bar{E}_i = -\frac{rm\omega^2}{q_0}\bar{u} = -\frac{\bar{F}_{neel.}}{q_0}. \tag{10.7}$$

$\bar{E}_i$ este deci dirijat spre centrul discului. Echilibrul electrostatic se atinge cînd forța, datorită cîmpului electric $\bar{E}$, produs chiar de încărcarea discului prin centrifugarea electronilor, compensează acțiunea forței centrifuge. Condiția de echilibru este dată de relația (4.40), adică de relația:

$$\bar{E} = -\bar{E}_i. \tag{10.8}$$

În consecință, din momentul în care particulele libere se pun în mișcare, pînă în momentul stabilirii echilibrului electrostatic, apare în disc un curent tranzitoriu de foarte scurtă durată.

10.2.2. **Cîmp imprimat de concentrație (de difuziune).** Acest cîmp imprimat se produce dacă există o neomogenitate a concentrației electrolitului aflat în interiorul unui vas (fig. 10.3).

În regiunea în care electrolitul este mai concentrat, numărul de ioni este mai mare. Se produce un fenomen de difuziune prin peretele poros care tinde să egalizeze concentrația. Sub acțiunea forțelor medii neelectrice, datorite neomogenității (ciocnirile din diferitele direcții la care e supusă o particulă nu se mai compensează), tind să treacă prin perete atît ionii pozitivi, cît și cei negativi. Mobilitatea, și deci viteza de difuziune nu este însă identică pentru toți ionii. Ca urmare, regiunea dintr-o parte a peretelui se încarcă pozitiv, iar regiunea din cealaltă parte se încarcă negativ. De exemplu, în cazul HCl, ionii H^+ au o mobilitate mai mare decît ionii Cl^-. În final, se obține o încărcare pozitivă a soluției diluate și o încărcare negativă a soluției concentrate, deoarece spre soluția diluată trec mai mulți ioni H^+, decît ioni Cl^-. Prin încărcarea electrolitului apare un cîmp electric $\bar{E}$, a cărui acțiune se opune continuării difuziunii și curentul de încărcare încetează la atingerea echilibrului electrostatic dat de relația (10.8).

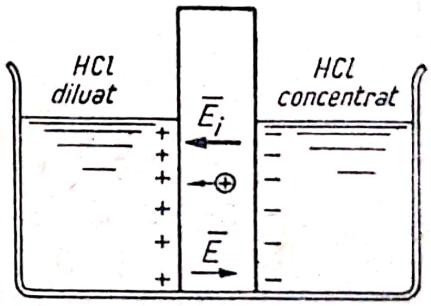


Fig. 10.3.

10.2.3. **Cîmpuri imprimate termoelectrice de volum.** Dacă se încălzește neuniform un corp metalic, asupra electronilor se exercită o forță medie neelectrică, datorită necompensării ciocnirilor dintre particule. Cîmpul imprimat $\bar{E}_i = -\frac{\bar{F}_{neel.}}{q_0}$, care corespunde acestei forțe, este indicat în figura 10.4. În consecință, electronii sînt transportați în regiunea de temperatură $T_2 < T_1$ care se încarcă negativ, iar regiunea încălzită rămîne încărcată pozitiv. Prin încărcarea corpului se produce un cîmp electric $\bar{E}$, a cărui acțiune se opune mișcării electronilor, pînă la realizarea echilibrului electrostatic în conformitate cu relația (10.8). Aceste cîmpuri imprimate sînt extrem de slabe și pot fi puse în evidență numai prin anumite efecte ale lor (v. efectul Thomson (par. 12.4)).

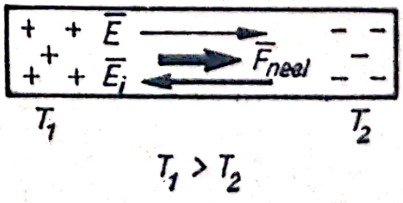


Fig. 10.4.

10.3. Cîmpuri imprimate de contact (pe interfeţe)

Aceste cîmpuri sînt localizate în stratul de neomogenitate, foarte subţire, care separă cele două conductoare în contact.

Se consideră două conductoare neîncărcate 1 şi 2, puse în contact unul cu altul (fig. 10.5). Se constată experimental existenţa unui cîmp electric foarte intens în stratul de contact dintre cele două conductoare, pus în evidenţă de apariţia unei diferenţe de potenţial $(V_2 - V_1)$ între cele două conductoare.

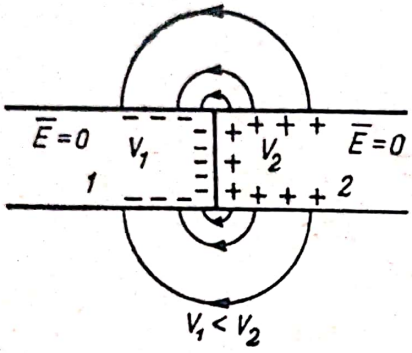


Fig. 10·5.

Din punctul de vedere microscopic, explicaţia fenomenului este următoarea: asupra particulelor elementare din stratul de neomogenitate se exercită forţe neelectrice datorită agitaţiei termice. Din cauza neomogenităţii materialului, aceste forţe nu se compensează

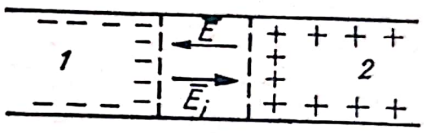


Fig. 10.6.

în medie (ciocnirile între particule nu se produc simetric în cele două direcţii). Cîmpul electric imprimat corespunzător forţei rezultante medii este foarte intens; el se localizează într-un domeniu plat cu una din dimensiuni foarte mică, şi este caracterizat prin integrala:

$$e_{12} = \int_1^2 E_i \cdot ds \tag{10.9}$$

numită *tensiune imprimată de contact*.

În primul moment al contactului, particulele elementare (de exemplu electronii din conductorii de primul ordin) supuse acţiunii forţelor neelectrice trec dintr-un conductor în celălalt. Separarea sarcinilor determină apariţia unui cîmp electric $\bar{E}$, care opreşte continuarea trecerii curentului de particule (fig. 10.6). Se stabileşte echilibrul electrostatic, condiţionat de relaţia (10.8). Din relaţia (10.8) şi (10.9) rezultă:

$$e_{12} = -\int_1^2 \bar{E} \cdot ds = -U_{12} = V_2 - V_1 = U_{21}. \tag{10.10}$$

La trecerea prin stratul de contact a două conductoare se întîlneşte o diferenţă de potenţial egală şi de semn contrar cu tensiunea imprimată de contact.

În cele ce urmează se vor indica cîteva situaţii în care se formează cîmpuri imprimate de contact şi în care apar asemenea diferenţe de potenţial numite şi *tensiuni de contact* sau *potenţiale de contact*.

10.3.1. Cîmpuri imprimate voltaice. Cîmpurile imprimate de contact care se produc la contactul a două metale care se găsesc la aceeaşi temperatură şi nu sînt supuse acţiunii vreunui agent extern (radiaţii etc.) se numesc cîmpuri imprimate voltaice. Aceste cîmpuri au fost studiate de fizicianul italian Alessandro Volta (efectul Volta).

Tensiunea voltaică: $u_{12} = -e_{12}$ depinde numai de natura metalelor şi de temperatură.

Conductorii de prima specie se pot ordona într-un şir în care orice conductor adus în contact cu un conductor care îl precede se încarcă pozitiv, iar adus în contact cu un conductor care îl urmează se încarcă negativ. Cîţiva termeni ai acestui şir (seria voltaică) sînt: (+) Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd (—).

Cîmpurile imprimate voltaice satisfac *legea cîmpurilor imprimate voltaice*, care este o lege de material:

T.e.m. a cîmpurilor imprimate este nulă pentru orice contur închis Γ dus prin conductori metalici situați la aceeași temperatură și sustrași oricărei alte acțiuni fizice din exterior:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E}_i \cdot \overline{ds} = 0. \tag{10.11}$$

Dacă, de exemplu, se consideră un circuit închis format din n metale diferite, relația (10.11) se explicitează astfel:

$$e_{12} + e_{23} + \cdots + e_{n_1} = 0 \tag{10.12}$$

O consecință imediată este constatarea că nu se poate obține o mișcare a particulelor elementare pe drumuri închise (curent electric continuu) cu ajutorul cîmpurilor imprimate voltaice.

Observație. Legea exprimată prin relația (10.11) este o consecință a celui de-al doilea principiu al termodinamicii, care exprimă imposibilitatea de a produce lucru mecanic în procese ciclice folosind căldura de la o singură sursă de temperatură invariabilă, cum este considerată temperatura ambiantă în cazul acestor cîmpuri imprimate.

În adevăr, dacă în cazul cîmpurilor voltaice $e_\Gamma \neq 0$, s-ar efectua lucrul mecanic $L_\Gamma = q_m e_\Gamma$ la fiecare deplasare a unei particule elementare de sarcină q_m de-a lungul unei curbe închise Γ. Cum conductoarele sînt de specia I, în ele nu se produc reacții chimice și nici o altă transformare de energie decît transformarea căldurii, luată de la mediul ambiant aflat la aceeași temperatură, în lucru mecanic, ceea ce ar contrazice principiul al II-lea al termodinamicii.

Pentru a produce tensiuni electromotoare rămîn trei posibilități:

— realizarea unei temperaturi neuniforme;

— introducerea în circuitul închis a unor conductori de specia a II-a — electroliți în care se pot produce reacții chimice;

— exercitarea unor acțiuni fizice din exterior (de exemplu iradierea cu lumină).

Aceste trei posibilități se vor examina în paragrafele următoare.

10.3.2. **Cîmpuri imprimate termoelectrice de contact** (efectul Seebeck).

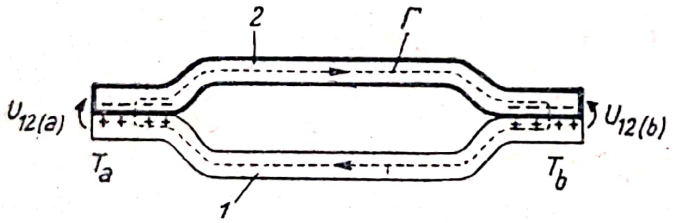


Fig. 10.7.

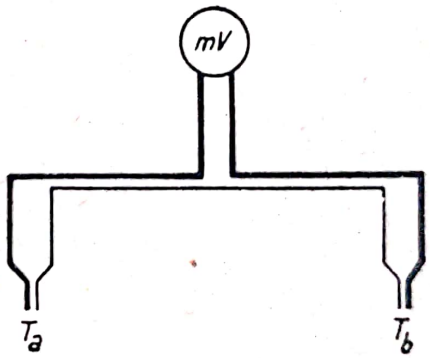


Fig. 10.8.

Dacă se formează un circuit conductor închis, sudînd la capete două conductoare din materiale diferite (de exemplu constantan — fier) și se țin cele două suduri la temperaturi diferite ($T_a > T_b$), în circuit apare un curent electric.

În adevăr, tensiunile imprimate de contact care apar în cele două suduri sînt diferite (fig. 10.7), și se obține o t.e.m. de contur diferită de zero:

$$e_\Gamma = \oint_{\Gamma} \overline{E}_i \, \overline{ds} = \int_{1(a)}^{2} \overline{E}_i \overline{ds} + \int_{2(b)}^{1} \overline{E}_i \overline{ds} = e_{12}(T_a) + e_{21}(T_b)$$

sau:

$$e_\Gamma = e_{12}(T_a) - e_{12}(T_b) \neq 0 \tag{10:13}$$

Circuitul acesta formează un *termocuplu*. Aceste termocupluri se utilizează pentru determinarea diferenței de temperatură prin măsura tensiunii cu un milivoltmetru (fig. 10.8).

Industrial se folosesc termocupluri din tabela 10.1.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 10.1

Termocuplul	Temperatura maximă de utilizare	Tensiunea electromotoare ce se obţine pentru $T_a - T_b = 100°C$
Constantan — cupru	500°C	5 mV
Constantan — cromnichel	900°C	6,2 mV
Constantan — fier	900°C	5,1 mV
Nichel — cromnichel	(de la 300°C) 1 000°C	4,1 mV
Platin — platinrodiu	(de la 600°C) 1 600°C	0,9 mV
Iridiu — iridiurodiu	2 000°C	0,5 mV
Wolfram — wolframmolibden	3 000°C	0,3 mV

10.3.3. **Cîmpuri imprimate galvanice.** Se consideră lanţul de conductoare constituit din:
— două conductoare metalice diferite (de exemplu: zinc şi cupru, fig. 10.9);
— un electrolit (de exemplu, o soluţie diluată de acid sulfuric).

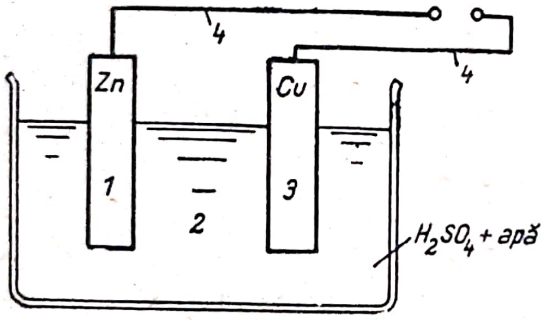


Fig. 10.9.

Conductoarele 1 şi 3 sînt de specia I; conductorul 2 este de specia a II-a. Cele trei conductoare din figura 10.9 formează o *pilă galvanică* (un element galvanic), numită astfel de A. Volta în cinstea medicului italian L. Galvani, descoperitorul acestui tip de surse de t.e.m.

Se numesc cîmpuri imprimate galvanice, cîmpurile imprimate care se produc la contactul între un metal (conductor de specia I) şi un electrolit (conductor de specia a II-a).

Dacă se închide circuitul pilei cu un al patrulea conductor, se constată experimental că starea electrostatică nu se mai menţine şi apare o t.e.m. de contur:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{E}_i \cdot d\bar{s} = e_{12} + e_{23} + e_{34} + e_{41} \neq 0 \qquad (10.14)$$

Ultimii doi termeni sînt tensiuni de contact voltaice (dintre conductoarele de specia I, temperatura fiind uniformă) şi îndeplinesc condiţia:

$$e_{34} + e_{41} = e_{31} \qquad (10.15)$$

conform relaţiei (10.12).

Deci:

$$e_\Gamma = e_{12} + e_{23} + e_{31} \qquad (10.16)$$

este t.e.m. a elementului galvanic (v. par. 15.3).

Observaţie. Într-o prezentare simplificată, apariţia tensiunii de contact galvanice poate fi exemplificată cu ajutorul presiunii osmotice şi al presiunii de dizolvare.

Dacă se introduce un conductor de specia I într-o soluţie electrolitică în care existau în prealabil ioni pozitivi ai metalului respectiv, pot apărea următoarele două situaţii:

a. Presiunea de dizolvare a metalului (care măsoară tendinţa de a trimite în soluţie ioni pozitivi) este mai mare decît presiunea osmotică a ionilor lui din electrolit. Se poate recunoaşte experimental prezenţa unui cîmp electric imprimat, consecinţă a forţelor care acţionează asupra ionilor. În acest caz, ionii pozitivi părăsesc metalul, care rămîne încărcat negativ, iar soluţia se încarcă pozitiv. Se stabileşte astfel un cîmp electric în stratul de contact, dirijat spre metal, care se opune continuării trecerii ionilor pozitivi în soluţie (cazul conductorului de zinc introdus într-o soluţie de $ZnSO_4$ — sulfat de zinc — fig. 10.10).

b Presiunea de dizolvare a metalului este mai mică decît presiunea osmotică a ionilor lui din electrolit. În consecință, metalul se încarcă pozitiv și soluția rămîne încărcată negativ prin trecerea ionilor pozitivi din soluție în metal. Cîmpul electric care se opune trecerii în continuare a ionilor este dirijat spre electrolit (cazul conductorului de cupru introdus într-o soluție de $CuSO_4$ — sulfat de cupru — fig. 10.11).

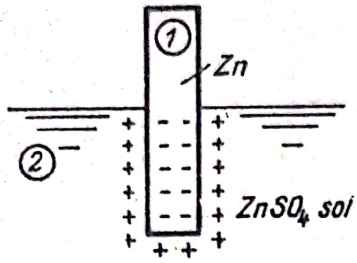


Fig. 10.10.

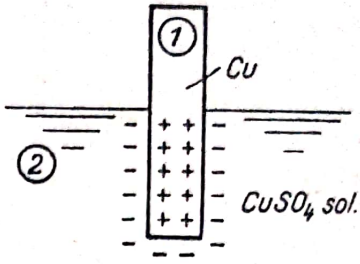


Fig. 10.11.

O pilă galvanică se compune, în general, dintr-un vas împărțit în două celule printr-un perete poros. Fiecare celulă conține cîte un electrod conductor diferit, într-o baie electrolitică în care poate exista fluidul său ionic pozitiv (v. și par. 15).

10.3.4. **Cîmpuri imprimate fotovoltaice** (efect fotoelectric intern cu strat de baraj). Cîmpurile imprimate, care se produc la suprafața de separație dintre un semiconductor și un metal sub acțiunea luminii ce cade pe această suprafață, se numesc cîmpuri imprimate fotovoltaice. Energia fotonilor incidenți este comunicată electronilor, dar, deoarece stratul de separație are proprietăți de conductibilitate unidirecționale (strat de baraj), electronii trec mai ușor într-un sens decît în celălalt. Această disimetrie este echivalentă existenței unor forțe neelectrice medii necompensate în cele două sensuri, adică unui cîmp imprimat. Se pot realiza astfel *foloelemente*. Teoria exactă a acestor cîmpuri imprimate ia în considerare efectele cuantice care au o contribuție esențială.

Fotoelementele sînt folosite în prezent cu succes la alimentarea cu energie electrică a sateliților artificiali.

11. Starea electrocinetică și caracterizarea ei

11.1. Starea electrocinetică

Se consideră un element galvanic P (fig. 11.1) cu bornele *1*, 2., al cărui circuit exterior se poate închide în exterior printr-un lanț din conductoare diferite cu ajutorul unui întreruptor I. Pentru exemplificare, se presupune că acest circuit exterior cuprinde: un fir subțire și lung bobinat pe un suport și așezat într-un calorimetru K; un voltametru V constituit din doi electrozi de aceeași natură (de exemplu din argint), cufundați într-un electrolit (de exemplu, o soluție diluată de azotat de argint în apă); o lampă cu incandescență L; o bară MN rigidă și mobilă care poate aluneca fără frecare și fără să se întrerupă circuitul pe două bare de contact paralele; etc.

Dacă se închide circuitul cu întreruptorul I, se constată experimental că lanțul de conductori ajunge într-o stare nouă, diferită de starea de echilibru

electrostatic şi numită *stare electrocinetică*, însoţită de numeroase efecte, dintre care cele mai importante sînt:

a) efectele mecanice — exercitare de forţe şi momente asupra porţiunilor de conductori care se găsesc în stare electrocinetică (de exemplu, forţa F asupra barei MN);

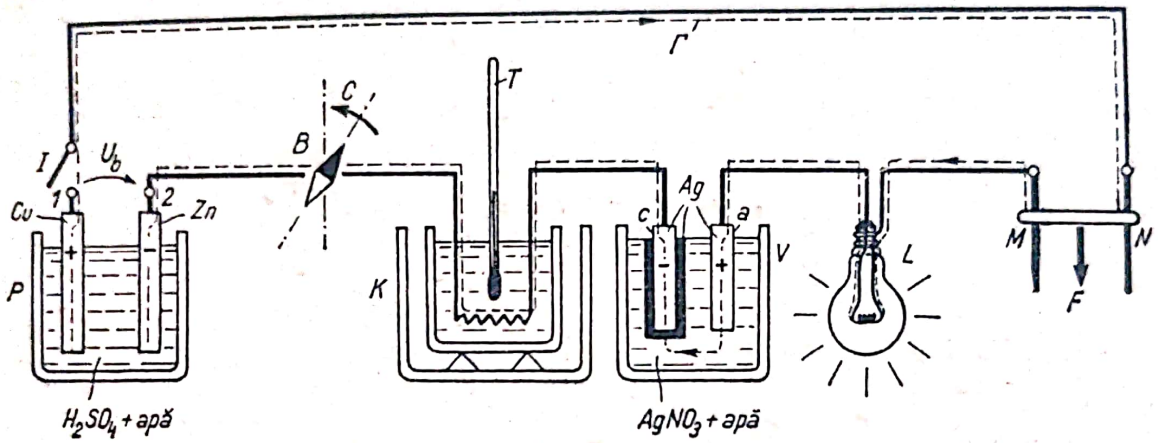


Fig. 11.1.

— exercitare de forţe şi momente asupra corpurilor magnetizate care sînt aduse în prezenţa conductoarelor aflate în stare electrocinetică (de exemplu cuplul C asupra acului magnetic al busolei B). Efectele mecanice pun în evidenţă faptul că prin aducerea conductoarelor în stare electrocinetică se produce în jurul lor un cîmp, care se numeşte *cîmp magnetic*. Cîmpul magnetic este, alături de cîmpul electric prezentat în electrostatică, unul dintre aspectele fundamentale ale cîmpului electromagnetic şi va fi studiat în electrodinamică;

b) efectele chimice — reacţii de descompunere a soluţiilor de electroliţi, adică reacţii de electroliză (de exemplu, în voltametrul V), în urma cărora pe electrodul legat la polul negativ (catodul c) al voltametrului se depune metalul (de exemplu argintul) provenit din descompunerea soluţiei, iar electrodul legat la polul pozitiv (anodul a) se dizolvă în soluţie;

c) efectele calorice — dezvoltare de căldură în conductoarele (electrocalorice) parcurse de curent (de exemplu în firul bobinat cufundat în calorimetrul K);

d) efectele luminoase — în lămpile electrice cu incandescenţă (de exemplu în lampa L) sau cu descărcări în gaze (în primul caz, efectele luminoase însoţesc efectele termice începînd de la atingerea unei temperaturi suficient de mari).

Efectele enumerate caracterizează atît stările electrocinetice staţionare, cît şi pe cele nestaţionare. În cazul stărilor nestaţionare, la efectele enumerate se adaugă şi:

e) efectele electrice — variaţia sarcinii electrice a conductoarelor care se găsesc în stare electrocinetică variabilă în timp. Dacă, de exemplu, armăturile unui condensator încărcat sînt reunite printr-un fir exterior, sistemul de conductoare ajunge în stare electrocinetică, în timp ce sarcinile armăturilor variază (scad în valoare absolută).

În condiţii în rest egale, dacă se inversează legăturile la electrozii elementului galvanic, efectele chimice şi (în parte) cele mecanice îşi schimbă sensul,

pe cînd efectele calorice și luminoase (cu puține excepții) rămîn neschimbate. Conductoarele în stare electrocinetică prezintă deci o anumită polaritate, pe care aceste efecte termice și luminoase nu o pot pune în evidență.

Din punctul de vedere macroscopic, aducerea lanțului de conductoare considerat (a circuitului electric închis cu ajutorul întreruptorului *I*) în stare electrocinetică este o consecință a faptului că tensiunea electromotoare este, în general, diferită de zero în cazul unui contur închis Γ (fig. 11), care trece printr-un lanț de conductori diferiți de prima specie, în care este intercalat un conductor de a doua specie (electrolitul elementului galvanic *P*).

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\overline{E} + \overline{E}_i) d\overline{s} = \oint_r \overline{E}_i d\overline{s} \neq 0 \qquad (11.1)$$

conform cu (10.14). Această relație (în care s-a ținut seama și de caracterul potențial al cîmpului electric punînd $\oint_\Gamma \overline{E} d\overline{s} = 0$) e incompatibilă cu condiția de echilibru electrostatic (5.12), care ar fi cerut ca $\overline{E} + \overline{E}_i = 0$ în fiecare punct al curbei Γ (care trece numai prin conductoare cînd circuitul e închis). La închiderea circuitului, echilibrul electrostatic nu se mai poate deci menține și se obține:

$$\overline{E} + \overline{E}_i \neq 0. \qquad (11.1')$$

Această inegalitate reprezintă local condiția ca un conductor să se găsească în stare electrocinetică.

Din punctul de vedere microscopic, relația aceasta (11.1′) exprimă faptul că forța medie care se exercită asupra particulelor încărcate libere din conductor este diferită de zero, ceea ce determină o mișcare ordonată față de restul conductorului a acestor particule (electroni în metale, ioni în electroliți). Rezultă că, din acest punct de vedere, starea electrocinetică consistă în mișcarea ordonată, relativă la conductor, a particulelor microscopice libere, purtătoare de sarcină electrică. Deoarece un ansamblu de particule încărcate electric, în mișcare, se numește *curent electric* (în înțelesul mai general al acestui termen — cel de fenomen fizic — și deosebit de înțelesul mai restrîns al acestui termen — cel de mărime: intensitatea curentului electric) se poate spune că un conductor în stare electrocinetică e parcurs de *curent electric de conducție* (a se vedea și par. 11.5 privitor la curentul electric de convecție).

Se consideră drept *sens al curentului electric* sensul de mișcare al particulelor libere încărcate pozitiv, respectiv sensul opus sensului de mișcare al particulelor libere încărcate negativ. Se constată experimental că efectele mecanice, termice și electrice ale unui curent de sens dat nu depind de semnul sarcinii particulelor care îl constituie. În metale, unde sînt libere numai particulele negative (electronii), sensul curentului e, deci, opus sensului de mișcare. În electroliți, unde sînt libere atît particule pozitive (anionii, care se îndreaptă spre anod), cît și cele negative (cationii, care se îndreaptă spre catod), sensul curentului e bine determinat, deși sensurile de mișcare sînt diferite la cele două tipuri de particule.

Scanned with OKEN Scanner

11.2. Intensitatea curentului electric de conducție

Caracterizarea cantitativă a stării electrocinetice se face cu ajutorul mărimii scalare numită *intensitatea curentului electric de conducție*, referitoare totdeauna la o anumită suprafață (secțiune) dusă printr-un conductor și definită pe baza interpretării microscopice a curentului drept *viteză de transmisie a sarcinii electrice* prin suprafața considerată, de către particulele încărcate, în mișcare față de conductor. Mai exact, intensitatea curentului (notată cu i) e limita raportului dintre suma algebrică a sarcinilor electrice (Δq_m) ale particulelor microscopice libere care traversează secțiunea conductorului într-un anumit interval de timp și durata (Δt) a intervalului, cînd ultima tinde către zero:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta q_m}{\Delta t} = \frac{dq_m}{dt} \tag{11.2}$$

Această definiție presupune alegerea unui *sens de referință* al curentului (arbitrar) în care trebuie să se miște particulele pozitive (respectiv împotriva căruia trebuie să se miște particulele negative) pentru ca sarcina lor să intre cu semnul + în suma Δq_m. Mărimea i este, deci, pozitivă, respectiv negativă după cum sensul curentului coincide, respectiv nu coincide, cu sensul de referință arbitrar ales.

Această definiție microscopică a intensității curentului nu e satisfăcătoare din punctul de vedere macroscopic, deoarece nu corespunde unei posibilități de măsurare — cu mijloace experimentale obișnuite — a acestei mărimi. Ținîndu-se seama că (în acord cu interpretarea microscopică a fenomenelor de electroliză — par. 15 — și cu faptul că raportul dintre sarcina electrică și masa de repaus a unei particule elementare e invariabil) viteza de depunere la catod a masei de metal, în procesul de electroliză, e proporțională cu viteza de transmisiune a sarcinii electrice microscopice prin voltametre (adică cu intensitatea curentului), s-a ales pentru definirea macroscopică a acestei mărimi relația:

$$i = k_0 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m_{Ag}}{\Delta t} \tag{11.3}$$

În această relație Δm_{Ag} este masa de argint care s-ar depune în timpul Δt la catodul unui voltametru cu soluție diluată de azotat de argint ($AgNO_3$), intercalat în circuitul al cărui curent se măsoară, iar k_0 este o constantă universală, care depinde de alegerea unităților de masă, de timp și de curent electric.

În exprimarea uzuală, în loc de intensitatea curentului electric se spune scurt curent electric (al doilea sens al acestui termen) sau numai curent.

11.3. Unitățile de intensitate a curentului electric

În toate sistemele curente de unități de măsură, unitățile de sarcină electrică și de intensitate a curentului electric se aleg astfel ca în relația (11.2) să nu apară nici un coeficient numeric de proporționalitate. Unitatea de intensitate a curentului electric este deci intensitatea curentului care transmite (prin secțiunea unui conductor) unitatea de sarcină în unitatea de timp. În sistemul MKSA unitatea de curent se numește *amper* (A) sau coulomb pe secundă, în sistemul CGS es unitatea de curent se numește *franklin* pe secundă (Fr/s) în sistemul CGS em unitatea de curent se numește *biot* (Bi) sau decaamper, între aceste unități existînd relațiile:

$$1\ \mathrm{A}=1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}=3.10^{9}\ \frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{s}}=10^{-1}\ \mathrm{Bi} \tag{11.4}$$

$$1\ \mathrm{Bi}=10\ \mathrm{A}=3.10^{-10}\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{s}}.$$

Cum în sistemul MKSA amperul este o unitate fundamentală (ca și biot-ul în sistemul CGS em) a fost necesar ca pentru amper (sau — ceea ce este tot una- pentru decaamper = biot) să se dea o *reprezentare în concret* (etalonul de curent). Această unitate concretă — numită uneori, pentru precizare, *amper absolut* — se stabilește pe baza efectelor mecanice ale curentului electric, adică pe baza forțelor electrodinamice care se exercită între conductoarele parcurse de curent și va fi prezentată în detaliu în cadrul electrodinamicii (v. paragraf 16.4). Cu această unitate concretă, măsurînd masa de argint depusă într-o secundă într-un voltametru, se poate determina experimental valoarea constantei k_0 din relația (11.3).

În trecut s-a măsurat și s-a adoptat pentru k_0 valoarea:

$$k_0=\frac{10^{6}}{1{,}118}\left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{kg}_{Ag}}\right] \tag{11.5}$$

și s-a folosit ca etalon practic de curent un etalon chimic, bazat pe electroliza unei soluții diluate de azotat de argint, definindu-se deci amperul ca intensitate a curentului care depune într-o secundă masa de argint de 1,11800 miligrame. Această unitate, numită *amper internațional*, a fost folosită la etalonarea tuturor aparatelor de măsură care se folosesc pînă în prezent în tehnică.

Măsurări mai recente, efectuate cu mijloace mai precise, au arătat că valoarea (11.5) a lui k_0 nu este cea exactă. Cu alte cuvinte, amperul internațional (etalonul chimic) s-a dovedit a nu fi riguros egal cu amperul absolut (etalonul electrodinamic), între ele existînd relația

$$1\ A_{int.}=0{,}99985\ A_{abs.} \tag{11.6}$$

Diferența între aceste două unități e prea mică pentru a prezenta importanță în aplicațiile tehnice obișnuite.

11.4. Densitatea curentului electric de conductie

Pentru caracterizarea locală, într-un punct dat, a stării electrocinetice, se foloseşte o mărime vectorială, derivată, numită densitatea curentului de conducţie $\bar{J}$, definită astfel, ca fluxul acestui vector printr-o suprafaţă oarecare să fie egal cu intensitatea curentului prin acea suprafaţă:

$$\boxed{i=\iint_S \bar{J}\,\overline{dA}.}$$

Pentru a preciza semnificaţia acestei mărimi se poate considera mai întîi un conductor filiform (fig. 11.2), de arie A_0 a secţiunii transversale cu normala $\bar{n}_0$, străbătut de curentul i. Pentru fiecare secţiune înclinată cu unghiul α, de arie A_α, cu normala $\bar{n}$, se poate defini o *densitate scalară* de curent J_α, prin cîtul dintre curentul i şi aria A_α pe care o străbate:

$$J_\alpha=i/A \ . \tag{11.7}$$

Mărimea J_α depinde de secţiunea A_α la care se referă, dar curentul i e acelaşi pentru orice secţiune — cum rezultă din interpretarea microscopică 11.2. Dacă se notează cu J_0 densitatea scalară referitoare la secţiunea transversală, trebuie deci să se obţină:

$$J_0=i/A_0 \tag{11.8}$$

Din relaţiile (11.7) şi (11.8) rezultă:

$$i=J_0A_0=J_\alpha A_\alpha \tag{11.9}$$

şi cum secţiunea transversală e proiecţia secţiunii înclinate:

$$A_0=A_\alpha \cos\alpha. \tag{11.10}$$

Din relaţiile (11.9) şi (11.10) se obţine dependenţa căutată a densităţii scalare de înclinarea secţiunii şi anume:

$$J_\alpha=J_0 \cos\alpha. \tag{11.11}$$

Această relaţie arată că densitatea scalară este componenta unui vector $\bar{J}$, avînd sensul local al curentului, pe direcţia $\bar{n}$ a normalei la secţiunea considerată

$$J_\alpha=\bar{J}\,\bar{n}, \tag{11.12}$$

iar curentul este fluxul acestui vector:

$$i=J_\alpha A_\alpha=\bar{J}\cdot\bar{A} \quad \text{cu} \quad \bar{A}=A_\alpha\bar{n}.$$

Generalizînd acest rezultat pentru un element de arie $d\bar{A}=\bar{n}\,dA$ al unei suprafeţe S oarecare (v. fig. 11.3) străbătut de curentul elementar di se poate scrie

$$di=\bar{J}\cdot\bar{n}\,dA=J\cos\alpha\,dA=\bar{J}\,d\bar{A} \tag{11.13}$$

în care *densitatea de curent* $\bar{J}$ e un vector local al cărui modul este egal cu valoarea maximă a densității scalare di/dA pentru diferite orientări și a cărui orientare e dată de orientarea pe care trebuie să o aibă normala $\bar{n}$ pentru ca densitatea scalară să fie maximă. Se justifică astfel definiția dată la începutul acestui paragraf, iar intensitatea curentului electric de conducție printr-o

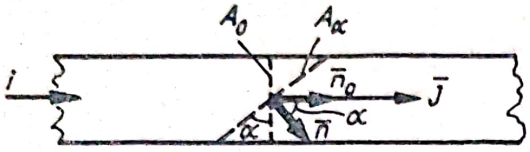


Fig. 11.2.

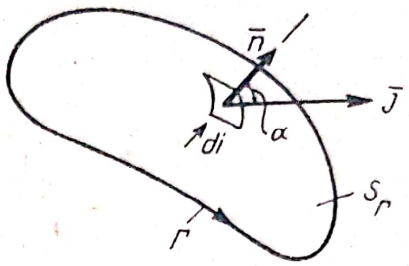


Fig. 11.3.

suprafață oarecare S_Γ (sprijinită pe o curbă Γ) rezultă a fi fluxul vectorului densitate de curent prin această suprafață:

$$i=\iint\limits_{S_\Gamma} di=\iint\limits_{S_\Gamma} \bar{J}\, d\bar{A}=\iint\limits_{S_\Gamma} \bar{J}\ \bar{n}\ dA. \tag{11.14}$$

Această expresie pune în evidență caracterul algebric al mărimii scalare i. *Sensul de referință al curentului e determinat în această expresie de sensul* (*ales arbitrar*) *al versorului* $\bar{n}$ *al normalei*. În relațiile electrotehnicii, în care apare curentul printr-o suprafață deschisă S_Γ, sensul lui $\bar{n}$ se alege asociat după regula burghiului drept cu sensul de referință dat pe curba Γ pe care se sprijină suprafața.

În sistemul MKSA, unitatea de densitate de curent este *amperul pe metru pătrat* (A/m^2). Această unitate e de obicei prea mică pentru nevoile practicii și adesea se folosește multiplul ei, numit *amper pe milimetru pătrat* (A/mm^2).

$$1\ A/mm^2=1\frac{A}{10^{-6}\ m^2}=10^6\frac{A}{m^2}=1\frac{MA}{m^2}$$

În mașinile și aparatele electrice, încălzirea conductorilor de cupru prin efectul caloric al curentului electric de conducție este admisibilă dacă densitatea de curent nu depășește cu mult 2—3 A/mm^2.

11.5. Curentul de convecție și densitatea lui

Spre deosebire de curentul de conducție, există și un curent electric de convecție, provenit din mișcarea de transport a particulelor elementare încărcate, datorită mișcării întregului corp (și nu din mișcarea relativă la corp a particulelor ca în cazul curentului de conducție). În figura 11.4, datorită vitezei $\bar{v}_r$ (viteza relativă a particulei), se obține curent de conducție, iar datorită vitezei $\bar{v}$ (viteza de transport a întregului corp) se obține curent de convecție, dacă local există un exces de sarcină de un anumit fel.

O expresie analogă celei a intensității curentului electric de conducție (relația 11.2) este valabilă și pentru *intensitatea curentului electric de convecție*:

$$i_v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \iint_{S_\Gamma} \bar{J}_v \, \overline{dA} \qquad (11.2')$$

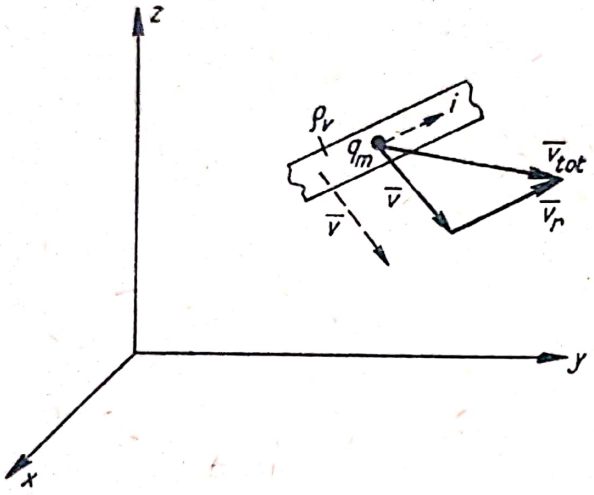


Fig. 11.4.

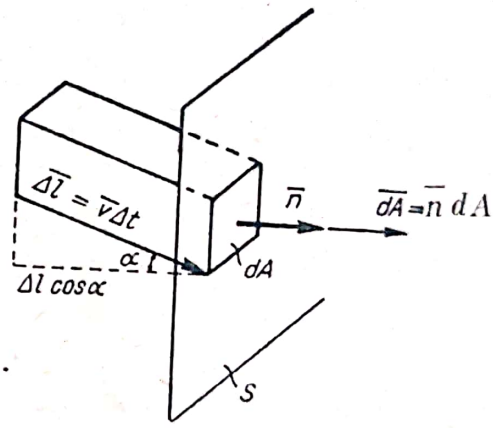


Fig. 11.5.

cu deosebire că în acest caz Δq provine din mișcarea de transport macroscopică a unui corp încărcat, iar $\bar{J}_v$ este *densitatea curentului de convecție*. În general, *intensitatea curentului electric total* este

$$i_{total} = i + i_v. \qquad (11.15)$$

Se poate exprima densitatea curentului de convecție în funcție de densitatea ρ_v a sarcinii electrice adevărate și de viteza $\bar{v}$ a porțiunii din corp considerată (viteza de transport a particulelor libere din corp). Se consideră un volum elementar sub forma unui paralelipiped oblic. Muchia $\Delta\bar{l} = \bar{v}\,\Delta t$ se ia paralelă cu vectorul vitezei, iar baza dA este un element de arie din suprafața S, fixă în sistemul de referință considerat. Volumul paralelipipedului este (fig. 11.5):

$$dA \cdot \Delta l \cos\alpha = dA \cdot v\,\Delta t \cos\alpha = \overline{dA} \cdot \bar{v} \cdot \Delta t. \qquad (11.16)$$

Așa cum este construit acest paralelipiped, elementul de arie dA în timpul Δt e traversat numai de punctele din corp conținute în interiorul paralelipipedului. Sarcina elementară care va străbate în timpul Δt elementul de arie dA este sarcina electrică conținută în acest paralelipiped, adică:

$$\Delta q = \rho_v \overline{dA} \cdot \bar{v}\,\Delta t. \qquad (11.17)$$

Curentul de convecție di_v care trece prin suprafața dA va fi cu (11.2'):

$$di = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\rho_v \overline{dA}\, v\,\Delta t}{\Delta t} = \rho_v \overline{dA} \cdot \bar{v}. \qquad (11.17')$$

Dar conform definiției densității de curent:

$$di_v = \bar{J}_v \overline{dA} \tag{11.18}$$

și rezultă pentru *densitatea curentului de convecție* expresia:

$$\bar{J}_v = \rho_v \bar{v}. \tag{11.19}$$

În consecință:

$$i_v = \iint \bar{J}_v \cdot \overline{dA} = \iint \rho_v \bar{v} \cdot \overline{dA}. \tag{11.20}$$

Un calcul analog este posibil și pentru determinarea expresiei microscopice a densității $\bar{J}$ a curentului de conducție, dacă se operează cu sarcina particulelor microscopice și cu viteza (microscopică) relativă medie a particulelor elementare față de corp:

$$\bar{J} = \rho_m \overset{\frown}{v_{rel}}. \tag{11.21}$$

12. Relațiile fundamentale ale electrocineticii

În electrocinetică rămîn valabile următoarele relații din electrostatică:

a) *legea legăturii între inducția, intensitatea cîmpului și polarizația electrică*

$$\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}; \tag{5.10}$$

b) *legea polarizației electrice temporare*:

$$\bar{P}_t = \varepsilon_0 \chi_e \bar{E}, \tag{4.38}$$

care pentru materialele fără polarizație permanentă se poate pune sub forma:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}, \tag{6.2}$$

cu observația că în metale $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ (polarizația electrică a conductorilor poate fi neglijată).

c) *legea fluxului electric*:

$$\iint_{\Sigma} \bar{D} \cdot \overline{dA} = q_{\Sigma}. \tag{6.6}$$

Următoarele legi și teoreme capătă forme sau interpretări noi, mai complete:

d) teorema potențialului electrostatic, care devine *teorema potențialului electric staționar*;

e) *legea conservării sarcinii electrice*;

f) condiția de echilibru electrostatic, care se generalizează în cadrul *legii conducției electrice*.

Scanned with OKEN Scanner

Se adaugă o lege nouă:

g) *legea transformării de energie în conductoarele parcurse de curent electric.*

În cele ce urmează se vor analiza pe rînd aceste legi și teoreme.

12.1. Teorema potențialului electric staționar

Se numește în general *regim staționar* un regim caracterizat prin mărimi care nu variază în timp și în particular *regim static* — un regim caracterizat prin mărimi care de asemenea nu variază în timp și în care nu au loc transformări energetice, de exemplu, dezvoltare de căldură. Stările electrostatice sînt deci un caz particular de stări electrice staționare. Stările electrice staționare pot fi însoțite de dezvoltare de căldură, și anume în cazul stărilor electrocinetice, deoarece, așa cum se știe, trecerea curentului electric de conducție e însoțită de efecte electrocalorice.

Regimul electrocinetic staționar este, deci diferit de regimul electrostatic studiat pînă acum. El este caracterizat de o densitate de curent diferită de zero ($\bar{J}\neq 0$) și invariabilă în timp (curent continuu) în fiecare punct interior al unui conductor, asociată unei valori, diferită de zero și de asemenea invariabilă în timp, $\bar{E}+\bar{E}_i\neq 0$.

Curentul electric în regim staționar se numește *curent continuu* (prescurtat: c.c.). Cu tot caracterul nestatic al acestui regim, analiza datelor experimentale arată că în regimul electrocinetic al unor conductoare imobile se păstrează caracterul potențial al intensității cîmpului electric. *Teorema potențialului electric staționar* are aceeași formă ca și teorema potențialului electrostatic, t.e.m. a cîmpului electric $\bar{E}$ (integrala de linie pe o curbă închisă a vectorului cîmp electric) este nulă de-a lungul oricărei curbe închise

$$\oint_{\Gamma}\bar{E}\cdot d\bar{s}=0 \tag{12.1}$$

(se va demonstra această teoremă în electrodinamică, cînd se va prezenta legea inducției electromagnetice). T.e.m. din cîmpurile electrice staționare și din conductoarele imobile provine deci exclusiv din cîmpurile electrice imprimate (relațiile 10.1 și 10.3). Se păstrează imediat și celelalte consecințe ale teoremei (12.1), și anume (v. par. 6.6):

Tensiunea electrică nu depinde de drum:

$$\int_1^2\bar{E}\cdot d\bar{s}=U_{12}=V_1-V_2. \tag{12.2}$$

— Se poate defini în fiecare punct un potențial electric:

$$V(P)=V(P_0)-\int_{P_0}^{P}\bar{E}d\bar{s} \tag{12.3}$$

— $\bar{E}$ derivă din acest potențial

$$\bar{E}=-\text{grad } V. \tag{12.4}$$

În regim electrocinetic staționar (fig. 12.1, *b*) *suprafețele conductorilor nu sînt însă suprafețe echipotențiale ca în regimul electrostatic* (fig. 12.1,*a*), deoarece în conductoarele parcurse de c.c. intensitatea cîmpului electric este diferită de zero și conservarea componentelor tangențiale (par. 6.8) ale lui $\bar{E}$ impune înclinarea liniilor de cîmp față de normală. Aceasta este consecința faptului că în regim electrocinetic nu mai este valabilă condiția de echilibru electrostatic (par. 6.7.), ci este valabilă legea lui Ohm (par. 12.3).

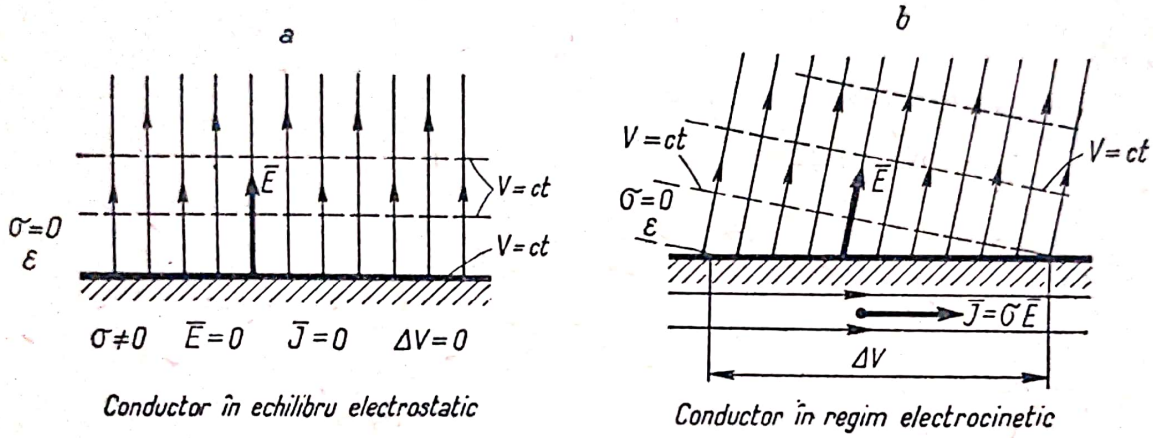


Fig. 12.1.

12.2. Legea conservării sarcinii electrice

12.2.1. **Forma integrală a legii.** În regim electrostatic (par. 6.2.1), constatările experimentale au la dus următoarea lege: suma sarcinilor electrice ale unui sistem de conductori izolat este constantă.

Dacă se consideră în regim electrocinetic o suprafață închisă Σ, care trece numai prin izolanți astfel încît intensitatea curentului e nulă prin această suprafață, se constată tot experimental că sarcina totală localizată în interiorul suprafeței rămîne constantă:

$$q_{\Sigma}=\text{ct.} \tag{12.5}$$

oricare ar fi fenomenele care se produc în interiorul suprafeței.

În particular, sarcina electrică a fiecărei particule microscopice elementare (care e înconjurată de vid) e constantă.

Dacă însă suprafața Σ trece și prin conductoare în care apare curent electric de conducție, sarcina electrică din interiorul suprafeței variază în timp, în acord cu interpretarea microscopică a curentului de conducție.

Se consideră, de exemplu un condensator încărcat, ale cărui armături se leagă printr-un conductor metalic (fig. 12.2). În interiorul conductorului potențialul nu poate fi constant (armăturile avînd potențiale diferite) și echilibrul electrostatic nu se mai poate menține. În timpul regimului tranzitoriu de descărcare a condensatorului, trece prin conductor un curent electric, care este egal cu viteza de scădere în timp a sarcinii armăturii condensatorului.

Acest rezultat se poate generaliza imediat pentru totalitatea corpurilor încărcate conținute într-o suprafață închisă Σ (care trece prin medii izolante sau conductoare și care se consideră atașată mediului) prin următorul enunț, care constituie *forma integrală a legii conservării sarcinii electrice* (adevărate): *Intensitatea i_Σ a curentului electric de conducție care iese dintr-o suprafață închisă Σ (adică străbate suprafața cu sensul de referință spre exterior) este în fiecare moment egală cu viteza de scădere a sarcinii electrice q_Σ localizată în interiorul suprafeței*

$$\boxed{i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt}.} \qquad (12.6)$$

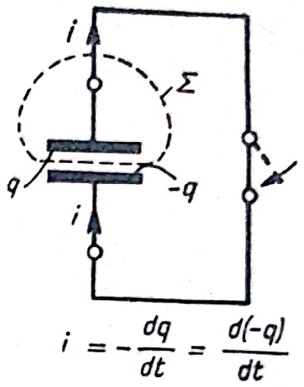


Fig. 12.2.

Interpretarea macroscopică a legii este imediată dacă se ține seama de interpretarea microscopică (11.2) a intensității curentului de conducție și de conservarea sarcinii particulelor elementare.

Exprimînd curentul i_Σ cu ajutorul densității de curent $\bar{J}$, iar sarcina q_Σ (în ipoteza unei repartiții de volum) cu ajutorul densității de volum a sarcinii ρ_v, legea se mai scrie (fig. 12.3):

$$\iint_\Sigma \bar{J}\, d\bar{A} = -\frac{d}{dt}\iiint_{v_\Sigma} \rho_v\, dv. \qquad (12.7)$$

La folosirea acestei legi trebuie să se observe că i_Σ este suma algebrică a curenților care străbat suprafața spre exterior (cu semnul + cei ce ies și cu semnul — cei ce intră), adică normala $\bar{n}$ din $d\bar{A} = \bar{n}\, dA$ e normala exterioară; de asemenea, la derivarea integralei de volum trebuie să se considere suprafața Σ mobilă o dată cu corpurile de care este atașată (derivată substanțială).

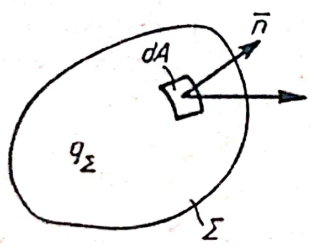


Fig. 12.3.

Se poate da și o altă formulare acestei legi, considerînd suprafața fixă, ceea ce permite derivarea sub semnul de integrare. În acest caz, însă, variația sarcinii din interiorul unei suprafețe fixe e datorită nu numai curentului de conducție, ci și ieșirii corpurilor încărcate din suprafață, în urma mișcării lor față de ea, adică curentului de convecție: [rel. (11.20)]

$$i_{v_\Sigma} = \iint_\Sigma \rho_v \bar{v}\, d\bar{A}. \qquad (12.8)$$

Cu această observație rezultă pentru legea conservării sarcinii *forma integrală dezvoltată*:

$$-\iiint_{v_\Sigma} \frac{\partial \rho_v}{\partial t}\, dv = i_\Sigma + i_{v_\Sigma} = \iint_\Sigma (\bar{J} + \rho_v \bar{v})\, d\bar{A}, \qquad (12.9)$$

conform căreia: Viteza de scădere a sarcinii electrice din interiorul unei suprafețe închise Σ, fixă, este egală cu suma dintre curentul de conducție i_Σ și curentul de convecție i_{v_Σ} care ies din suprafață.

Observație. Comparînd relația (12.9) cu relația (12.7) rezultă pentru derivata substanțială a integralei de volum (derivata unei integrale de volum cu frontiera Σ mobilă o dată cu mediul) expresia:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_\Sigma}\rho_v\,dv=\iiint_{V_\Sigma}\frac{\partial\rho_v}{\partial t}\,dv+\iint_{\Sigma}\rho_v\,\bar{v}\,d\bar{A}. \tag{12.10}$$

12.2.2. **Forma locală a legii.** Aplicînd teorema Gauss-Ostrogradski se obține:

$$\iint_{\Sigma}(\bar{J}+\rho_v\bar{v})d\bar{A}=\iiint_{V_\Sigma}\operatorname{div}\,(\bar{J}+\rho_v\bar{v})\,dv, \tag{12.11}$$

deoarece fluxul referitor la o suprafață închisă este egal cu integrala de volum a divergenței vectorului respectiv.

Din relațiile (12.9) și (12.11) rezultă $\iiint_{v_\Sigma}\left[\frac{\partial\rho_v}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_v\bar{v}+\bar{J})\right]\,dv=0$ oricare ar fi volumul V_Σ, ceea ce se poate numai dacă integrandul este nul. Rezultă relația

$$\boxed{-\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=\operatorname{div}\,\bar{J}+\operatorname{div}\,(\rho_v\bar{v}),} \tag{12.12}$$

care reprezintă *forma locală a legii conservării sarcinii* și care se enunță astfel:

Viteza de scădere a densității de sarcină într-un punct dat este egală cu divergența sumei dintre densitatea curentului de conducție și densitatea curentului de convecție.

12.2.3. **Teorema continuității liniilor de curent.** Această teoremă e principala consecință a legii conservării sarcinii în regim electrocinetic staționar (adică în curent continuu). În acest regim, sarcina electrică q este constantă, deci conform relației (12.6):

$$i_\Sigma=-\frac{dq_\Sigma}{dt}=0. \tag{12.13}$$

Acest rezultat constituie *teorema continuității liniilor de curent*, care se scrie

$$\boxed{i_\Sigma=\iint_{\Sigma}\bar{J}\cdot d\bar{A}=0,} \tag{12.14}$$

sau, sub formă locală,

$$\operatorname{div}\,\bar{J}=0 \tag{12.14'}$$

și se enunță astfel: Intensitatea c.c. care trece printr-o suprafață închisă este nulă (socotind pozitivi curenții care ies și negativi pe cei care intră). Altă formulare: Intensitatea c.c. care intră efectiv într-o suprafață închisă este egală cu intensitatea c.c. care iese efectiv din acea suprafață. Liniile de curent nu au început și nici sfîrșit: curentul electric continuu circulă numai pe căi închise.

Scanned with OKEN Scanner

Consecințele acestei teoreme sînt:

a) Se consideră un tub de linii de curent (de linii ale densității de curent $\bar{J}$—*v.* fig. 12.4) și se aplică relația (12.13) suprafeței Σ. Ținînd seama că $\iint_{S_{lat}} \bar{J}\,\bar{n}\,dA=0$, se obține

$$i_\Sigma=\iint_\Sigma \bar{J}\cdot\overline{dA}=\iint_{S_1}\bar{J}\,\bar{n}\cdot dA+\iint_{S_{lat}}\bar{J}\cdot\bar{n}\,dA+\iint_{S_2}\bar{J}\cdot\bar{n}\cdot dA=-i_1+i_2=0 \qquad (12.15)$$

sau $i_1=i_2$, adică curentul continuu este același de-a lungul unui tub de curent și în particular de-a lungul unui conductor electric.

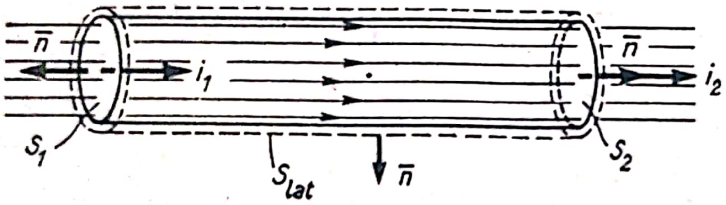


Fig. 12.4.

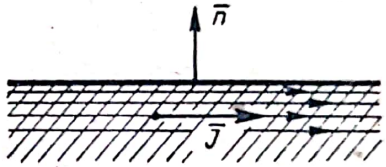


Fig. 12.5.

b) La suprafața unui conductor străbătut de c.c., densitatea de curent este tangențială (fig. 12.5):

$$J_n=\bar{J}\cdot\bar{n}=0. \qquad (12.16)$$

În adevăr, se poate considera un domeniu cilindric plat închis de suprafața Σ (fig. 12.6).

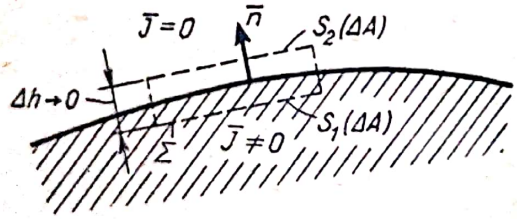


Fig. 12.6.

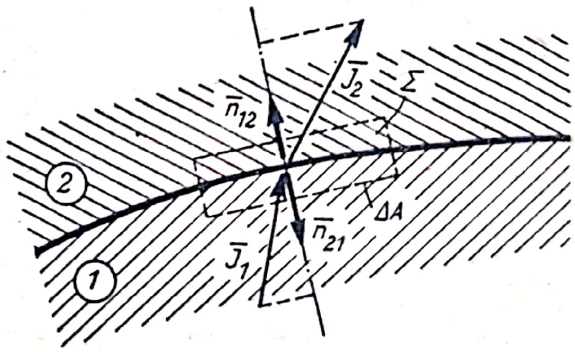


Fig. 12.7.

Fluxul vectorului $\bar{J}$ care străbate suprafața Σ este (deoarece în vid $\bar{J}=0$):

$$i_\Sigma=\iint_\Sigma \bar{J}\cdot d\bar{A}=\iint_{S_1}\bar{J}\cdot d\bar{A}+\iint_{S_2}\bar{J}\cdot d\bar{A}=\iint_{S_1}\bar{J}\cdot d\bar{A}=\Delta A(\bar{J}\cdot\bar{n})=0, \qquad (12.17)$$

în care ΔA este aria suprafeței S_1. Deoarece $\Delta A\neq 0$, rezultă relația (12.16).

c) La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate între doi conductori se conservă componenta normală a densității de curent. Pentru a demonstra aceasta, se consideră două medii 1 și 2 (fig. 12.7).

Scriind fluxul prin suprafața închisă Σ, de forma unui cilindru aplatisat

$$\bar{n}_{21}\bar{J}_1\,\Delta A+\bar{n}_{12}\bar{J}_2\,\Delta A=0$$
$$\bar{n}_{12}(\bar{J}_2-\bar{J}_1)=0,\ \text{sau cu}\ \bar{n}_{21}=-\bar{n}_{12},\qquad (12.18)$$
$$(J_n)_1=(J_n)_2$$

Prima teoremă a lui Kirchhoff (v. par. 13.2) este tot o consecință a legii conservării sarcinii.

12.3. Legea conducției electrice (legea lui Ohm)

12.3.1. **Forma locală a legii.** Legea conducției electrice este o lege de material, deoarece expresia ei conține un coeficient de proporționalitate dependent de materialul conductor (conductivitatea, respectiv rezistivitatea)

Se poate considera această lege ca o generalizare a condiției de echilibru electrostatic. În regim electrocinetic nu mai este valabilă această condiție (6.40), ci:

$$\bar{E}+\bar{E}_i\neq 0 \qquad (12.19)$$

Din punctul de vedere microscopic semnificația relației (12.19) se poate preciza în modul următor:

Particulele elementare libere se găsesc într-o mișcare dezordonată din cauza agitației termice. Sub acțiunea unei forțe active rezultante, medii, particulele pot căpăta o viteză suplimentară, ordonată. Dacă q_m este sarcina unei asemenea particule, forța rezultantă medie $\bar{F}_r$ care acționează asupra ei are expresia cunoscută (par. 5 și 10):

$$\bar{F}_r=(\bar{E}+\bar{E}_i)q_m, \qquad (12.20)$$

în care $\bar{E}$ este intensitatea cîmpului electric, iar $\bar{E}_i$ — intensitatea cîmpului electric imprimat.

Deoarece mișcarea ordonată a particulei, supusă ciocnirilor dezordonate permanente cu alte particule, se face ca într-un mediu cu frecare — forța activă rezultantă este practic proporțională cu viteza medie suplimentară pe care o capătă particulele și deci cu densitatea de curent conform relației (11.21):

$$\bar{F}_r=(\bar{E}+\bar{E}_i)q_m\sim\tilde{\bar{v}}_{rel}\sim\bar{J}.$$

În consecință se poate scrie:

$$\boxed{\bar{E}+\bar{E}_i=\rho\bar{J}.} \qquad (12.21)$$

Aceasta este *forma locală a legii conducției electrice*, care are următorul enunț: *În regim neelectrostatic, suma vectorială dintre intensitatea cîmpului electric* $\bar{E}$ *și intensitatea cîmpului electric imprimat* $\bar{E}_i$ *din interiorul unui conductor*

izotrop este proporțională în fiecare punct cu densitatea curentului electric de conducție din acel punct. Factorul de proporționalitate este o mărime de material ρ, numită *rezistivitatea materialului*, care depinde de natura acestuia, de temperatură etc.

Rezistivitatea metalelor și a altor corpuri depinde de temperatură liniar, în primă aproximație, dacă diferențele de temperatură sînt mici:

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha_0(T - T_0)] \tag{12.22}$$

în care: ρ_0 este rezistivitatea la temperatura de referință T_0;
α_0 — coeficientul de temperatură al rezistivității la temperatura de referință T_0.

În cazul metalelor, α_0 este pozitiv, deci ρ crește o dată cu creșterea temperaturii. Cărbunele, constantanul, diverse soluții au coeficientul de temperatură negativ. Și materialele semiconductoare au o rezistivitate care scade cu temperatura, dar mai rapid (după o lege exponențială).

Observații. Pentru anumite metale (plumb etc.), rezistivitatea se anulează brusc la temperaturi critice foarte joase (cîteva grade absolute °K), care depind de natura metalului și de intensitatea cîmpului magnetic în care sînt situate. Acest fenomen se numește *supraconductibilitate*.

În conductoare omogene (fără cîmp imprimat), relația (12.21) devine:

$$\boxed{\bar{E} = \rho \bar{J}.} \tag{12.23}$$

În consecință, rezistivitatea este:

$$\rho = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{J}|} = \frac{E}{J} \tag{12.24}$$

iar inversul rezistivității, numit *conductivitate* (σ), are valoarea:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{J}{E}. \tag{12.25}$$

Deci relația (12.21) poate apare sub forma:

$$\sigma(\bar{E} + \bar{E}_i) = \bar{J}. \tag{12.26}$$

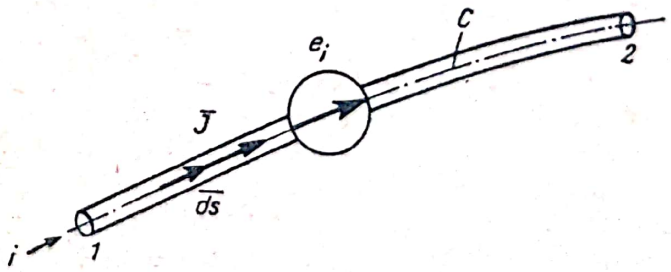


Fig. 12.8.

12.3.2. **Forma integrală a legii.** Se consideră o porțiune de circuit filiform, în care este inclusă și o pilă electrică (fig. 12.8) (reprezentată printr-un cerc cu o săgeată care indică sensul t.e.m). Circuitul se consideră filiform dacă este atît de subțire încît curentul să poate fi considerat repartizat omogen pe secțiune. În acest caz, se poate scrie:

$$J = \frac{i}{A} \tag{12.27}$$

în care i este curentul, același prin toate secțiunile conductorului, iar A — aria secțiunii transversal a acestuia.

Ținînd seama (fig. 12.8) că $\bar{J} \parallel \overline{ds}$ rezultă

$$\bar{J} \cdot \overline{ds} = J\, ds = \frac{i}{A} ds = i \frac{ds}{A} \tag{12.28}$$

Dar în cazul unui conductor filiform, integrala de linie a sumei $E+E_i$ calculată cu (12.21) de-a lungul curbei (C) care coincide cu axa conductorului (de-a lungul firului) e:

$$u_{12f} + e_{12} = \int_1^2 (\bar{E} + \bar{E}_i)\overline{ds} = \int_1^2 \rho \bar{J}\, \overline{ds} \tag{12.29}$$

S-a notat cu $u_{12f} = \int_1^2 \bar{E}\, \overline{ds}$ tensiunea electrică în lungul firului și cu $e_{12} = \int_1^2 \bar{E}_i\, \overline{ds}$ tensiunea imprimată corespunzătoare.

Ținînd seama și de relația (12.28), relația (12.29) devine:

$$u_{12f} + e_{12} = i \int_1^2 \rho \frac{ds}{A} = i\, R_{12} \tag{12.30}$$

în care s-a notat cu

$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{ds}{A} \tag{12.31}$$

rezistența electrică a conductorului între punctele 1 și 2.

În general, dacă se notează cu u_f — tensiunea electrică de-a lungul firului, cu e_i — tensiunea electrică imprimată , cu R și i — respectiv rezistența firului și curentul electric, se obține:

$$\boxed{u_f + e_i = iR} \tag{12.32}$$

Relația (12.32) reprezintă forma integrală a legii conducției electrice și se enunță astfel: *Pentru o porțiune oarecare de circuit filiform, suma dintre tensiunea electrică luată în lungul firului u_f și tensiunea imprimată e_i a surselor ce se găsesc în acea porțiune de circuit este egală cu produsul dintre intensitatea curentului și o mărime caracteristică circuitului numită rezistență electrică.*

Legea este valabilă atît în cazul în care conductorul reprezintă doar o porțiune dintr-un circuit închis, cît și în cazul în care conductorul este închis. În acest din urmă caz, suma $u_f + e_i = e$ este t.e.m. din lungul conductorului:

$$e = Ri. \tag{12.32'}$$

Cazul curentului continuu. Dacă tensiunea electrică imprimată e este nulă de-a lungul conductorului (latură pasivă de circuit: nu conține surse), este valabilă relația:

$$u_f = \int_{1,(C)}^{2} \bar{E} \cdot \overline{ds} = Ri, \tag{12.33}$$

Legea conducției electrice este valabilă atît în curent continuu, cît și în curent variabil în timp, pentru materiale liniare.

În c.c., este valabilă teorema potențialului electric staționar și tensiunea nu depinde de curba pe care se calculează integrala, ci numai de punctele extreme:

$$u_f = u_b = \int_1^2 \bar{E} \cdot \overline{ds} = V_1 - V_2 \qquad (12.34)$$

în care u_b este tensiunea între bornele 1 și 2 ale conductorului (fig. 12.9). Rezultă următoarea formă particulară a legii curentului de conducție.

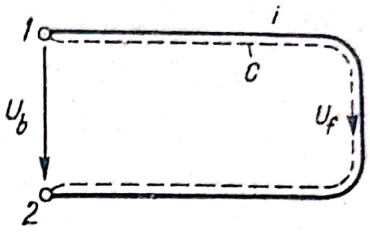


Fig. 12.9.

$$u_b = Ri \qquad (12.35)$$

cunoscută sub denumirea de *legea lui Ohm*, care se enunță: *Tensiunea electrică la bornele unui circuit de curent continuu este egală cu produsul dintre intensitatea curentului și rezistența circuitului, dacă circuitul nu are surse* (*circuit pasiv*).

Relația (12.35) se mai folosește sub formele cunoscute:

$$i = \frac{u_b}{R} \text{ sau } R = \frac{u_b}{i}. \qquad (12.35')$$

Relația (12.35) are două semnificații. Pe de o parte ea reprezintă relația de definiție a rezistenței unui conductor: rezistența este numeric egală cu raportul dintre tensiunea electrică continuă aplicată conductorului și curentul care îl străbate; pe de altă parte ea are un conținut experimental: raportul între u_b și i nu depinde de aceste mărimi, ci de natura și dimensiunile conductorului. Legea lui Ohm se referă la materiale liniare — metalele. Există și materiale pentru care rezistența depinde de valoarea tensiunii (rezistențe neliniare).

Rezistența electrică a unei porțiuni de conductor filiform (12.31) are expresia:

$$R = \int \rho \frac{ds}{A} > 0 \qquad (12.36)$$

și este totdeauna pozitivă.

În cazul unui conductor omogen și de secțiune constantă:

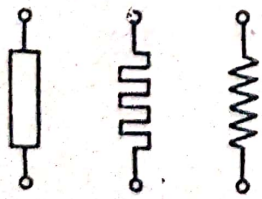


Fig. 12.10.

$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad (12.36')$$

adică rezistența este proporțională cu lungimea conductorului l și cu rezistivitatea lui ρ și este invers proporțională cu secțiunea lui A.

Se mai definește mărimea numită *conductanță*, notată cu G, egală cu valoarea reciprocă a rezistenței:

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l}. \qquad (12.36'')$$

Un element de circuit construit pentru a avea o anumită rezistență se numește *rezistor*. Simbolurile grafice pentru rezistoare sînt indicate în figura 12.10.

12.3.3. **Unități de măsură.** Unitatea de măsură în sistemul MKSA a rezistenței se numește *ohm* (Ω) și este rezistența unui conductor prin care curentul continuu de un amper determină o cădere de tensiune de un volt:

$$1\Omega=\frac{1\ V}{1\ A}.$$

Din calcul rezultă imediat că:

$$1\Omega=\frac{10^8}{10^{-1}}=10^9 \text{uCGS em}; \quad 1\Omega=\frac{\frac{1}{300}}{3.10^9}=\frac{9}{9.10^{11}} \text{uCGS es.}$$

Unitatea de rezistivitate se deduce cu ajutorul relației (12, 36'), din unitățile pentru rezistență, secțiune și lungime, fiind ohm·metru (Ωm) în sistemul MKSA. Practic, această unitate este prea mare și se folosește o altă unitate $\left(\Omega\frac{mm^2}{m}\right)$, ținînd seama că secțiunile conductorilor se exprimă de obicei în milimetri pătrați iar lungimile lor în metri;

$$1\Omega m=1\Omega\frac{m^2}{m}=10^6\Omega\frac{mm^2}{m}; \quad 1\Omega\frac{mm^2}{m}=10^{-6}\ \Omega m=1\mu\Omega m.$$

Unitatea de conductanță rezultă din unitatea de rezistență și se numește *siemens* (S) în sistemul MKSA

$$1\ S=1\ \Omega^{-1}.$$

Unitatea de conductivitate în sistemul MKSA se deduce din unitatea de conductanță și se numește siemens pe metru $\left(1\frac{S}{m}=1\ \Omega^{-1}\ m^{-1}\right)$.

În tabela 12.1 se indică rezistivitățile la 20°C ale unor materiale uzuale în electrotehnică.

Tabelul 12.1

Materialul	Rezistivitatea $\Omega\frac{mm^2}{m}$	Conductivitatea $\frac{S}{m}$	Coeficieentul de temperatură la °C $(°C)^{-1}$ $T_0=20$ °C
Argint	0 0159···0,017	5,9 ···6,3·10⁷	3,8 ·10⁻³
Cupru	0,0170···0,0178	5,6 ···5,9·10⁷	3 9 ·10⁻³
Aluminiu	0,028 ···0,03	3,3 ···3,6·10⁷	3,7 ·10⁻³
Fier	0,09 ···0,15	0,67···1,1·10⁷	4,5 ·10⁻³
Alamă	0,07 ···0,09	1,1 ···1,4·10⁷	1,5 ·10⁻³
Nichelină	0,43	2,33·10⁶	0,13·10⁻³
Manganină	0.43	2,33·10⁶	0,01·10⁻³
Constantan	0,49	2,04·10⁶	—0,05·10⁻³
Cărbune pentru lampă electrică cu arc	60···80	1,70·10⁴	—0,2···—0,8·10⁻³
Apă d stilată	1···4·10¹⁰	0,2 ···1,10⁻⁴	—

Aplicație. Rezistența unui conductor de cupru cu lungimea de 2 km și secțiunea de 20 mm² este

$$R=0{,}0175\frac{2.10^3}{20}=1{,}75\ \Omega$$

În calcule practice se consideră $\rho_{cupru}=\frac{1}{57}\frac{mm^2}{m}$ la 20°C.

12.4. Legea transformării energiei în conductori (legea Joule-Lenz)

Experimental se constată că în orice conductor parcurs de curent se dezvoltă căldură. În condiții particulare (de exemplu în pile și acumulatoare) se mai constată că trecerea curentului electric prin conductori e însoțită și de alte transformări energetice (de exemplu de dezvoltarea sau absorbția energiei unor reacții chimice). În toate cazurile trecerea curentului de conducție prin conductori determină transformarea energiei electrice (mai corect: a energiei cîmpului electromagnetic) în energie de alte forme, și invers.

12.4.1. **Forma locală a legii.** Legea transformării energiei în conductori este o lege generală, care, sub formă locală, dă expresia energiei cedate de cîmpul electromagnetic în unitatea de timp și de volum în conductori. În conformitate cu această lege, *puterea* (p_j) *cedată pe unitatea de volum de conductor de cîmpul electromagnetic, în procesul de conducție electrică, este egală cu produsul scalar dintre intensitatea clmpului electric și densitatea curentului electric de conducție*:

$$\boxed{p_j = \bar{E}\,\bar{J}} \qquad (12.37)$$

(în cazul cel mai general al conductorilor omogeni sau neomogeni).

Interpretarea microscopică a legii: Cînd particulele elementare încărcate cu sarcina q_m au o mișcare ordonată sub acțiunea unor forțe medii nenule (electrice și, eventual, neelectrice), cîmpul — care exercită forța $q_m\bar{E}$ asupra fiecărei particule (fig. 12.11) — pierde o anumită energie, prin efectuarea lucrului mecanic elementar al forțelor electrice:

$$\delta L = \delta q_m . \bar{E} . \overline{ds}$$

în care $\delta\rho_m = \Sigma q_m$ este suma sarcinilor particulelor libere din volumul elementar al conductorului filiform considerat.

Observînd că în cazul unui conductor filiform ioztrop $\bar{J}$, $\bar{E}$, $\overline{ds}$ au aceeași direcție, puterea cheltuită de cîmp pentru transportul sarcinii δq_m pe distanța ds în timpul δt va fi:

$$p_j dv = \frac{\delta L}{\delta t} = \frac{\delta q_m}{\delta t} E\,ds = iE\,ds = JEA\,ds = JE\,dv = \bar{J}\,\bar{E}\,dv,$$

în care $dv = Ads$ este elementul de volum, iar p_j este densitatea de volum a acestei puteri pentru care rezultă expresia dată de forma locală a legii :

$$p_j = \bar{E}\bar{J} \qquad (12.37)$$

Densitatea de putere p_j e, deci, efectul macroscopic al lucrului mecanic microscopic cheltuit de cîmp, în unitatea de timp și pe unitatea de volum, pentru a transporta particulele încărcate libere prin conductor. Acest lucru mecanic contribuie la încălzirea conductorului sau (în cazul existenței unui cîmp imprimat, adică a unor forțe neelectrice) la producerea unei alte forme de energie a corpurilor: chimică etc.

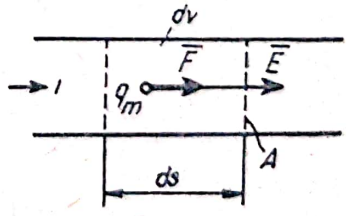


Fig. 12.11.

În cazul particular al conductorilor omogeni, (în care $\bar{E}_i = 0$), p_j reprezintă căldura dezvoltată în unitatea de timp și de volum de conductor și, cu ajutorul formei locale a legii lui Ohm (12.25), are expresia

$$p_j = \bar{E}\,\bar{J} = EJ = \rho J^2. \qquad (12.38)$$

În cazul mai general al conductorilor neomogeni, adică în prezența unui cîmp imprimat de intensitate $\bar{E}_i$, expresia (12.37) a densității de volum a puterii cedate de cîmpul electromagnetic se poate pune sub o formă dezvoltată cu ajutorul formei locale a legii conducției electrice (12.21), eliminînd cîmpul electric $\bar{E}=\rho\bar{J}-\bar{E}_i$.
Se obține expresia:

$$p_j=\rho J^2-\bar{E}_i\bar{J}=\rho J^2-p_g, \qquad 12.39)$$

care cuprinde doi termeni.

Primul termen $\rho J^2>0$ este totdeauna pozitiv și reprezintă densitatea de volum a puterii pierdute ireversibil de cîmpul electromagnetic (independent de sensul curentului) și transformată în căldură. Această dezvoltare de căldură este caracteristică stării electrocinetice (a conductorilor care nu sînt în stare de supraconductibilitate cînd $\rho=0$ și $\rho J^2=0$) și poartă numele de *efect electrocaloric ireversibil* sau *efect Joule-Lenz*.

Al doilea termen cu semn schimbat $p_g=\bar{E}_i\bar{J}\gtrless 0$ poate fi pozitiv sau negativ și reprezintă densitatea de volum a puterii cedată de sursele de cîmp electric imprimat (și primită de cîmpul electromagnetic). Interpretarea exactă a sensului schimbului de energie dintre surse și cîmp se face după semnul acestei expresii:

— dacă vectorii $\bar{E}_i$ și $\bar{J}$ sînt omoparaleli (au același sens), atunci $p_g>0$ și această putere este efectiv cedată de sursă și primită de cîmp. Acest fenomen are loc în orice pilă care debitează curent electric și produce concomitent energie electromagnetică prin transformarea energiei ei interioare chimice;

— dacă vectorii $\bar{E}_i$ și $\bar{J}$ sînt antiparaleli (au sensuri contrarii — curentul străbate sursa în sens opus tensiunii ei electromotoare), atunci $p_g<0$ și puterea p_g este efectiv primită de sursă și cedată de cîmpul electromagnetic. Acest fenomen are loc, de exemplu, la încărcarea unui acumulator electric, cînd energia electromagnetică este transformată în energie interioară de legătură chimică a sursei.

După natura cîmpului imprimat $\bar{E}_i$ care determină producerea transformării de energie cu densitatea de volum p_g se deosebesc:

a) *efectul electrochimic* — cînd $\bar{E}_i$ este de natură galvanică, iar p_g este densitatea de volum a puterii care corespunde transformării energiei chimice în energie electromagnetică ($p_g>0$) sau invers ($p_g<0$);

b) *efectul Peltier* — cînd $\bar{E}_i$ este un cîmp imprimat de natură voltaică (corespunzător efectului termoelectric de contact, par.10.3.2), iar p_g este densitatea de volum a căldurii transformată reversibil în energie electromagnetică ($p_g>0$ — la sudura caldă a unui cuplu termoelectric ce debitează curent) sau invers ($p_g<0$ — la sudura rece a cuplului termoelectric ce debitează curent), în unitatea de timp;

c) *efectul Thomson* — cînd $\bar{E}_i$ este un cîmp imprimat termoelectric de volum (par. 10.2.3.), iar p_g este densitatea de volum a căldurii transformată reversibil în energie electromagnetică ($p_g>0$) sau invers ($p_g<0$), în unitatea de timp.

Scanned with OKEN Scanner

Efectele Peltier și Thomson sînt *efecte electrocalorice reversibile.*

12.4.2. **Forma integrală a legii transformării energiei în conductori.** Dacă se integrează expresia (12.37) pe volumul V al unei porțiuni de conductor filiform în care $\bar{E}$, $\bar{J}$ și $\overline{ds}$ sînt paraleli, se obține puterea totală P_j cedată de cîmpul electromagnetic conductorului în procesul de conducție a curentului electric. Se obține, notînd cu A secțiunea conductorului (v.f 12.12).

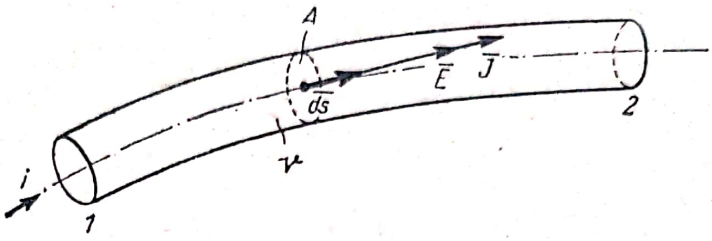


Fig. 12.12.

$$P_j=\iiint_V p_j\,dv=\iiint_V \bar{E}\,\bar{J}dv, \tag{12.40}$$

sau:

$$P_j=\int_1^2 EJA\,ds=\int_1^2 Eids=i\int_1^2 \bar{E}\,\overline{ds},$$

sau:

$$\boxed{P_j=u_j i.} \tag{12.41}$$

Forma integrală a legii afirmă deci că *puterea totală cedată de cîmpul electromagnetic unei porțiuni de conductor filiform, în procesul de conducție electrică, este egală cu produsul dintre intensitatea curentului și tensiunea în lungul firului.*

Analog cu (12.39) și această expresie poate fi dezvoltată în doi termeni, observînd că din legea conducției electrice (12.32) rezultă $u_f=Ri-e_i$ și se obține:

$$P_j=Ri^2-e_i i \text{ sau } P_j=Ri^2-P_g \tag{12.42}$$

Primul termen, singurul diferit de zero în conductoare fără cîmp imprimat ($e_i=0$), este puterea dezvoltată ireversibil sub formă de căldură în conductoare, egală cu produsul dintre rezistența conductorului și pătratul intensității curentului (Aceasta e forma uzuală a legii Lenz-joule):

$$P_R=Ri^2=\iiint \rho J^2 dv>0 \tag{12.43}$$

Prin integrare în timp se obține căldura totală dezvoltată în timpul $\Delta t=t_2-t_1$:

$$Q_j=\int_{t_1}^{t_2} Ri^2dt, \text{ în unități de energie (joule)} \tag{12.44}$$

sau

$$Q_j'=0{,}24\int_1^2 Ri^2dt \tag{12.41}$$

în calorii (mici), cu R în ohmi, i în amperi și t în secunde.

În curent continuu, tensiunea în lungul firului Ri este egală cu tensiunea electrică la borne u_b pentru conductori fără surse și relația (12.43) se mai scrie:

$$P_R=Ri^2=\frac{U_b^2}{R}, \tag{12.45}$$

iar căldura dezvoltată rezultă:

$$Q_J = Ri^2\,\Delta t \text{ respectiv } Q_J' = 0{,}24Ri^2\,\Delta t. \tag{12.46}$$

Al doilea termen cu semn schimbat:

$$P_g = ei \gtrless 0 \tag{12.47}$$

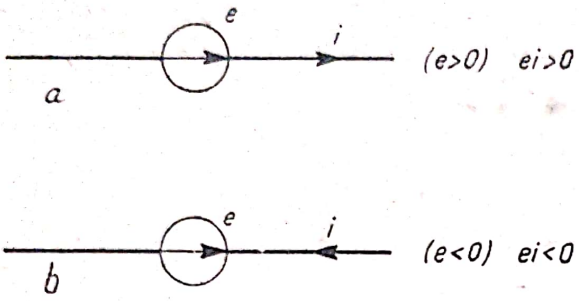


Fig. 12.13.

este puterea dezvoltată de sursa de tensiune electromotoare e, care debitează curentul de intensitate i, egală cu produsul acestor două mărimi. În această expresie, e se ia pozitiv cînd are sensul curentului și negativ în caz contrar. Dacă $P_g = ei > 0$ (adică e și i au același sens efectiv, fig.12.13,*a*), sursa produce energie (de exemplu în cazul unei pile care alimentează un circuit fără alte surse). Dacă $P_g = ei < 0$ (adică e și i au sensuri efective opuse, fig.12.13,*b*), sursa primește energie (de exemplu în cazul unui acumulator care se încarcă).

Aplicație. Rezistența unui conductor filiform este $R = 20\Omega$, iar curentul care îl parcurge $e = 5A$; să se calculeze puterea dezvoltată și căldura produsă timp de o oră (în joule, kilowattore și calorii mici și mari).

$P_J = RI^2 = 20 \cdot 5^2 = 500\text{W}$;
$Q_J = P_J\,\Delta t = 500 \cdot 3\,600 = 18 \cdot 10^5\text{J}$;
$= P_J\,\Delta t = 500 \cdot 1 = 500\text{Wh} = 0{,}5\ \text{kWh}$;
$Q_J = 0{,}24\ P_J\,\Delta t = 0{,}24 \cdot 500 \cdot 3\,600 = 43\ 2000\ \text{cal} = 432\ \text{Cal}$.

Observație: În cazul unui circuit de curent continuu neramificat și închis, tensiunea electrică în lungul firului e nulă:

$u_J = \Phi \bar{E} \bar{ds} = 0$ și $P_J = 0$, adică cu relațiile (12.41) și (12.42):

$$P_g = ei = Ri^2 \tag{12.48}$$

În acest caz, cîmpul nu mai participă global la schimbul de energie, *ci numai îl mijlocește, adică transmite energia de la generator la receptor.*

13. Circuite filiforme liniare de curent continuu

În cele ce urmează se vor cerceta circuitele de curent continuu filiforme (adică suficient de subțiri pentru ca intensitatea curentului să poată fi considerat uniform repartizată pe secțiunea lor) și liniare (adică avînd laturi

cu rezistenţe constante, independente de valorile curenţiilor). Relaţile fundamentale ale electrocineticii (v. par.12) au, în acest caz, următoarele forme:

(1) $u_\Gamma = \oint_\Gamma \bar{E}\overline{ds} = 0$ — teorema potenţialului electric staţionar;

(2) $i_\Sigma = \iint_\Sigma \bar{J}.\overline{dA} = 0$ — teorema continuităţii liniilor de curent (formă particulară a legii conservării sarcinii);

(3) $u_f + e = Ri$ sau $u_b = Ri$ $(e=0)$ — legea conducţiei electrice (Ohm);

(4) $P_j = Ri^2$ $(e=0)$ sau $P_g = ei$ — puterea consumată într-un rezistor (Joule-Lenz); — puterea produsă de un generator de tensiune electromotoare e* (forme particulare ale legii transformării de energie în conductori Joule-Lenz).

Primele trei relaţii (1, 2, 3) permit determinarea curenţilor, cînd se cunosc tensiunile electromotoare ale surselor care produc aceşti curenţi, şi rezistenţele receptoarelor, cu ajutorul unor consecinţe ale lor numite teoremele lui Kirchhoff. Formularea şi aplicarea acestor teoreme, în care mărimile i, e, u, care intervin, sînt mărimi algebrice (pozitive, nule sau negative), necesită precizarea fără ambiguitate a sensurilor de referinţă ale acestor mărimi.

13.1. Circuitul simplu de curent continuu. Asocierea sensurilor de referinţă

Se va considera ca exemplu un circuit (fig.13.1) cuprinzînd o sursă e de rezistenţă interioară R_i (simbolizată explicit în schemă, pentru a nu fi omisă din neatenţie), care alimentează un *rezistor* (element de circuit care prezintă o anumită rezistenţă curentului continuu), de rezistenţă R.

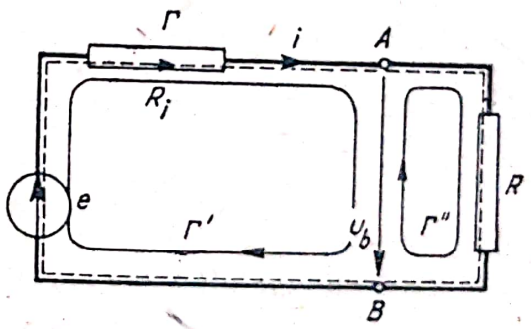


Fig. 13.1.

Se numeşte *sens de referinţă* (sau sens pozitiv convenţional sau sens de calcul) al unei mărimi fizice scalare, algebrice, definită prin fluxul unui vector (cum este cazul curentului $i = \iint \bar{J}.\overline{dA}$), respectiv prin integrala de linie a unui vector (cum este cazul tensiunii $u = \int \bar{E}\,\overline{ds}$), sensul pentru efectuarea integralei respective (adică sensul lui $\overline{dA} = \overline{n}dA$ în cazul unui flux, respectiv sensul lui $\overline{ds} = \overline{l}\,ds$ în cazul unei integrale de linie). Dacă mărimea scalară algebrică considerată rezultă pozitivă în raport cu acest sens de referinţă se spune că ea are *sensul efectiv* (sau real) acelaşi cu sensul de

* Se scrie e în loc de e_i pentru tensiunea electromotoare a generatorului, pentru a include şi cazul cînd această tensiune este produsă prin inducţie, în maşini de c. c.

referință, iar dacă rezultă negativă în raport cu acest sens de referință — se spune că are sensul efectiv (sau real) opus sensului de referință. Scrierea relațiilor fundamentale ale electromagnetismului, și în particular ale circuitelor electrice, implică uneori o anumită asociere a sensurilor de referință ale diferitelor mărimi, și anume aceea *care a și fost folosită la enunțarea legilor*. Uneori, însă, sensurile de referință a două mărimi sînt independente între ele și trebuie precizată explicit *convenția suplimentară* folosită pentru scrierea unei relații între aceste mărimi.

Ambele situații se întîlnesc în studiul circuitelor electrice și de aceea este bine să fie clarificate de la început *regulile de asociație a sensurilor de referință* pentru mărimile: curent i, tensiune electromotoare e, tensiune în lungul firului u_f, tensiune la borne u_b. Aceste reguli sînt:

a). Curentul i și tensiunea electromotoare e au același sens de referință în lungul unui circuit, așa cum s-a folosit la scrierea legii lui Ohm pentru un circuit închis (v. 12.32′):

$$e=Ri \quad \text{sau} \quad \oint(\bar{E}+\bar{E}_i)\,\overline{ds}\equiv R\iint \bar{J}\,\overline{dA} \quad \text{cu} \quad \overline{ds}\,\|\,d\bar{A}$$

N.B. Se numește, uneori, *tensiune contraelectromotoare* mărimea $e'=-e$, cu sens de referință opus sensului curentului.

b) Curentul i și tensiunea în lungul firului u_f au același sens de referință în lungul unei porțiuni de circuit, așa cum s-a folosit la scrierea legii lui Ohm pentru o latură pasivă de circuit (v. 12.33):

$$u_f=Ri.$$

c). Curentul i dintr-o latură de circuit și tensiunea u_b la bornele acelei laturi (calculată în lungul unei curbe care unește bornele prin dielectic) nu au sensuri de referință asociate prin formularea dată vreunei legi, ci necesită adaptarea unei convenții suplimentare, care se precizează în cazul fiecărei probleme tratate pe schema circuitului, prin indicarea curbei de calcul a tensiunii cu o săgeată care precizează sensul de integrare (v. fig. 13.1) și prin indicarea sensului curentului. Fie A, B bornele laturii considerate. Exemplul din figura 13.1 arată că, pentru sensuri de referință date, sînt posibile (în funcție de latura care se determină) două convenții opuse (v. și fig. 13.2 și 13.3) cu rezultate distincte în ceea ce privește semnul cu care intră tensiunea la borne în ecuația laturii.

Conform *convenției de la receptoare*, dacă $i=i_{AB}$ (cazul laturii din dreapta din fig. 13.1), atunci $u_b=u_{AB}=\int_B^A \bar{E}\,\overline{ds}$, sau dacă $i=i_{BA}$, atunci $u_b=u_{BA}=\int_B^A \bar{E}\,\overline{ds}$. Convenția e numită astfel deoarece, în acest caz, puterea la borne $P_b=iu_b$ este efectiv primită de latură cînd este pozitivă (și efectiv cedată cînd este negativă).

Conform *convenției de la generatoare*, dacă $i=i_{AB}$, atunci $u_b=u_{BA}=\int_B^A \bar{E}\,\overline{ds}$, sau dacă $i=i_{BA}$ (cazul laturii din stînga din fig. 13.1), atunci $u_b=u_{AB}=\int_A^B \bar{E}\,\overline{ds}$. — Convenția e numită astfel deoarece, în acest caz, puterea la borne $P_b=iu_b$

este efectiv cedată de latură cînd este pozitivă (şi efectiv primită cînd este negativă).

Exemplul din figura 13.1 arată că cele două convenţii se pot întîlni concomitent (pentru laturi distincte) la un circuit dat. Nu se poate deci folosi cu exclusivitate numai una dintre ele, decît complicînd scrierea şi notaţiile pe scheme.

În figurile 13.2 şi 13.3 sînt ilustrate explicit cele două convenţii pentru cîte o latură de curent.

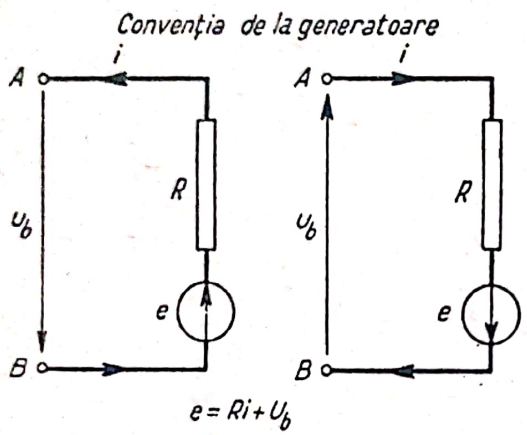


Fig. 13.2.

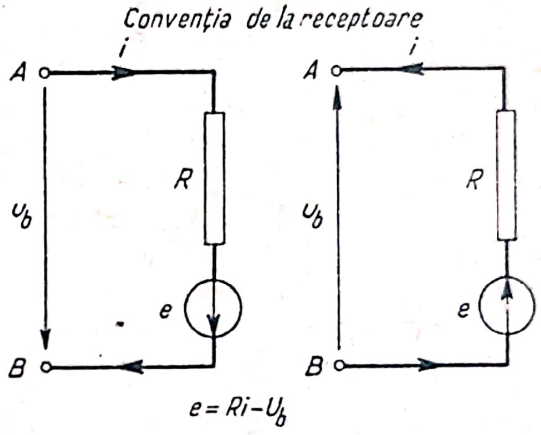


Fig. 13.3.

În cazul circuitului din figura 13.1, calculînd succesiv tensiunea electromotoare pe curbele Γ, Γ' (latura din stînga) şi Γ'' (latura din dreapta) şi folosind legea lui Ohm, se obţin relaţiile:

$$e=(R_i+R)i \tag{13.1}$$

$$e=R_i i+u_b \tag{13.2}$$

$$0=Ri-u_b \tag{13.3}$$

Se observă că tensiunea la borne u_b intră cu semne diferite în relaţiile (13.2) şi (13.3) alături de căderile de tensiune (produsele dintre rezistenţe şi curenţi), deoarece în cele două cazuri se folosesc convenţii diferite de asociere a sensurilor de referinţă. Înmulţind aceste relaţii cu i se obţine imediat expresia:

$$P_b=u_b i=Ri^2=ei-R_i i^2=P_g-R_i i^2>0 \tag{13.4}$$

pentru mărimea $P_b=u_b i$, care se interpretează imediat ca puterea transmisă la bornele circuitului (pozitivă în acest caz) primită de latura receptoare (din dreapta) şi cedată de latura generatoare (din stînga).

13.2. Teoremele lui Kirchhoff

13.2.1 **Terminologie.** Se consideră o reţea electrică completă cu N noduri (puncte de ramificaţie), cu L laturi (porţiuni neramificate mărginite de noduri) şi cu O ochiuri fundamentale. Laturile care conţin surse de energie electrică

(caracterizate, de obicei, prin anumite tensiuni electromotoare) se numesc *laturi active*, iar cele care nu conțin surse se numesc *laturi pasive*. O porțiune de rețea se numește *activă*, respectiv, *pasivă*, după cum conține respectiv nu conține, laturi active. O latură (sau o porțiune de rețea) se numește *pasivizată* dacă provine dintr-o latură (sau o porțiune de rețea) activă prin anularea valorilor tensiunilor electromotoare ale surselor acesteia (fără ca rezistențele interioare ale surselor să se modifice), adică prin înlocuirea surselor cu rezistoare de rezistențe egale cu rezistențele lor interioare. O rețea se numește *completă* sau *izolată*, dacă nu are borne de acces cu exteriorul (contacte conductoare cu exteriorul), adică dacă nu reprezintă o porțiune a unei rețele mai mari. O rețea incompletă se numește *dipol* dacă are numai două borne de acces și *multipol* dacă are mai multe (în particular, cuadripol — dacă are patru borne de acces).

Se numesc *ochiuri* succesiunile de laturi constituind cîte o linie închisă. Se numește sistem de *ochiuri fundamentale* un ansamblu de ochiuri care cuprinde toate laturile rețelei, astfel că existența unuia dintre ochiurile sistemului nu poate fi dedusă din cunoașterea laturilor celorlalte ochiuri fundamentale, iar existența oricărui alt ochi al rețelei (nefundamental) poate fi dedusă din cunoașterea laturilor ochiuri fundamentale ale sistemului. Într-o rețea dată, calitatea de ochi fundamental este relativă la sistemul de ochiuri considerat și există mai multe sisteme de ochiuri fundamentale. Numărul O al ochiurilor fundamentale este însă bine determinat.

Calculul rețelei constă în determinarea intensităților curenților electrici care trec prin cele L laturi. Această problemă se poate rezolva complet cu ajutorul celor două teoreme ale lui Kirchhoff, care dau cele L ecuații independente necesare. *În cazul rețelelor de curent continuu, se notează mărimile cu litere mari:* I (curentul), U (tensiunea), E (tensiunea electromotoare)

13.2.2. **Prima teoremă a lui Kirchhoff.** Cu ajutorul legii de conservare a sarcinii electrice, în regim staționar, s-a demonstrat teorema continuității:

$$i_\Sigma = 0 \qquad (12.13)$$

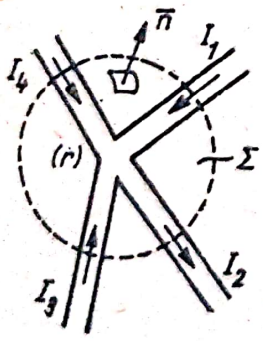


Fig. 13.4.

Dacă suprafața închisă Σ înconjură, de exemplu, nodul (r) al unei rețele, suma intensităților curenților, care concură în nodul (r), este nulă. Sensul de referință pozitiv al curenților față de nod se alege dirijat dinspre nod spre exterior.

În fig. 13.4 s-au indicat sensurile de referință din laturi ale curenților. Aplicînd relația (12.13) se obține:

$$-I_1+I_2-I_3-I_4=0.$$

În general, se obține din relația (12.13) *teorema întîi a lui Kirchhoff*, care se scrie:

$$\sum_{k=1}^{n_r} I_k=0, \text{ pentru } r=1,2,\cdots, N, \qquad (13.5)$$

(n_r fiind numărul de laturi care se întîlnesc în nodul r), cu următorul enunț: *Suma algebrică a curenților laturilor ce se reunesc într-un nod este nulă*, cînd

se consideră cu un semn curenţii cari ies din nod şi cu semnul contrar curenţii cari intră în nod. Altfel spus, suma curenţilor cari intră în nod este egală cu suma curenţilor care ies din nod.

Deoarece, de obicei, nu se pot numerota la rînd laturile legate la fiecare nod de reţea, ci se foloseşte o singură numerotare pe întreaga reţea, se utilizează notaţia:

$$\boxed{\sum_{(r)} I_k = 0} \qquad (13.5')$$

care se citeşte: suma algebrică a curenţilor referitoare la nodul (r) este nulă.

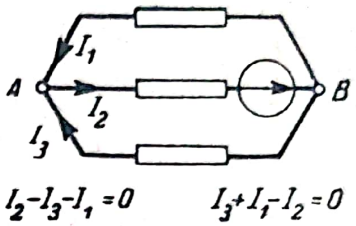


Fig. 13.5.

Prima teoremă a lui Kirchhoff, aplicată nodurilor unei reţele complete cu două noduri, dă o singură ecuaţie distinctă (fig. 13.5).

Generalizînd, pentru o reţea completă cu N noduri, rezultă din prima teoremă Kirchhoff (N-1) ecuaţii independente.

13.2.3. **A doua teoremă a lui Kirchhoff.** Scriind tensiunea electromotoare $\oint_\Gamma (\overline{E}+\overline{E}_i)\,\overline{ds}$ pe curba Γ ce trece prin axa conductorilor ce formează ochiul (p) (fig.13.6) se obţine din relaţia (12.21):

$$\oint_\Gamma (\overline{E}+\overline{E}_i)\,\overline{ds} = \oint_\Gamma \rho\,\overline{J}\,\overline{ds} \qquad (13.6)$$

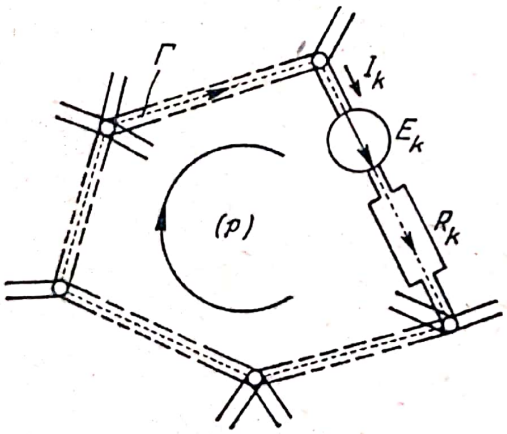


Fig. 13.6.

În regim staţionar $\oint \overline{E}\,\overline{ds}=0$ şi deci:

$$\oint_\Gamma \overline{E}_i\overline{ds} = \sum_{k=1}^{n_p} E_k \qquad (13.7)$$

(unde E_k e t.e.m. a sursei din latura iar laturile ochiului (p) sînt considerate numerotate în continuare în lungul ochiului, de la $k=1$ la $k=n_p$); iar:

$$\int_\Gamma \rho\,\overline{J}\cdot\overline{ds} = \sum_{k=1}^{n_p} I_k \int_{(k)} \rho\,\frac{ds}{A} = \sum_{k=1}^{n_p} I_k R_k,$$

(unde R_k e rezistenţa laturei k).

Din relaţia (13.6) cu relaţiile (13.7) şi (13.8) se deduce *a doua teoremă a lui Kirchhoff aplicată ochiului* (p)

$$\sum_{k=1}^{n_p} E_k = \sum_{k=1}^{n_p} I_k R_k, \quad \text{cu} \quad p=1,2,\cdots,0 \qquad (13.8)$$

cu următorul enunţ: *Suma algebrică a t.e.m. ale surselor în lungul unui circuit este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune din laturile circuitului.*

Deoarece de obicei nu se pot numerota la rînd laturile fiecărui ochi, ci numai ale întregii reţele, se utilizează notaţia:

$$\boxed{\sum_{(p)} E_k = \sum_{(p)} I_k R_k} \qquad (13.8')$$

Scanned with OKEN Scanner

care se citește: suma algebrică a t.e.m. referitoare la ochiul (p) este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune referitoare la acest ochi. La scrierea relației (13.8) sau (13.8'), semnul (+) se pune în fața t.e.m. sau a produsului $R_k I_k$, numit *cădere de tensiune*, dacă t.e.m., respectiv curenții, sînt îndreptați în sensul de integrare al relației (13.6) (adică în sensul ales arbitrar al lui ds); în caz contrar, se pune semnul (—). Sensul de integrare numit și *sens de scriere* a teoremei se marchează cu o săgeată încurbată pe ochi (v. fig. 13.6). Numărul de ochiuri pentru care se pot scrie ecuații independente (ochiurile fundamentale) este conform unei *teoreme a lui Euler* (care nu se va demonstra).

$$O=L-N+1. \tag{13.9}$$

Deci, în total, se pot scrie pentru o rețea:

$(N-1)+(L-N+1)=L$ ecuații independente, L fiind numărul de laturi ale rețelei, adică exact atîtea cîți curenți necunoscuți sînt.

13.2.4. **Aplicație.** *Puntea Wheatstone.* Ecuațiile, care rezultă din aplicarea teoremelor lui Kirchhoff sînt în număr de șase.

Prima teoremă dă pentru nodurile a, c, d ecuațiile:

$$I_1+I_2=I$$
$$I_3+I_5=I_1$$
$$I_2+I_5=I_4.$$

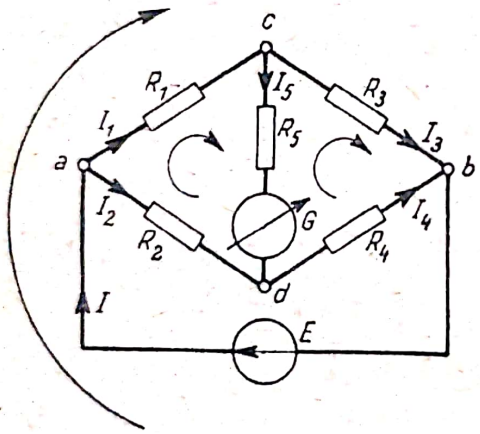


Fig. 13.7.

A doua teoremă, aplicată ochiurilor acd, cbd, $acbE$, dă ecuațiile:

$$O=I_1R_1+I_5R_5-I_2R_2$$
$$O=I_3R_3+I_4R_4-I_5R_5$$
$$E=I_1R_1+I_3R_3.$$

Prin rezolvarea sistemului de șase ecuații, se obține pentru calculul curentului I_1 ecuația:

$$I_1=(R_1+R_3)\frac{R_2R_4+R_5(R_2+R_4)+R_1R_4}{R_2R_4+R_5(R_2+R_4)+R_2R_3}E. \tag{13.10}$$

Curenții I_2, I_3, I_4 au expresii analoge cu cea a curentului I_1 și se obțin prin permutări circulare ale indicilor rezistențelor din ecuația (13.10).

Curentul care trece prin galvanometrul G este:

$$I_5=E\frac{R_2R_3-R_1R_4}{R_5(R_1+R_3)(R_2+R_4)+R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)} \tag{13.11}$$

Curentul I_5 se anulează (echilibrul punții) pentru:

$$\frac{R_1}{R_2}=\frac{R_3}{R_4}. \tag{13.12}$$

Această condiție de echilibru se află mai simplu, dacă se presupune curentul $I_5=0$ și deci:

$$I_1=I_3;\ I_2=I_4 \tag{13.13}$$

De asemenea $U_{cd}=0$ și ținînd seama că în c.c. tensiunea nu depinde de drum:

$$U_{cd}=-R_1I_1+R_2I_2=R_3I_3-R_4I_4=0 \qquad (13.14)$$

în consecință din relațiile (13.13) și (13.14) rezultă condiția (13.12).

13.2.5. **Calculul tensiunii între două noduri.** Se consideră un ochi format dintr-un lanț de laturi ale rețelei cuprinse între cele două noduri A și B și care se închide prin aer (fig. 13.8). Parcurgînd acest ochi de rețea de la B spre A prin laturi și de la A spre B prin aer, se obține conform teoremei a doua a lui Kirchhoff, și cu o notație ușor de înțeles:

$$\sum_{B\to A}E_k=\sum_{B\to A}R_kI_k+U_{AB}$$

adică

$$U_{AB}=\sum_{B\to A}(E_k-R_kI_k)=\sum_{A\to B}(R_kI_k-E_k). \qquad (13.15)$$

În acest mod s-au scris ecuațiile (13. 14).

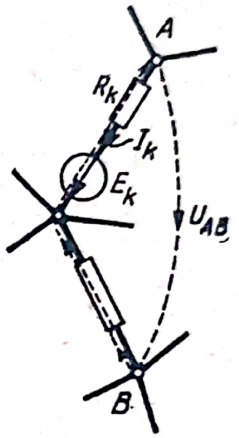


Fig. 13.8.

13.2.6. **Aplicație. Funcționarea în paralel a două surse de energie electrică.** Operînd direct cu valorile numerice (fig. 13.9) ecuațiile sînt:

$$\text{(I)}\quad 100=10I_1+15(I_1+I_2)$$

$$\text{(II)}\quad 80=2I_2+15(I_1+I_2)$$

Rezultă: $I_1=2{,}5\text{A};\ I_2=2{,}5\text{A};\ I_3=I_1+I_2=5\text{A}.$

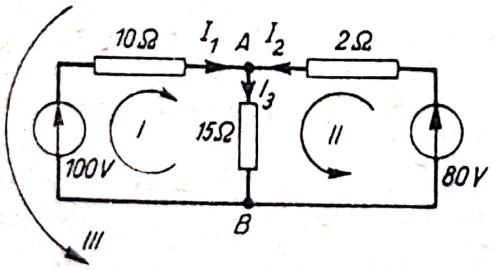


Fig. 13.9.

13.2.7 **Indicații practice pentru utilizarea corectă a teoremelor lui Kirchhoff.**

a) Se atribuie curenților din laturi (t.e.m. fiind date) sensuri de referință arbitrare. Dacă prin rezolvarea ecuațiilor curenții apar cu semne negative, sensul real al curenților este opus celui de referință adoptat. Același procedeu se aplică t.e.m. cînd acestea sînt necunoscute, pentru curenți cunoscuți.

b) Se aleg ochiurile independente și sensurile de referință pe ele.

c) Se scriu apoi ecuațiile de noduri și de ochiuri și se rezolvă sistemul astfel obținut.

La aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff, este absolut necesar să se parcurgă tot ochiul de rețea în același sens, arbitrar ales pentru acel ochi. T. e.m. sînt afectate de semnul (+) în relația (13.8) dacă sînt parcurse în sensul lor și de semnul (—) în cazul invers. Produsele R_KI_K sînt afectate de semnul (+) în relația (13.8) dacă parcurgerea laturii se face în sensul curentului și de semnul (—) în cazul invers. Numărul ecuațiilor ce provin din teorema întîi este $(N-1)$, iar numărul ecuațiilor ce provin din teorema a doua este $(L-N+1)$. Numărul total al ecuațiilor este deci egal cu numărul L al laturilor.

13.2.8. **Verificări ale aplicării corecte a teoremelor lui Kirchhoff și ale calculului numeric efectuat.** *Prima posibilitate:* Se scrie teorema a doua Kirchhoff pentru un ochi nou, nefolosit la scrierea ecuațiilor, și relația trebuie să se verifice. De exemplu în figura 13.9 se scrie pentru ochiul exterior (III):

$$80-100=2I_2-10I_1=2.2{,}5-10.2{,}5 \text{ sau } 20=20.$$

Scanned with OKEN Scanner

A doua posibilitate: Se scrie tensiunea electrică între A și B pe mai multe drumuri deosebite și se verifică dacă rezultatele sînt egale. În cazul figurii 13.10:

$$U_{AB}=E_1-R_1I_1=100-10\cdot2,5=75\text{V}$$

$$U_{AB}=R_3I_3=15,5=75\text{V}$$

$$U_{AB}=E_2-R_2I_2=80-2\cdot2,5=75\text{V}.$$

A treia posibilitate. Verificarea *bilanțului puterilor* (a se vedea și par. 13.3). Puterea dată de un generator este, conform relației (12.42):

$$P_g=EI \tag{13.16}$$

iar puterea ce se pierde prin efect Joule-Lenz într-o rezistență este:

$$P_R=RI^2. \tag{13.17}$$

În consecință, conform principiului de conservare al energiei aplicat unei rețele complete, izolate:

$$\sum_k E_kI_k=\sum_k R_kI_k^2, \qquad k=1, 2, \ldots L. \tag{13.18}$$

În cazul relației din figura 13.10, bilanțul puterilor dă:

$$P_g=E_1I_1+E_2I_2=100\cdot2,5+80\cdot2,5=450\ \text{W}$$

$$P_R=R_1I_1^2+R_2I_2^2+R_3I_3^2=10\cdot2,5^2+15\cdot5^2+2\cdot2,5=450\ \text{W}.$$

13.3. Teorema conservării puterilor.

13.3.1. **Bilanțul puterilor.** Ultima verificare indicată mai sus consistă în aplicarea teoremei conservării puterilor, care se poate enunța în două moduri:

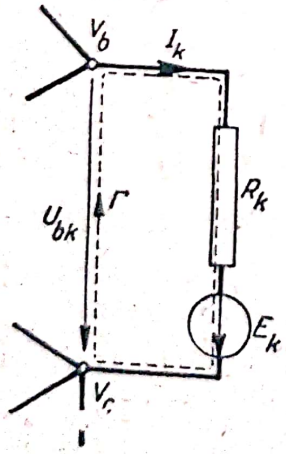


Fig. 13.10.

a) Suma algebrică a puterilor, primite de toate laturile rețelei pe la bornele lor, este nulă pentru o rețea izolată:

$$\sum_{k=1}^{L} U_{bk}I_k=0, \tag{13.19}$$

(relația fiind scrisă cu convenția de la receptoare pentru toate laturile, fig. 13.3).

b) Suma algebrică a puterilor debitate de sursele din rețea este egală cu suma puterilor consumate în rezistențele laturilor:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{L} E_kI_k=\sum_{k=1}^{L} R_kI_k^2}\ >0. \tag{13.20}$$

13.3.2. *Demonstrația teoremei*. Se consideră mai întîi o latură a rețelei pentru care se scrie, conform convenției de la receptoare (fig. 13.3) relația:

$$E_k=R_kI_k-U_{bk}. \tag{13.21}$$

Multiplicînd relaţia (13.21) cu I_k se obţine ecuaţia de bilanţ energetic al laturii:

$$E_k I_k + U_{bk} I_k = R_k I_k^2 \tag{13.22}$$

în care: $P_{gk} = E_k I_k$ este puterea debitată de sursă

$P_{bk} = U_{bk} I_k$ este puterea primită la borne,

$P_{Rk} = R_k I_k^2$ este puterea pierdută în rezistenţă.

Observaţie. Conform convenţiei de la receptoare pentru asocierea sensurilor de referinţă, produsul $U_b I$ are semnificaţia de putere primitivă (algebric) de latura respectivă. Dacă produsul $U_b I$ rezultă negativ din calculul numeric, înseamnă că puterea este efectiv cedată de latură.

(Prin folosirea convenţiei de la generatoare pentru asocierea sensurilor de referinţă, produsul $U_b I$ ar fi reprezentat puterea cedată de latura respectivă prin borne. Dacă produsul $U_b I$ ar fi rezultat negativ din calculul numeric, ar fi însemnat că puterea ar fi fost efectiv primită de latură).

Se consideră, apoi, prima teoremă a lui Kirchhoff aplicată unui nod oarecare b şi se multiplică ecuaţia obţinută cu potenţialul V_b al acelui nod. Se consideră apoi suma tuturor ecuaţiilor scrise pentru toate nodurile:

$$\sum_{b=1}^{N} V_b \left[\sum_{(b)} I_k \right] = 0. \tag{13 23}$$

În această sumă dublă fiecare curent I_k va apare de două ori, fiind multiplicat pe rînd cu fiecare din cele două potenţiale de la bornele laturii k, intervenind o dată cu semnul (+) — cînd iese din nod — şi odată cu semnul (—) — cînd intră în nod. În consecinţă, suma din relaţia (13.23) se poate transforma într-o sumă pe laturi:

$$\sum_{k=1}^{L} I_k (V_b - V_c) = 0 \tag{13.24}$$

în care $V_b - V_c = U_{bk}$ este tensiunea de la bornele laturii k, cu convenţia de la receptoare. Astfel se obţine forma din relaţia (13.19):

$$\sum_{k=1}^{L} U_{bk} I_k = 0 \tag{13.19}$$

Dar din relaţiile (13.21) şi (13.19) rezultă:

$$\sum_{k=1}^{L} (R_k I_k - E_k) I_k = 0. \tag{13.25}$$

care este de fapt relaţia (13.20). O aplicaţie directă a teoremei este verificarea bilanţului puterilor (v.13.2.7).

Demonstraţia de mai sus arată că teorema conservării puterilor sub forma (13.19) sau (13.20) este o consecinţă a teoremelor lui Kirchhoff.

Scanned with OKEN Scanner

13.4. Teorema transferului maxim de putere

Se consideră circuitul din figura 13.11. Sînt cunoscute valoarea t.e.m. E și a rezistenței R_i, care este rezistența interioară a sursei.

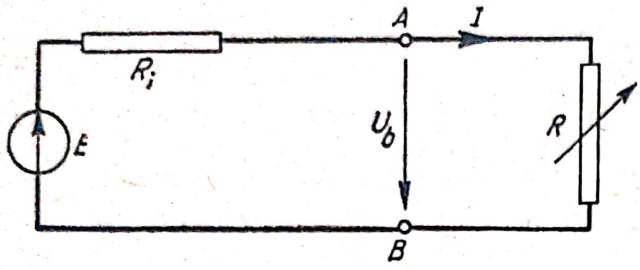


Fig. 13.11.

Se cere să se determine valoarea (pozitivă) a rezistenței R, reprezentînd receptorul, pentru care puterea dată de generator pe la bornele A și B este maximă.

Puterea la borne are expresia:

$$P_b = U_b I = RI^2 = \frac{RE^2}{(R+R_i)^2} > 0 \qquad (13.26)$$

deoarece $I = \frac{E}{R+R_i}$ conform legii lui Ohm. Se vede ușor că funcția continuă și pozitivă (13.26) se anulează pentru $R=0$ și $R \to \infty$ și are un maxim în acest interval.

Maximul expresiei P_b, se obține anulînd derivata $\frac{dP_b}{dR}$

$$\frac{dP_b}{dR} = \frac{E^2(R+R_i)^2 - 2(R+R_i)RE^2}{(R+R_i)^4} = \frac{E^2(R_i^2 - R^2)}{(R+R_i)} = 0$$

Derivata se anulează numai pentru:

$$R = R_i \qquad (13.27)$$

În general se poate formula următoarea teoremă:

O sarcină conectată între două borne ale unei surse absoarbe puterea maximă dacă rezistența ei este egală cu valoarea rezistenței interioare a sursei (presupuse invariabile).

Puterea maximă debitată la borne de generator, în cazul exemplului considerat în figura 13.11 este:

$$P_{b\,max} = \frac{E^2}{4R_i} \qquad (13.28)$$

Deoarece puterea furnizată de generator este:

$$P_g = EI = \frac{E^2}{2R_i}, \qquad (13.29)$$

randamentul instalației este, în acest caz, cu $R=R_i$;

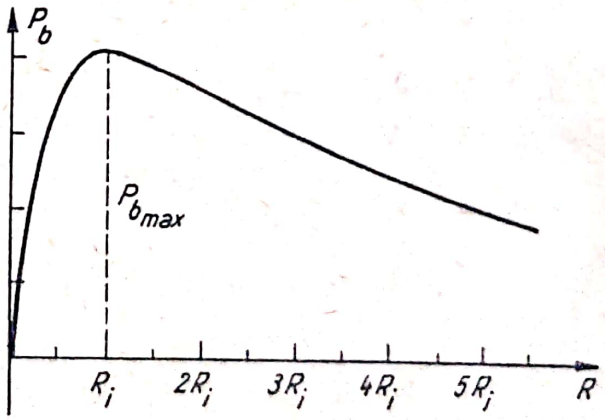


Fig. 13.12.

$$\eta = \frac{P_b}{P_g} = 0{,}5. \qquad (13.30)$$

În figura 13.12 se indică variația puterii la borne în funcție de variația rezistenței R.

13.5. Teoremele rezistențelor echivalente

Rezistența echivalentă între două borne ale unei rețele oarecare, funcționînd în c.c., este prin definiție raportul dintre tensiunea aplicată la borne și curentul pe care îl absoarbe rețeaua, considerate pozitive, după regula de la receptoare (v. fig. 13.13):

$$R_e=\frac{U_b}{I} \tag{13.31}$$

Se vor studia două cazuri particulare:

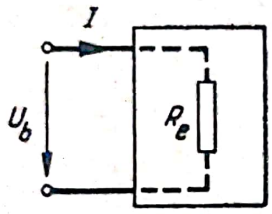


Fig. 13.13.

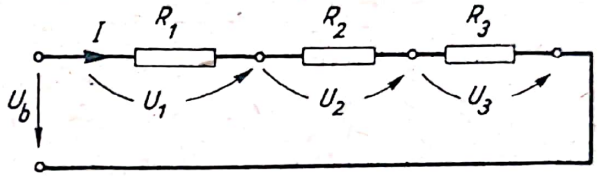


Fig. 13.14.

13.5.1. Rezistoare în serie. În acest caz toate rezistoarele sînt străbătute de același curent I (fig. 13.14), iar:

$$U_b=U_1+U_2+U_3 \tag{13.32}$$

Dar:

$$U_1=R_1I_1;\ U_2=R_2I_2;\ U_3=R_3I_3 \tag{13.33}$$

Din relațiile (13.31), (13.32) și (13.33) se obține:

$$R_e=R_1+R_2+R_3 \tag{13.34}$$

sau generalizînd pentru n rezistențe în serie:

$$\boxed{R_e=\sum_{k=1}^{n}R_K} \tag{13.35}$$

Rezistența echivalentă a n rezistențe în serie este egală cu suma rezistențelor.

13.5.2. Rezistoare în paralel (în derivație). La bornele rezistoarelor se aplică aceeași tensiune (fig. 13. 15).

Se recomandă ca, în acest caz, să se lucreze cu conductanțele; conductanța echivalentă fiind prin definiție egală cu inversul rezistenței echivalente:

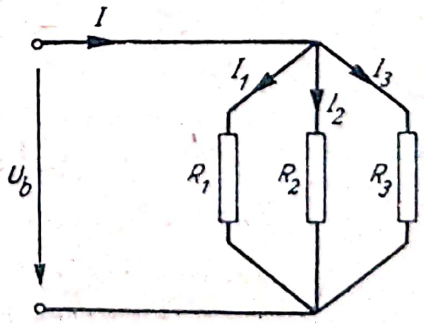


Fig. 13.15.

$$G_e=\frac{1}{R_e};\quad G_1=\frac{1}{R_1};\quad G_2=\frac{1}{R_2};\quad G_3=\frac{1}{R_3} \tag{13.36}$$

Aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff:

$$I=I_1+I_2+I_3, \tag{13.37}$$

dar:

$$U_b = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3 = R_e I. \tag{13.38}$$

Din relațiile (13.36), (13.37), (13.38) și (13.31) se obține:

$$G_e = G_1 + G_2 + G_3. \tag{13.39}$$

Generalizînd:

$$G_e = \sum_{k=1}^{n} G_k \tag{13.40}$$

sau:

$$\boxed{\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}} \tag{13.41}$$

Valoarea inversă a valorii rezistenței echivalente a n rezistențe în paralel este egală cu suma inverselor acestor rezistențe.

13.5.3. **Aplicații. Cazul a două rezistențe în paralel** (fig. 13.16). Se cunoaște valoarea curentului total I și trebuie determinate valorile curenților componenți I_1 și I_2.

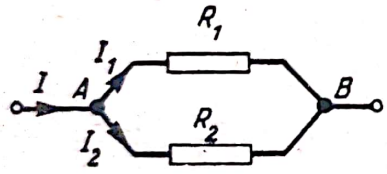


Fig. 13.16.

Se scrie tensiunea între A și B:

$$U_{AB} = I R_e = I_1 R_1 = I_2 R_2 \tag{13.42}$$

în care, conform relației (13.41):

$$R_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{13.43}$$

Se deduce din relațiile (13.42) și (13.43):

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \\ I_2 &= I \frac{R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}\right\} \tag{13.44}$$

Curentul într-o latură a unei bifurcații este egal cu curentul total înmulțit cu rezistența celeilalte laturi și împărțit cu suma rezistențelor. Folosind această regulă se pot calcula rapid curenții în unele circuite. De exemplu, în *cazul unui montaj mixt de rezistențe* (fig. 13.17) se obține succesiv:

$$I = \frac{E}{R_e} = \frac{E}{R + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{30}{3 + \dfrac{3 \cdot 6}{3+6}} = 6\text{A}$$

$$I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 6 \frac{6}{9} = 4 \text{ A}$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 6 \frac{3}{9} = 2 \text{ A}$$

Verificare: $I = I_1 + I_2$ sau $6 = 4 + 2$.

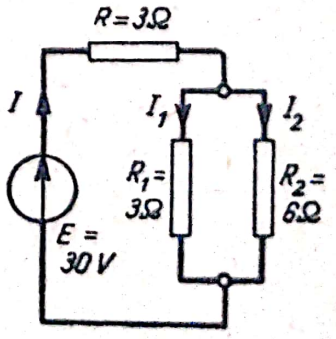


Fig. 13.17.

13.6. Teorema superpoziției

Calculul rețelelor cu ajutorul teoremelor lui Kirchhoff este uneori prea lung. De aceea, se folosesc anumite teoreme, care aplicate potrivit, permit să se facă simplificări importante ale calculelor. În cele ce urmează se vor enunța cîteva dintre teoremele importante pentru rezolvarea rețelelor liniare, începînd cu teorema superpoziției.

Conform teoremei superpoziției, intensitatea curentului electric în orice latură a unei rețele electrice liniare complete este suma algebrică a intensităților curenților pe care i-ar stabili prin acea latură fiecare dintre surse, dacă s-ar găsi singură în rețea.

Această teoremă rezultă din caracterul liniar al ecuațiilor corespunzătoare teoremelor lui Kirchhoff:

$$\sum_{(b)} I_k=0 \text{ (pentru fiecare nod } b=1,\ 2,\ \ldots N) \tag{13.5}$$

$$\sum_{(p)} E_k=\sum_{(p)} R_k I_k \text{ (pentru fiecare ochi } p=1,\ 2,\ \ldots,O) \tag{13.9}$$

Rezolvînd prin regula lui Cramer sistemul de ecuații, se obține, pentru curentul din latura j, o expresie de forma:

$$I_j=G_{j1}E_1+G_{j2}E_2+\cdots+G_{jk}E_k+\cdots G_{jL}E_L, \tag{13.45}$$

adică o funcție liniară și omogenă în raport cu t.e.m. din laturi. Coeficienții G_{jk} sînt ca dimensiuni conductanțe (G_{jk} este prin definiție conductanța de transfer *de la latura k la latura j*).

Relația (13.45) se poate scrie sub forma:

$$I_j=\sum_{k=1}^{L} I_{jk}=\sum_{k=1}^{L} G_{jk}E_k \tag{13.46}$$

în care $I_{jk}=G_{jk}E_k$ este curentul din latura j cînd toate t.e.m. sînt nule în afară de E_k. Adică:

$$I_{jk}=[I_j]_{E_k\neq 0;\ E_j=0} \tag{13.47}$$

Această relație exprimă chiar curentul de mai sus al teoremei superpoziției.

În consecință, calculul unei rețele cu folosirea teoremei superpoziției constă din:

— anularea t.e.m. a tuturor surselor din rețea, afară de una singură (cu păstrarea rezistențelor interioare ale surselor);

— calculul curenților rețelei mai simple obținute în acest mod;

— repetarea acestei operații de un număr de ori egal cu numărul total al laturilor active ale rețelei;

— calculul curenților reali, făcînd suma algebrică a curenților obținuți anterior în fiecare latură.

Aplicație. Utilizînd exemplul din figura 13.9, se consideră rețeaua alimentată succesiv de cîte unul singur dintre generatoare.

Scanned with OKEN Scanner

Se ajunge astfel la cele două rețele din figura 13.18.
Rezolvînd rețeaua (a) se obține (folosind cele arătate în par. 13.5):

$$I_{11}=\frac{100}{10+\frac{2\cdot 15}{2+15}}=\frac{17}{2}\text{ A};\qquad I_{31}=I_{11}\frac{2}{2+15}=\frac{17}{2}\cdot\frac{2}{17}=1\text{ A}$$

$$I_{21}=-I_{11}\frac{15}{2+15}=-\frac{17}{2}\cdot\frac{15}{17}=-\frac{15}{2}\text{A}.$$

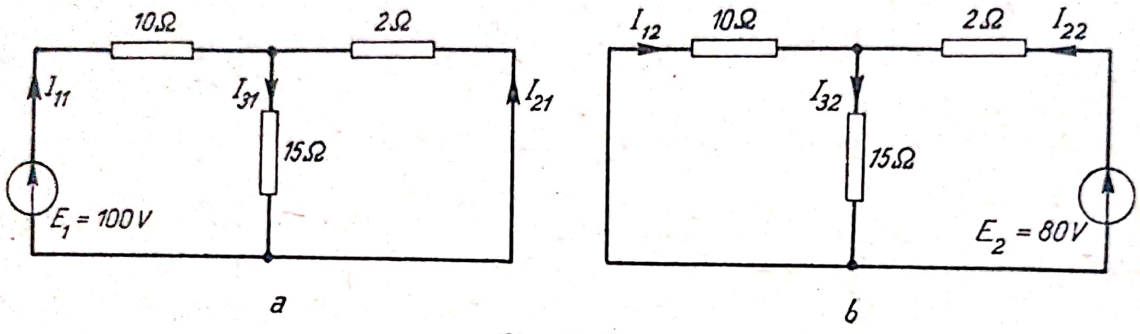


Fig. 13.18.

Rezolvînd rețeaua (b) se obține:

$$I_{22}=\frac{80}{2+\frac{10\cdot 15}{10+15}}=10\text{A};\qquad I_{32}=I_{22}\frac{10}{10+15}=10\cdot\frac{10}{25}=4\text{A}$$

$$I_{12}=I_{22}\frac{15}{10+15}=-10\frac{15}{25}=-6\text{ A}.$$

Suprapunînd cele două serii de rezultate se obțin curenții reali:

$$I_1=I_{11}+I_{22}=2{,}5\text{A};\qquad I_2=I_{21}+I_{22}=2{,}5\text{A};\qquad I_3=I_{31}+I_{32}=5\text{A}.$$

13.7. Teorema reciprocității

Curentul produs într-o latură j a unei rețele de o sursă situată într-o altă latură k (fără să mai existe alte surse în rețea) este egal cu curentul pe care

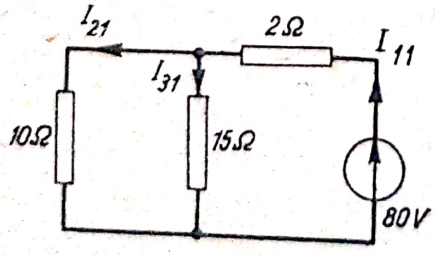


Fig. 13.19.

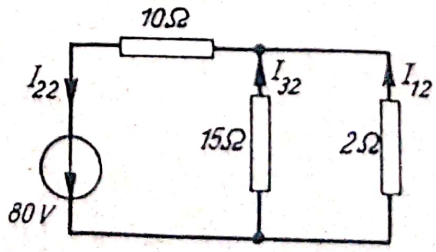


Fig. 13.20.

l-ar produce în latura k aceeași sursă mutată în latura j, rezistențele laturilor rămînînd neschimbate (teorema este dată fără demonstrație).

Adică:

$$I_{jk}=I_{kj}\quad(\text{cu}E_k=E_j=E).\tag{13.48}$$

E x e m p l u. Pentru circuitul din figura 13.19 cu trei laturi, curentul produs în latura 2 de sursa de 80 V din latura 1 este:

$$I_{21}=I_{11}\frac{15}{10+15}=\frac{80}{2+\dfrac{10\cdot 15}{10+15}}\cdot\frac{15}{10+15}=6A.$$

Dacă sursa este mutată din latura 1 în latura 2 (fig. 13.20), curentul produs de ea în latura 1 este:

$$I_{12}=I_{22}\frac{15}{15+2}=\frac{80}{10+\dfrac{15\cdot 2}{15+2}}\cdot\frac{15}{15+2}=6\ A.$$

Este astfel îndeplinită condiţia (13.48).

13.8. Teoremele generatorului echivalent

Se numeşte *schemă echivalentă* a unei reţele neizolate date, schema unei reţele fictive, care ar putea înlocui reţeaua dată în reţeaua mai mare din care face parte, fără să se schimbe curenţii care intră sau ies pe la bornele de acces sau diferenţele de potenţial dintre aceste borne.

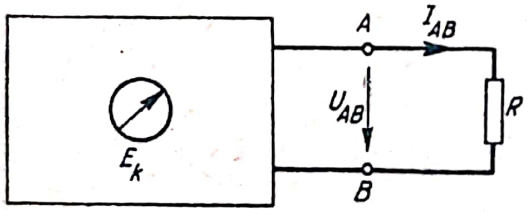


Fig. 13.21.

Se consideră o reţea liniară şi activă cu două borne de acces (adică un dipol activ) între care, la funcţionarea în gol, există o tensiune U_{AB_0} (fig. 13.21). Dacă între aceste două borne A şi B se leagă o rezistenţă, va trece un curent I_{AB}, iar între bornele A şi B va exista tensiunea $U_{AB}=RI_{AB}$. Teoremele generatorului echivalent stabilesc că un dipol liniar activ admite două scheme echivalente, numite schema generatorului de tensiune echivalent (fig. 13.22) şi schema generatorului de curent echivalent (fig. 13.23).

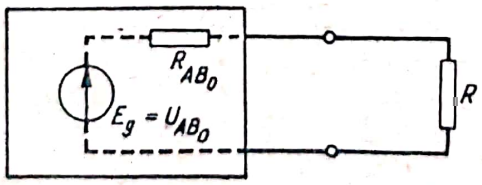


Fig. 13.22.

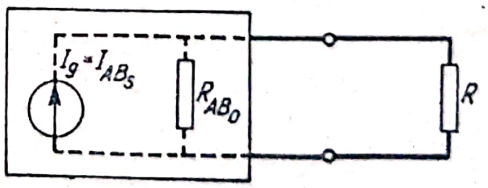


Fig. 13.23.

13.8.1. **Teorema generatorului de tensiune echivalent (Thévenin-Helmholtz)**: *Curentul I_{AB} debitat de o reţea liniară într-o rezistenţă R legată la bornele (A, B), este egal cu raportul dintre tensiunea U_{AB_0} de mers în gol la bornele (A, B)[1] şi suma dintre rezistenţa exterioară R şi rezistenţa interioară R_{AB_0} a reţelei pasivizate.*

[1] Prin U_{AB_0} s-a notat tensiunea între bornele A şi B, înainte de legarea rezistenţei R. Indicele „0" provine din faptul că se consideră bornele nelegate ca fiind „în gol" ($I_{AB}=0$).

Demonstrația se bazează pe teorema superpoziției. Se presupune rețeaua (completată cu latura de rezistență R) ca provenind prin superpoziție din două rețele (a și b fig. 13.24). O rețea (a) care are toate sursele cu t.e.m. din rețeaua inițială și în plus o sursă cu t.e.m. $E'=-U_{AB_0}$ în latura cu rezistența R. În aceste condiții se menține tensiunea U_{AB_0} între bornele A și B, deoarece astfel nu trece nici un curent prin latura de rezistență R. Cealaltă rețea (b) are numai un generator cu o t.e.m. $E''=U_{AB_0}$ care acționează în

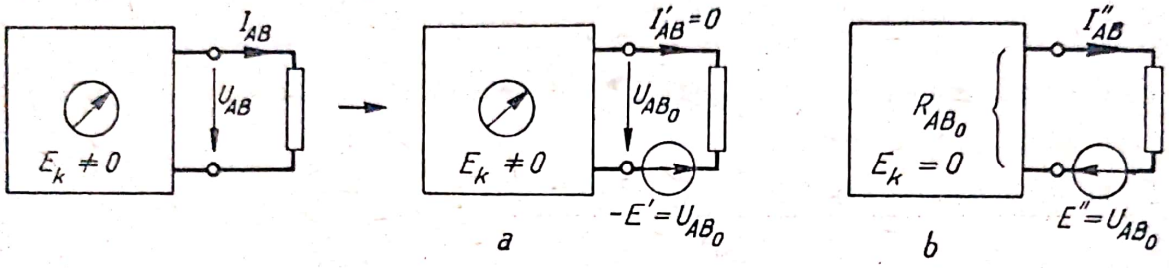


Fig. 13.24.

latura de rezistență R, celelalte t.e.m. din rețea fiind nule. În acest caz, curentul I''_{AB} are valoarea:

$$I''_{AB}=\frac{E''}{R+R_{AB_0}}=\frac{U_{AB_0}}{R+R_{AB_0}}, \qquad (13.49)$$

în care R_{AB_0} este rezistența echivalentă între bornele A și B ale rețelei pasivizate.

Suprapunînd cele două sisteme de surse ale celor două rețele se obține rețeaua inițială, iar curentul I_{AB} va fi:

$$I_{AB}=I'_{AB}+I''_{AB}=I''_{AB}, \text{ deoarece } I'_{AB}=0. \qquad (13.49')$$

În concluzie, din relațiile (13.49) și (13.49') se obține:

$$\boxed{I_{AB}=\frac{U_{AB_0}}{R+R_{AB_0}}} \qquad (13.50)$$

în care: U_{AB_0} este tensiunea la bornele A, B înainte de legarea rezistenței R (de mers în gol); R_{AB_0} —rezistența echivalentă a rețelei pasivizate între bornele A și B, înainte de legarea rezistenței R.

Cum expresia (13.50) coincide formal cu expresia curentului debitat de un generator, de t.e.m. U_{AB_0} și rezistența interioară (serie) R_{AB_0}, pe o rezistență exterioară R — rezultă că această teoremă stabilește că o rețea electrică poate fi înlocuită în raport cu două borne printr-un *generator echivalent de tensiune*, avînd t.e.m. $E_g=U_{AB_0}$ și rezistența interioară $R_i=R_{AB_0}$ (în serie).

În adevăr, în acest caz (fig. 13.22), se deduce imediat din teorema a doua a lui Kirchhoff:

$$I_{AB}=\frac{E}{R_i+R}=\frac{U_{AB_0}}{R_{AB_0}+R}$$

ceea ce reprezintă chiar relația 13.50 dată de teorema Thévenin-Helmholtz. Această schemă echivalentă este convenabilă în special cînd $R_{AB_0} \ll R$ și deci:

$$I_{AB} \approx \frac{U_{AB_0}}{R} \tag{13.50'}$$

13.8.2. **Teorema generatorului echivalent de curent (Norton)**: *Tensiunea U_{AB} produsă în sarcină de o rețea liniară care alimentează o rezistență exterioară R, este egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit I_{AB_s} al rețelei, la acele borne, și suma dintre conductanța interioară a rețelei pasivizate $G_{AB_0}=\frac{1}{R_{AB_0}}$ și conductanța exterioară $G=\frac{1}{R}$.*

Demonstrația acestei teoreme se bazează pe teorema precedentă; curentul I_{AB_s} se obține legînd bornele A și B în scurtcircuit (rezistența exterioară $R=0$). Conform teoremei Thévenin-Helmholtz, relația (13.50), el are valoarea:

$$I_{AB_s}=\frac{U_{AB_0}}{R_{AB_0}}=G_{AB_0}U_{AB}. \tag{13.51}$$

Tensiunea U_{AB} în sarcină este:

$$U_{AB}=RI_{AB}=R\frac{U_{AB_0}}{R+R_{AB_0}}$$

sau ținînd seamă de relația (13.51) $R=\frac{1}{G}$ și $R_{AB_0}=\frac{1}{G_{AB_0}}$ și

$$\boxed{U_{AB}=\frac{I_{AB_s}}{G_{AB_0}+G}.} \tag{13.52}$$

Schema echivalentă corespunzătoare este dată în figura 13.23, deoarece din această teoremă rezultă că orice rețea electrică se poate înlocui în raport cu două borne A, B cu un *generator echivalent cu curent* în care debitează un curent constant $I_g=I_{ABs}$ și are o conductanță interioară (în paralel) $G_i=G_{AB_0}$. În adevăr, din figura 13.23 se deduce:

$$I_{AB}=I_g\frac{R_i}{R+R_i}=I_{AB_s}\frac{R_{AB_0}}{R+R_{AB_0}}. \tag{13.53}$$

Deci:

$$U_{AB}=RI_{AB}=I_{AB_s}\frac{R\cdot R_{AB_0}}{R+R_{AB_0}}$$

sau

$$U_{AB}=I_{AB_s}\frac{1}{G_{AB_0}+G}$$

adică chiar relația (13.52).

Această schemă echivalentă este convenabilă în special cînd $G_{AB_0} \ll G$, adică $R_{AB_0} \gg R$ și deci:

$$U_{AB} \approx \frac{I_{AB_s}}{G} = R \cdot I_{AB_s} .$$

13.8.3. Aplicație. Se consideră rețeaua din figura 13.9 cu parametrii indicați. Să se calculeze direct, prin teorema Thévenin-Helmholtz, curentul I_3. Curentul I_3 va fi:

$$I_3 = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB_0} + R_3} . \tag{13.54}$$

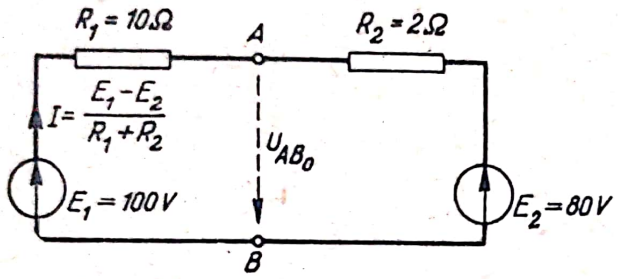


Fig. 13.25.

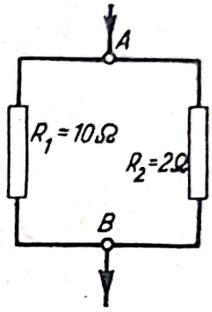


Fig. 13.26.

Calculul tensiunii de gol U_{AB_0} se face considerînd că din rețeaua dată lipsește latura AB (fig. 13.25). Se obține:

$$U_{AB_0} = E_1 - R_1 I = E_1 - R_1 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 100 - 10 \frac{100 - 80}{10 + 2} = \frac{250}{3} \text{ V}.$$

Calculul rezistenței interioare R_{AB_0} (fig. 13.26). Se consideră rețeaua pasivizată și alimentată pe la bornele A, B:

$$R_{AB_0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10 \cdot 2}{10 + 2} = \frac{5}{3} .$$

Conform relației (13.54), curentul va fi:

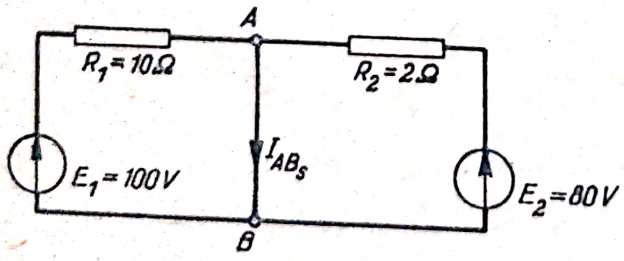


Fig. 13.27

$$I_{AB} = I_3 = \frac{250}{3} \cdot \frac{1}{\frac{5}{3} + 15} = 5\text{A}$$

În aceeași rețea, se calculează cu teorema lui Norton tensiunea U_{AB} conform relației (13.52):

$$U_{AB} = \frac{I_{AB_s}}{G_{AB_0} + G_3} = \frac{I_{AB_s}}{\frac{1}{R_{AB_0}} + \frac{1}{R_3}} . \tag{13.55}$$

Calculul curentului I_{AB_s} se face considerînd rețeaua dată în care latura AB este înlocuită cu o latură de rezistență nulă — scurt-circuit (fig. 13.27). Se obține:

$$I_{AB_s} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \frac{100}{10} + \frac{80}{2} = 50 \text{ A}.$$

Deci:

$$U_{AB}=\frac{50}{\frac{3}{5}+\frac{1}{15}}=75 \text{ V}.$$

Rezultatele corespund pentru ambele rezolvări cu cele obținute prin aplicarea teoremelor lui Kirchhoff (v. 13.2.5).

14. Circuite neliniare de curent continuu

Într-un circuit electric de curent continuu elementele neliniare sînt dispozitivele a căror rezistență electrică depinde de curentul ce trece prin ele sau de tensiunea aplicată la bornele lor, adică ale căror caracteristici *tensiune-curent* $u=f(i)$ sînt neliniare.

14.1. Elemente de circuit neliniare

După aspectul caracteristicii $u=f(i)$ se deosebesc elemente *simetrice* și *nesimetrice*. Elementele simetrice au curba caracteristică simetrică în raport cu originea axelor, adică rezistența acestor elemente depinde de curent în mod identic pentru ambele sensuri ale curentului prin element. Elemente simetrice sînt de exemplu: lămpile cu incandescență, descărcătoarele cu tirit etc. Elementele nesimetrice au caracteristica nesimetrică, rezistența lor depinzînd și de sensul curentului în element. Elemente nesimetrice sînt, de exemplu, redresoarele.

Se prezintă sumar elementele neliniare cele mai frecvent întîlnite în circuitele de c.c.

14.1.1. Lămpile cu incandescență. Sînt rezistoare care lucrează la temperatură mare (rezistoare termice). Din cauza încălzirii conductorului, rezistența lor variază sensibil de la starea de funcționare cu curenți mult mai mici decît curentul nominal („la rece"), la starea de funcționare normală („la cald"). În figura 14.1 sînt reprezentate caracteristicile a două lămpi: cu filament metalic (1) și cu filament de cărbune (2). Lampa cu filament metalic are coeficientul de temperatură pozitiv, iar cea cu filament de cărbune are coeficientul de temperatură negativ.

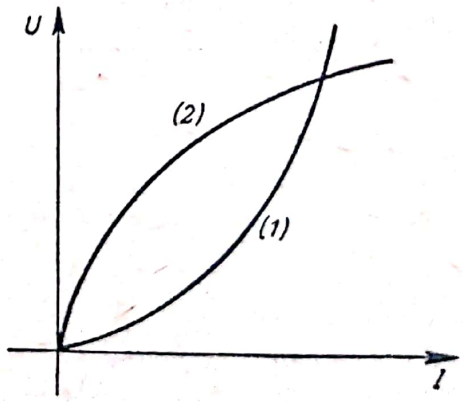


Fig. 14.1

14.1.2. Termistoare. Sînt rezistoare termice care se execută din materiale semiconductoare și au caracteristica din figura 14.2. Termistoarele se utilizează în tehnica frecvențelor înalte pentru efectuarea de măsurări.

Scanned with OKEN Scanner

14.1.3. **Rezistoare din tirit.** În tehnica tensiunilor înalte se utilizează elemente neliniare din tirit, care este un material ceramic (carbură de siliciu) a cărui rezistență scade brusc cu creșterea tensiunii. Caracteristica este reprezentată în figura 14.3. Ecuația curbei este aproximativ: $I=AU^{3,5}$. Aceste elemente se folosesc, pentru protecția instalațiilor de înaltă tensiune (stații electrice etc.), la construcția descărcătoarelor cu tirit,

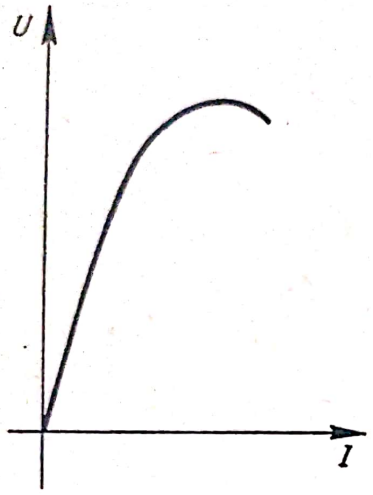


Fig. 14.2

Fig. 14.3

Descărcătorul cu tirit T este format dintr-o coloană T de discuri de tirit în serie cu un eclator a, conectat în paralel cu instalația protejată N (fig. 14.4). La tensiunea nominală intervalul disruptiv al eclatorului a nu este străpuns și prin descărcător nu trece nici un curent. La creșterea tensiunii peste tensiunea nominală (de exemplu, la supratensiuni atmosferice), spațiul disruptiv a este străpuns, iar prin coloana de tirit trece un curent mare, deoarece cu creșterea tensiunii rezistența tiritului scade foarte mult. Instalația N este deci protejată deoarece tensiunea la bornele ei nu crește excesiv. O dată cu scăderea tensiunii crește rezistența descărcătorului și scade curentul care îl străbate; se întrerupe descărcarea în spațiul disruptiv a și situația redevine normală.

14.1.4. **Lampa baretor.** Este constituită dintr-un balon de sticlă umplut cu hidrogen, în interiorul căreia se găsește un filament de fier legat la bornele

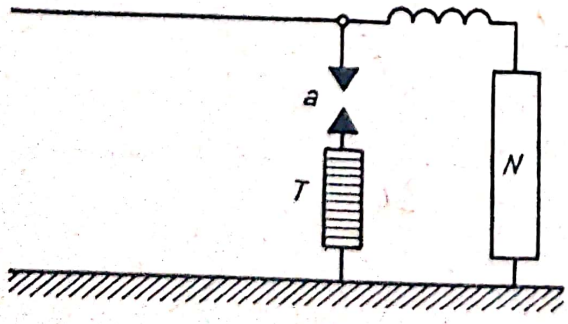


Fig. 14.4

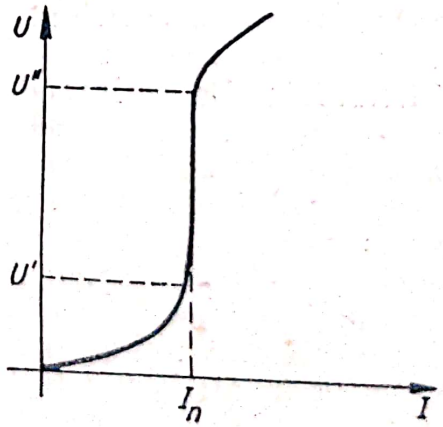


Fig. 14.5

exterioare. Caracteristica baretorului este reprezentată în figura 14.5. Între limitele de tensiune U' și U'', curentul nu variază. Lampa servește ca stabilizator de curent.

14.1.5. **Tuburile cu descărcări luminescente.** Sînt constituite din tuburi umplute cu gaz inert (de exemplu neon la presiune scăzută), în care sînt introduși doi electrozi. Caracteristica unui astfel de tub este indicată în figura 14.6. Mărindu-se treptat tensiunea la bornele tubului care nu este amorsat și ajungîndu-se la tensiunea U_a, tubul se amorsează („se aprinde"), adică între electrozi apare o descărcare luminescentă.

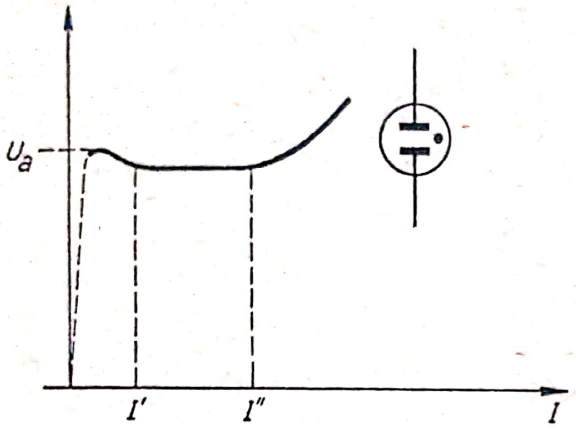


Fig. 14.6.

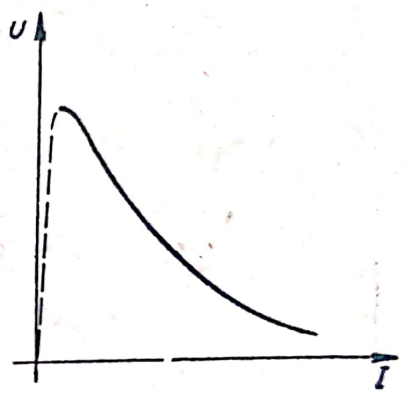


Fig. 14.7.

Între limitele I' și I'' tensiunea tubului rămîne practic constantă; acest fenomen este utilizat pentru stabilizarea tensiunii (tuburi stabilizatoare de tensiune).

14.1.6. **Arcul electric.** Arcul electric reprezintă o descărcare electrică autonomă însoțită de dezvoltare mare de căldură și lumină. Este utilizat în prezent: drept sursă de lumină în proiectoare; la sudarea și la tăierea electrică; la cuptoare electrice cu arc; în industria chimică; la redresarea curentului alternativ (redresoare cu vapori de mercur); în medicină (lămpi cu radiații ultraviolete).

Caracteristica neliniară a arcului electric este indicată în figura 14.7. Cu creșterea curentului, scade căderea de tensiune în arc, adică arcul are o caracteristică descendentă.

Arcuri electrice se obțin dacă se mărește tensiunea, în cazul unei descărcări luminescente peste o anumită limită. La presiuni mari ale gazului din tub, se obțin direct arcuri electrice. Practic, pentru a obține un arc electric se aduc întîi cei doi electrozi în contact, provocîndu-se astfel o încălzire puternică și apoi se îndepărtează. Cînd circuitul este alimentat cu o t.e.m. invariabilă, funcționarea unui arc electric este stabilă numai dacă este conectat în serie cu o rezistență adițională, de protecție (v. și par. 14.4.4).

14.1.7. **Tuburi electronice cu vid.** Se consideră un tub electronic cu doi electrozi (o diodă cu vid) utilizat pentru redresarea curentului alternativ (kenotron). Unul dintre electrozi, catodul c, este încălzit cu ajutorul unei surse de curent separate, pentru a emite electroni. Celălalt electrod, anodul a are o temperatură destul de joasă, pentru a nu se produce emisia de electroni.

Caracteristica kenotronului este dată în figura 14.8. În porțiunea puternic ascendentă a caracteristicii, ecuația curbei este $I=kU^{3/2}$. Cînd se ajunge la

valoarea tensiunii pentru care toți electronii emiși de un electrod sînt captați de celălalt, se obține valoarea de saturație I_s. Valoarea curentului I_s nu poate fi mărită decît cu mărirea temperaturii.

14.1.8. **Redresoare cu semiconductori** (cu seleniu, siliciu, cuproxid etc.). Caracteristica unui astfel de redresor este dată în figura 14.9 (cu linii îngroșate fiind arătată caracteristica idealizată). Aceste redresoare au o conductanță mare într-un sens (sensul direct) și una foarte mică în sens contrar (sensul invers) și au o utilizare extrem de largă în toate domeniile electrotehnicii (electronică, automatizări, aparate de măsurat etc.). Simbolul grafic al unui redresor e arătat în figura 14.9 (cu indicarea sensului direct al tensiunii și curentului).

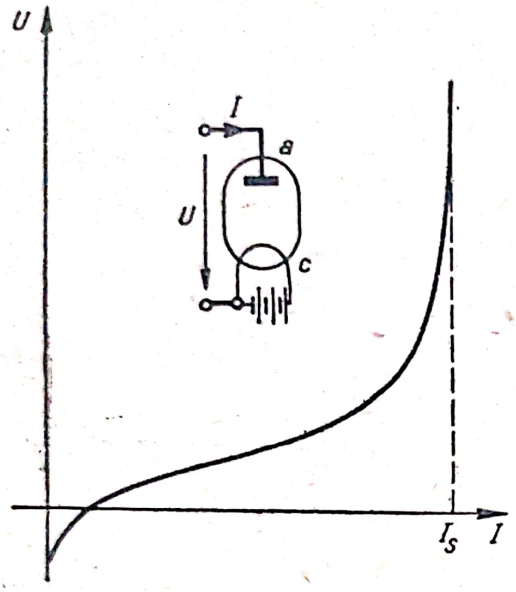


Fig. 14.8.

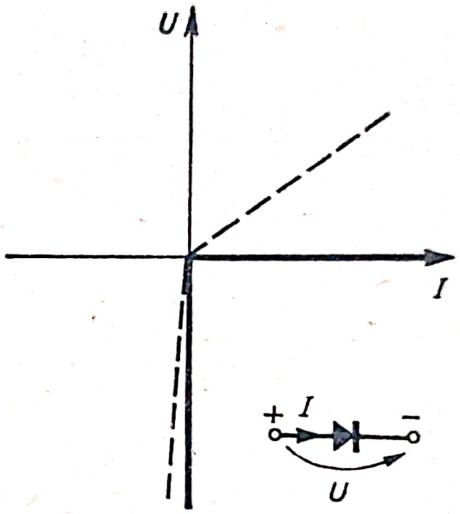


Fig. 14.9.

De exemplu, redresorul cu seleniu este format dintr-un disc de fier acoperit cu un strat de seleniu. Urmează un aliaj staniu și un disc de contact. Dacă se aplică o tensiune cu sensul de la fier la seleniu, curentul trece; dacă se schimbă polaritatea, curentul este practic nul.

14.2. Caracterizarea rezistoarelor neliniare

Pentru rezolvarea rețelelor cu rezistențe neliniare se utilizează:

a) *Caracteristica* $U=f(I)$ (caracteristica voltamper a rezistorului), care leagă tensiunea la bornele elementului neliniar de curentul care trece prin el (fig. 14.10).

b) *Rezistența statică* $R_{st}=\frac{U}{I}$. Această rezistență este proporțională cu tangenta trigonometrică a unghiului de înclinare format de coarda care unește originea O cu punctul M (de funcționare) de pe caracteristică, cu abscisa I:

$$R_{st}=k \operatorname{tg} \alpha \qquad (14.1)$$

în care k este raportul între scările grafice ale tensiunii (V/mm) şi curentului (A/mm). Pentru elementele neliniare pasive: $R_{st}>0$. Rezistenţa statică variază dacă se trece de la un punct al caracteristicii la altul. În figura 14.11 se indică *numai calitativ* variaţia rezistenţei statice în funcţie de curent pentru un redresor, corespunzător caracteristicii din figura 14.8. Cu R s-a notat *rezistenţa directă*, corespunzătoare sensului direct al curentului pentru care redresorul conduce. Cu R_i s-a notat *rezistenţa inversă*, corespunzătoare trecerii curentului în sens invers. Redresoarele au de obicei raportul R_i/R mult mai mare decît rezultă din figura 14.11.

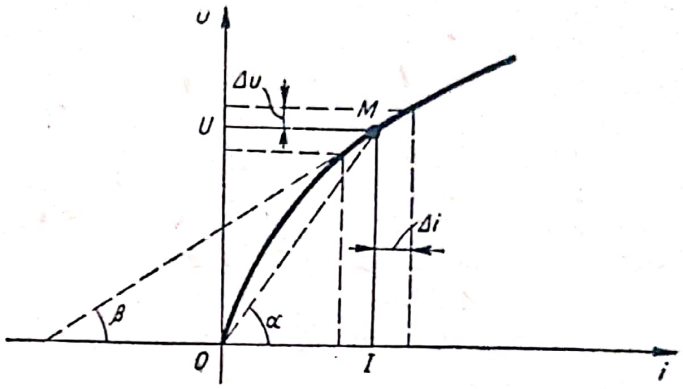


Fig. 14.10.

c) *Rezistenţa dinamică* $R_d=\lim\frac{\Delta U}{\Delta I}=\frac{dU}{dI}$ este proporţională cu tangenta trigonometrică a unghiului de înclinare a tangentei geometrice duse în punctul M de funcţionare al caracteristicii faţă de abscisă (fig. 14.10):

$$R_d=k\ \mathrm{tg}\ \beta \qquad (14.2)$$

în care k are semnificaţia din relaţia (14.1).

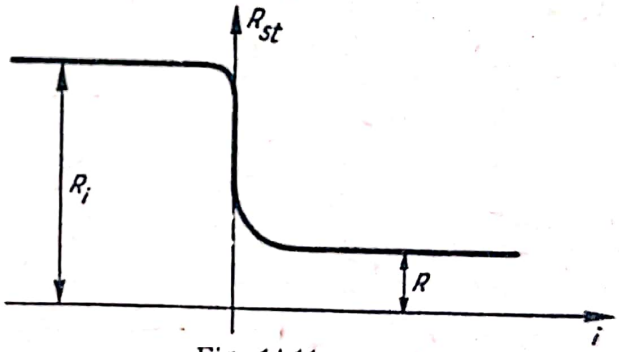


Fig. 14.11.

Se observă că $R_d>0$ pe o porţiune ascendentă a caracteristicii şi $R_d<0$ pe o porţiune descendentă a caracteristicii (de exemplu, în cazul caracteristicii arcului electric, fig. 14.7). Dacă la curentul continuu I şi tensiunea continuă U, care definesc punctul de funcţionare al elementului neliniar de circuit, se adaugă mici componente alternative de amplitudini Δi şi Δu (cum se întîmplă în cazul tuburilor electronice), rezistenţa pe care o prezintă elementul neliniar de circuit componentelor alternative (adică $\Delta u/\Delta i$) este practic egală cu rezistenţa dinamică R_d.

14.3. Teoremele lui Kirchhoff aplicate circuitelor cu elemente neliniare

14.3.1. Teoremele lui Kirchhoff. Sînt valabile pentru circuitele neliniare relaţiile:

$$\sum_{(b)} I_k=0 \qquad \text{(pentru fiecare nod } b=1,2,\ \ldots\ N) \qquad (14.3)$$

$$\sum_{(p)} E_k=\sum_{(p)} U_k \qquad \text{(pentru fiecare ochi } p=1,2,\ \ldots\ 0) \qquad (14.4)$$

În relația (13.8), în locul sumei produselor $R_k I_k$ apare suma tensiunilor la bornele elementelor neliniare (care depind de curenții respectivi după caracteristicile voltamper):

$$U_k = f_k(I_k) = U_k(I_k) \tag{14.5}$$

dacă toate elementele din circuit sînt neliniare. În cazul unui circuit combinat din rezistențe liniare și neliniare, ecuațiile (14.4) conțin atît sume de produse $R_k I_k$, cît și tensiuni $U_k(I_k)$.

La rezolvarea circuitelor cu elemente neliniare trebuie considerate ecuațiile date de teoremele (14.3) și (14.4) împreună cu caracteristicile elementelor neliniare (14.5). În cazul în care este cunoscută *ecuația* caracteristicii, este posibilă o rezolvare analitică a sistemului, care este însă foarte dificilă, deoarece apar ecuații transcendente sau de grad mai mare decît 2.

Cea mai utilizată metodă de rezolvare a circuitelor cu elemente neliniare este metoda graficoanalitică.

14.3.2. **Teoremele lui Kirchhoff pentru mici componente lent variabile.** Se consideră o rețea cu t.e.m. constante E_{k_0}, ce determină anumiți curenți I_{k_0}, respectiv tensiuni U_{k_0} la bornele rezistențelor neliniare. Aceasta este *starea de referință* a sistemului (punctul de funcționare). Dacă există anumite mici variații lente ale t.e.m. ce devin:

$$E_k = E_{k_0} + dE_{k_0} \tag{14.6}$$

apar mici modificări în valorile curenților și tensiunilor:

$$I_k = I_{k_0} + dI_{k_0}, \text{ respectiv } U_k = U_{k_0} + dU_{k_0}. \tag{14.6'}$$

Scriind teoremele lui Kirchhoff pentru ambele stări, se obțin sistemele:

$$\sum_{(b)} I_{k_0} = 0; \quad \sum_{(p)} E_{k_0} = \sum_{(p)} U_{k_0} \tag{14.7}$$

în care:

$$U_{k_0} = f_k(I_{k_0}) = U_{k_0}(I_{k_0})$$

și

$$\sum_{(b)} I_k = 0; \quad \sum_{(p)} E_k = \sum_{(p)} U_k \tag{14.7'}$$

în care: $U_k = f_k(I_k) = U_k(I_k)$. Această funcție dezvoltată în serie după relația: $F(b) = F(a) + (b-a)F'(a) + \cdots$ și reținînd numai infiniții mici de primul ordin, este:

$$U_k(I_k) = U_k(I_{k_0}) + dI_{k_0} U'_k(I_{k_0}). \tag{14.8}$$

Dar $U'_k = \frac{dU_{k_0}}{dI_{k_0}} = R_{dk}(I_{k_0})$ este rezistența dinamică a laturii k în punctul de funcționare (I_{k_0}, U_{k_0}).

Prin urmare, scăzînd sistemul (14.7) din (14.7') și ținînd seama de relațiile (14.6), (14.6') și (14.8), se obține sistemul:

$$\sum_{(b)} dI_{k_0} = 0; \quad \sum_{(p)} dE_{k_0} = \sum_{(p)} R_{dk}(I_{k_0}) dI_{k_0}. \tag{14.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

Concluzie. Componentele mici, lent variabile, ale tensiunilor și curenților față de o anumită stare de referință (punctul de funcționare) verifică teoremele lui Kirchhoff liniare, dacă în locul rezistențelor obișnuite apar rezistențele dinamice (pozitive sau negative) ale elementelor neliniare.

14.4 Aplicații

14.4.1. Un rezistor liniar conectat în serie cu un rezistor neliniar. Se dau pentru circuitul din figura 14.12, rezistența R, t.e.m. E și caracteristica voltamper a rezistorului neliniar. Se cere curentul prin circuit.

Soluție: Ecuația circuitului este cu sensurile de referință din figură:

$$E=RI+U$$

deci:

$$U=E-RI \qquad (14.10)$$

Pe de altă parte, se cunoaște caracteristica elementului neliniar (de exemplu, o lampă cu incandescență):

$$U=f(I) \qquad (14.11)$$

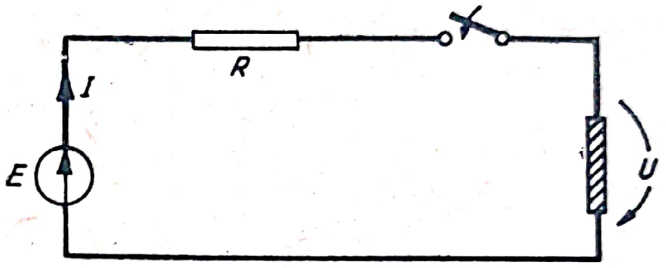


Fig. 14.12.

Rezolvarea se face grafic (fig. 14.13) construindu-se atît curba (2), care reprezintă relația (14.11), cît și dreapta (1), care reprezintă relația (14.10). Soluția este dată de punctul lor de intersecție P, care indică curentul I pentru care sînt satisfăcute ambele ecuații.

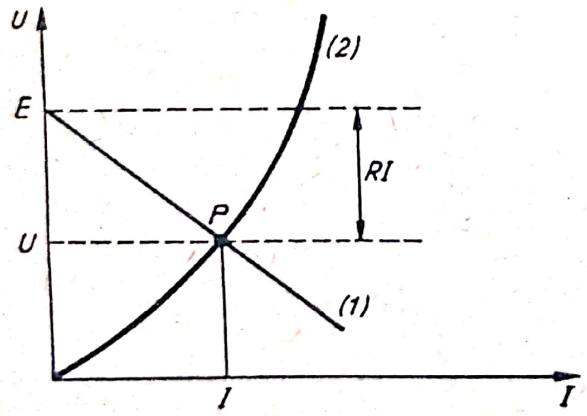


Fig. 14.13.

Problema se poate pune și invers, cerîndu-se determinarea rezistenței R pentru un anumit curent I cînd se cunoaște tensiunea de alimentare a circuitului și curba $U=f(I)$. Se găsește punctul P corespunzător curentului I pe curba $U=f(I)$. Se construiește dreapta (1) unind punctul P cu E. Se obține:

$$R=\frac{E-U}{I}.$$

Exemplu numeric. Un reostat de 80Ω este conectat în serie cu o lampă cu incandescență cu filament de cărbune. Să se determine curentul și tensiunile din fiecare porțiune a circuitului, dacă t.e.m. este 120 V, iar caracteristica voltamper a lămpii poate fi construită după următoarele date:

U(V)	0	20	40	60	80	100	120
I(A)	0	0,1	0,25	0,45	0,70	1,00	1,25

Cu ajutorul ecuațiilor (14.6) și (14.7) se construiește diagrama din figura 14.14. punctului de intersecție P îi corespunde curentul $I=0{,}6$ A. Tensiunea la bornele reostatului este 48 V, iar tensiunea la bornele lămpii este 72 V.

14.4.2. Două rezistoare neliniare conectate în serie. Se dau pentru circuitul din figura 14.15, caracteristicile voltamper ale celor două rezistoare și tensiunea la bornele circuitului. Se cere curentul prin circuit. Caracteristicile au ecuațiile:

$$U_1=f_2(I_1);\ U_2=f_2(I_1),\ \text{cu}\ I_1=I_2=I.$$

Relația între tensiunea totală U_b și tensiunile U_1 și U_2:

$$U_b = U_1 + U_2 = f(I)$$

este determinată grafic punct cu punct (fig. 14.16), obținîndu-se astfel caracteristica întregului sistem $U_b = f(I)$, pe care se găsește curentul cerut.

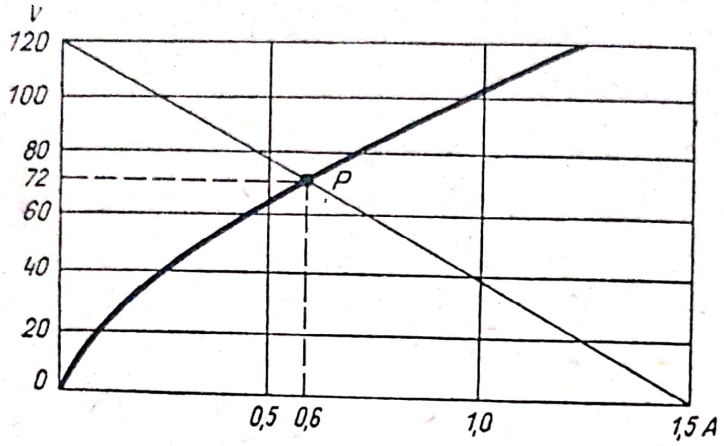


Fig. 14 14.

14.4.3. **Două rezistențe neliniare conectate în paralel** (fig. 15.17). Se pune aceeași problemă ca și în paragraful precedent.

Se cunosc caracteristicile celor două rezistențe:

$U_1 = f_1(I)$ și $U_2 = f_2(I)$ și $U_b = U_1 = U_2$.

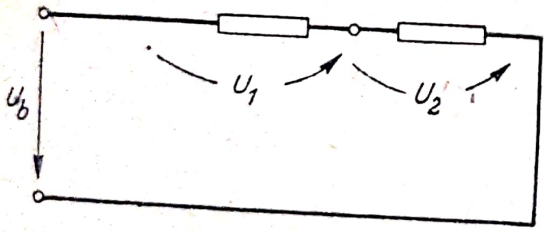


Fig. 14.15.

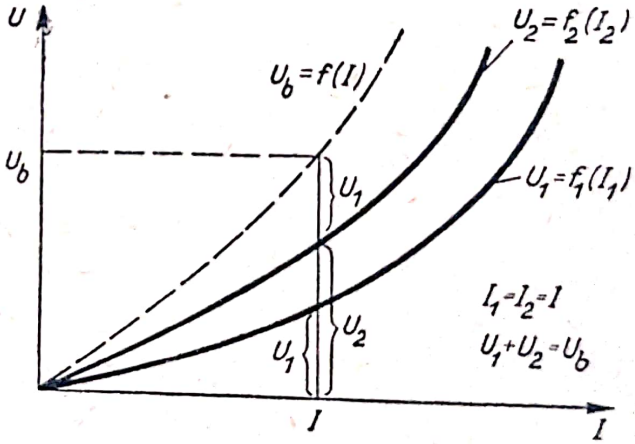


Fig. 14.16.

Pentru a cunoaște caracteristica sistemului $U_b = f(I)$ se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff:

$$I = I_1 + I_2$$

și caracteristica se construiește grafic, punct cu punct, ca în figura 14.18.

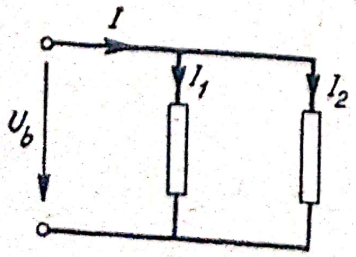


Fig. 14.17.

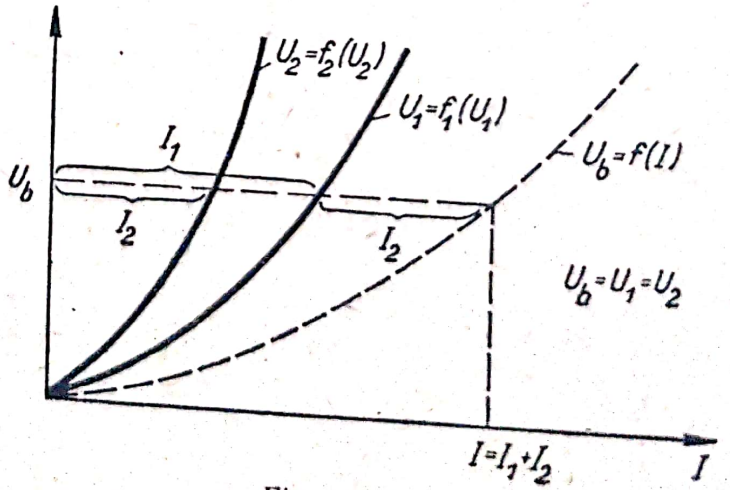


Fig. 14.18.

14.4.4. **Determinarea rezistenţei adiţionale pentru un tub cu neon.** Punctul de funcţionare pe o porţiune căzătoare (de rezistenţă dinamică negativă) a caracteristicii unui element de circuit neliniar se poate stabiliza cu ajutorul unei rezistenţe adiţionale, conectată în serie cu elementul neliniar şi cu sursa de alimentare (fără această rezistenţă, la aplicarea unei ten-

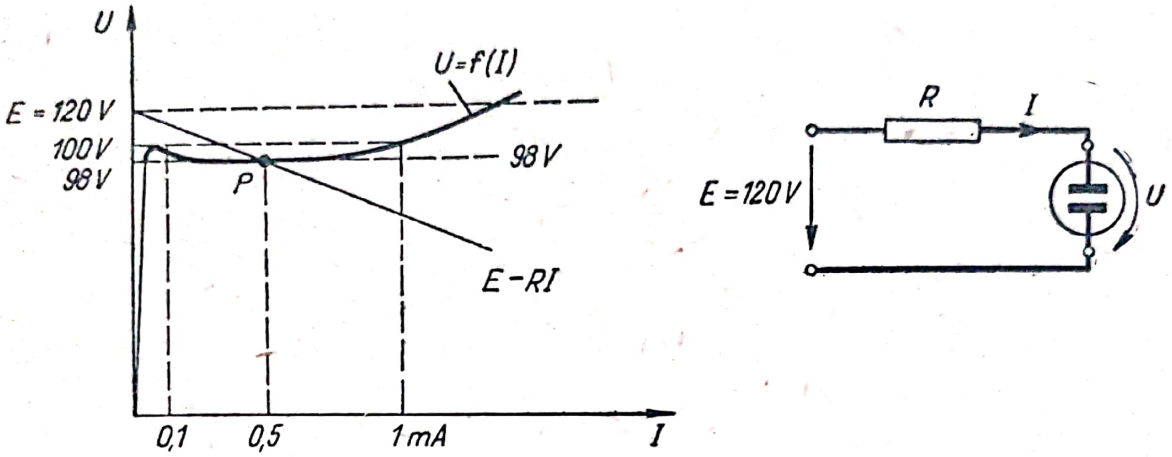


Fig. 14.19.

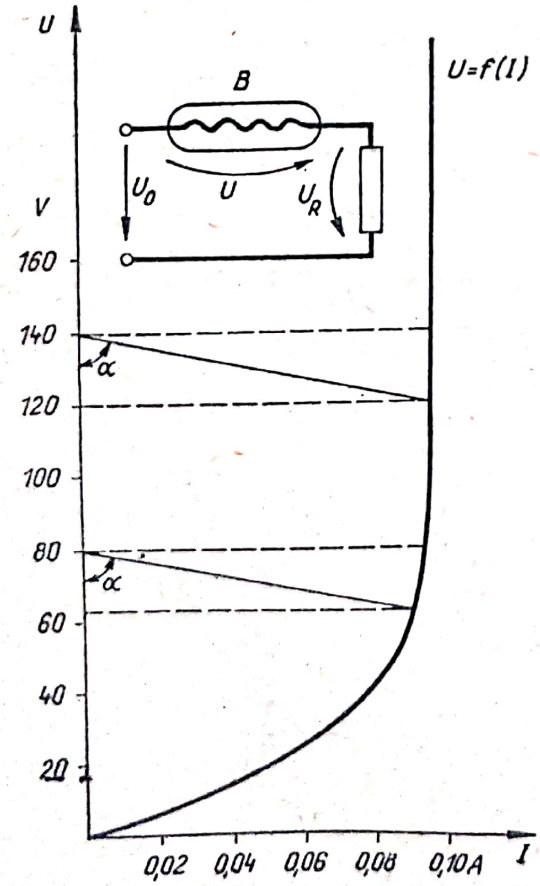


Fig. 14.20.

siuni suficient de mari, curentul are tendinţa de a creşte foarte mult, ceea ce ar duce la distrugerea elementului).

Fie un tub cu neon cu tensiunea de aprindere de 100 V şi cu caracteristica din figura 14.19, avînd plaja de utilizare de tensiune practic constantă şi egală cu 98 V şi de curent cuprins între 0,1 mA şi 1 mA. Se cere rezistenţa adiţională necesară pentru a stabili punctul de funcţionare în P, unde $I=0{,}5$ mA, cînd tubul este alimentat de la o sursă de rezistenţă interioară neglijabilă şi de tensiune $E=120$ V. Este necesar ca $U=U(I)=E-RI$ şi rezultă:

$$R=\frac{E-U(I)}{I}=\frac{120-98}{0{,}5\cdot 10^{-3}}=44\ \text{k}\Omega.$$

14.4.5. **Circuit cu baretor.** Un baretor B are caracteristica voltamper din figura 14.20 şi se leagă în serie cu o rezistenţă de 200 Ω. Se cere să se stabilească între ce limite variază curentul şi tensiunea la bornele rezistenţei R, cînd tensiunea aplicată sistemului variază între 80 şi 140 V.

Soluţie: Punctul de funcţionare se află la intersecţia caracteristicii voltamper cu dreapta:

$$I=\frac{U_0-U}{R}=\frac{U_R}{R}$$

unde:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{200}.$$

Înclinarea dreptei față de ordonată se face cu un unghi α, a cărui tangentă este dată de relația:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{200}\cdot\frac{a}{b}=\frac{1}{200}\cdot\frac{50}{0{,}05}=5$$

în care a, b sînt scările grafice:

$$a=50\ \text{cm/A};\qquad b=0{,}05\ \text{cm/V};$$

deci:

$$\alpha=79°.$$

Se obține din figura 14.20 pentru:

$U_b=140$ V, $I=0{,}1$ A $U_R=20$ V

$U_b=80$ V, $I=0{,}092$ A $U_R=18{,}4$ V.

Se observă rolul de stabilizator de curent al baretorului, întrucît la variații de 43% ale tensiunii aplicate, curentul și deci tensiunea pe sarcina R variază numai cu 8%.

15. Electroliți

Spre deosebire de conductorii de specia I (metalici), se numesc conductori de specia a II-a (electrolitici) aceia în care trecerea curentului este însoțită de reacții chimice. Prin topire la temperaturi înalte sau prin dizolvare în anumite medii (apă, alcool, amoniac etc.), unele substanțe devin conductori electrolitici sau *electroliți*. Aceleași substanțe, netopite sau nedizolvate, în stare pură, au conductibilitatea de obicei foarte mică, adică sînt izolanți. De asemenea, mediile lor de soluție (solvenții puri) au conductibilitatea foarte mică, deși soluția obținută prin dizolvarea electrolitului are o conductibilitate apreciabilă.

15.1. Disociația electrolitică

Dacă într-un vas cu apă se aruncă sare de bucătărie (NaCl), aceasta se dizolvă și majoritatea moleculelor de NaCl se desfac în ioni de sodiu și de clor:

$$NaCl \rightarrow Na^+ + Cl^-$$

Acest fenomen se numește *disociație electrolitică* și are loc la dizolvarea substanțelor, independent de prezența sau absența curentului electric. Nu toate moleculele, însă, se disociază. Din cauza disociației electrolitice, se găsesc încă de la început în soluția de electrolit particule încărcate electric (ioni pozitivi și negativi) care sînt purtătorii de sarcină în aceste medii. Electroliții au deci o conductibilitate ionică.

Se numește *grad de disociere* α raportul dintre numărul de molecule disociate și numărul total de molecule dizolvate. La electroliții numiți *tari*, cum

sînt acizii, bazele și sărurile lor, $\alpha \approx 1$, (adică majoritatea moleculelor sînt disociate), iar la electroliții numiți *slabi*, $\alpha \ll 1$.

Disociația electrolitică se datorește faptului că moleculele solventului (de exemplu, apa) slăbesc forțele electrice care leagă ionii substanței de dizolvat (de exemplu, NaCl).

Starea de echilibru a soluției pentru un anumit grad de disociație α este de natură statistică: există disocieri și recombinări simultane condiționate de agitația termică. După dizolvarea unui cristal de sare în apă există, deci, posibilitatea ca ionii eliberați din rețeaua cristalină să-și păstreze starea sau să se recombine în molecule neutre.

Purtătorii de sarcină fiind fragmente de moleculă, conductibilitatea electrolitică este legată și de un transport al substanțelor (al masei), deoarece ionii ajungînd la electrozii vasului se descarcă de sarcina care o au (primind sau cedînd electroni) și se transformă în molecule neutre.

15.2. Electroliza.

Reacția chimică produsă într-o soluție de electrolit la trecerea curentului electric se numește *electroliză*. În toți electroliții ionii pozitivi (H, metale, radicali care au rol de metal în soluții: NH_4) se deplasează în sensul curentului, iar ionii negativi (formați din atomii restului sării, acidului, bazei, se deplasează în sens contrar (fig. 15.1).

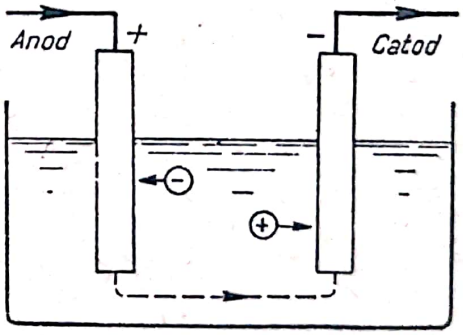


Fig. 15.1.

Cei doi electrolizi introduși în vasul cu electrolit se numesc: *anod* — electrodul de intrare a curentului în electrolit și *catod* — electrodul de ieșire a curentului din electrolit.

Din această cauză, ionii negativi (care merg spre anod) se numesc *anioni*, iar ionii pozitivi (care merg spre catod) se numesc *cationi*. Ionii ajunși la electrozi se neutralizează (se descarcă), și se obțin în vecinătatea electrozilor molecule din substanța respectivă.

De exemplu, în cazul electrolizei unei soluții apoase de azotat de argint, masa de argint care apare în unitatea de timp pe catodul voltametrului, fără a reacționa cu el, a servit la definirea unității — amper internațional — a curentului electric.

15.2.1. **Legea electrolizei.** Legea electrolizei care înglobează cele două legi stabilite de Faraday, exprimă relația dintre masa unui element sau radical chimic, care apare la unul dintre electrozii unei băi electrolitice, și intensitatea curentului de conducție care trece prin el. Conform acestei legi, *masa de substanță m care se depune în timpul t la un electrod al băii electrolitice este*

proporțională cu sarcina trecută prin baie și cu echivalentul chimic al elementului depus:

$$m=\frac{1}{F_0}\cdot\frac{A}{\nu}\int_{t_0}^{t_0+t} i\,dt=\frac{1}{F_0}\cdot\frac{A}{\nu}q \qquad (15.1)$$

în care: A este masa atomică[1] a substanței depuse prin electroliză (A/υ este echivalentul chimic); υ — valența produsului depus;

$q=\int_{t_0}^{t_0+t} i\,dt$ e sarcina electrică corespunzătoare curentului i ce trece prin baia electrolitică în timpul t;

F_0 e o constantă universală, numită constanta lui Faraday;

m și A sînt mărimi, care se exprimă în unități coerente, de exemplu în grame și grame/mol. În acest caz, A este masa unui atom-gram sau a unui molatom, numeric egală (cînd este exprimată în grame) cu masa atomică. Constanta lui Faraday are valoarea:

$$F_0=96\,490 \text{ coulombi pe echivalent-gram.} \qquad (15.2)$$

În cazul electrolizei azotatului de argint, pentru a depune un atom-gram de argint (107,88 g), știind că la trecerea unui amper se depun într-o secundă 0,001 118 g Ag, este nevoie de $\frac{107{,}88}{0{,}001\,118}=96\,490$ C. F_0 este considerat în electrochimie ca o unitate de sarcină electrică numită *faraday*. Constanta lui Faraday fiind o constantă universală nu depinde de natura electrolitului.

15.2.2. **Interpretare microscopică.** Dacă se notează cu N_0 numărul lui Avogadro, egal cu numărul de molecule (atomi) conținute de un mol (molatom) de substanță rezultată din disociație, adică raportul între masa unui mol și masa unei molecule:

$$N_0=6{,}026\cdot10^{23},$$

cu q_0 sarcina electrică elementară și cu ν valența ionului din substanța respectivă (adică numărul de sarcini elementare ale ionului), atunci sarcina totală a ionilor dintr-un molatom este:

$$\nu q_0 N_0. \qquad (15.3)$$

Sarcina totală q, corespunzătoare masei m, adică unui număr m/A de molatomi, va fi:

$$q=\nu q_0 N_0\frac{m}{A} \qquad (15.4)$$

adică:

$$m=\frac{1}{N_0 q_0}\frac{A}{\nu}q \qquad (15.5)$$

Se constată că s-a obținut chiar expresia (15,1) a legii electrolizei cu

$$F_0=N_0 q_0. \qquad (15.6)$$

Deoarece se numește *echivalent electrochimic* raportul:

$$\frac{m}{q}=\frac{A}{F_0} \qquad (15.7)$$

[1] Masa moleculară (atomică) este egală cu raportul dintre masa unei molecule (atom) și 1/16 din masa unui atom de oxigen. În chimie se utilizează în mod curent denumirea de „greutate moleculară (atomică)" în loc de masă moleculară (atomică).

dintre masa depusă și sarcina trecută prin baie, adică masa separată la trecerea unui coulomb, legea electrolizei (15.1) exprimă proporționalitatea universală dintre echivalentul electrochimic și echivalentul chimic.

Electroliza se folosește mult în tehnică: pentru producerea unor metale, de exemplu a cuprului (electrolitic); în galvanostegie (acoperirea obiectelor cu un strat subțire de metal inoxidabil), care cuprinde: nichelarea, cromarea, argintarea etc.; în galvanoplastie (reproducerea pe cale electrolitică a formei unui obiect).

Exemplu numeric. Într-o instalație galvanotehnică se trece un curent continuu $I=45$ A printr-o baie de nichel, care conține o soluție de sulfat de nichel ($NiSO_4$). Să se calculeze timpul, în ore, în care se obțin 587 g de nichel prin electroliză.

Soluție: Masa atomică a nichelului este $A=58{,}69$; valența $\nu=2$.

Din relațiile (15.1) și (15.2) se deduce:

$$t=\frac{q}{I}=\frac{m\cdot F_0\cdot\nu}{IA}=\frac{587\cdot 96\,500\cdot 2}{45\cdot 58{,}69\cdot 3\,600}\approx 12\text{ h}.$$

15.2.3. **Polarizarea electrolitică.** Dacă între electrozii identici ai unui voltametru se trece curent, separarea ionilor și depunerea lor la electrozi modifică natura feței electrodului la contactul cu electrolitul, iar cei doi electrozi ajung (din acest punct de vedere) să fie diferiți de cei inițiali (care erau identici). Astfel, de obicei, se depune un strat fin de hidrogen la catod. Noul sistem de electrozi obținut formează o „pilă voltaică", care are o tensiune electromotoare de sens contrar cu sensul curentului. Dacă se întrerupe pentru cîteva clipe tensiunea de alimentare, această pilă parazită poate furniza în timp foarte scurt un curent în sens contrar celui de alimentare.

Acest fenomen se numește *polarizare electrolitică*, iar t.e.m. corespunzătoare — tensiune de polarizație electrolitică. Pentru a obține trecerea continuă a unui curent electric prin voltametru, trebuie, deci, aplicată o tensiune mai mare decît o valoare limită numită *tensiunea de descompunere electrolitică* u_d și egală cu tensiunea de polarizație; dacă tensiunea aplicată este mai mare, se poate obține trecerea curentului prin electrolit, care conform legii lui Ohm va avea valoarea:

$$i=\frac{u-u_d}{R} \qquad (15.8)$$

în care R este rezistența soluției electrolitice.

Energia necesară pentru obținerea fenomenului de electroliză este în consecință:

$$W=u_d it=u_d q=u_d F_0\frac{\nu}{A}m, \qquad (15.9)$$

adică este proporțională cu masa de substanță depusă.

15.3. Pile și acumulatoare

15.3.1. **Pile electrice.** La introducerea unui electrod într-un electrolit, în stratul de contact apare un cîmp imprimat galvanic și o tensiune de contact între electrod și soluția electrolitică, care depinde de natura electrodului și valența lui, de concentrația electrolitului, de temperatură etc.

Această tensiune se numește *tensiune de electrod* sau *potențial de electrod*.

Potențialele de electrod nu se pot măsura direct, ci în raport cu un electrod de referință[1]. În tabela 15.1 sînt indicate tensiunile de electrod ale unor elemente cînd electrolitul este o soluție a unei sări a aceluiași element, iar electrodul de referință este electrodul normal de hidrogen.

Tabela 15.1

Element	U (V)	Element	U (V)
Zinc	−0,77	Cupru	+0,34
Fier	−0,43	Mercur	+0,76
Cadmiu	−0,42	Argint	+0,80
Nichel	−0,23	Platină	+1,2
Plumb	−0,15	Aur	+1,7
Staniu	−0,14	Hidrogen	0

Se numește *pilă electrică* (sau *element galvanic*) un generator de c.c., electrochimic constituit principial din doi electrozi de natură diferită — conductori de specia I — introduși într-un electrolit — conductor de specia a II-a.

Se poate obține o t.e.m. importantă a elementului galvanic dacă tensiunile de electrod ale celor doi electrozi sînt foarte diferite.

În adevăr, neglijînd cîmpurile electrice imprimate, de natură negalvanică (fig. 15.2), se obține t.e.m. a pilei:

$$e=\oint_{\Gamma}\overline{E}_i\overline{ds}=\int_2^0\overline{E}_i\overline{ds}+\int_0^1\overline{E}_i\overline{ds}=-\int_2^0\overline{E}\,\overline{ds}-\int_0^1\overline{E}\cdot\overline{ds}=-\int_2^0\overline{E}\,\overline{ds}+\int_1^0\overline{E}\,\overline{ds}, \quad (15.10)$$

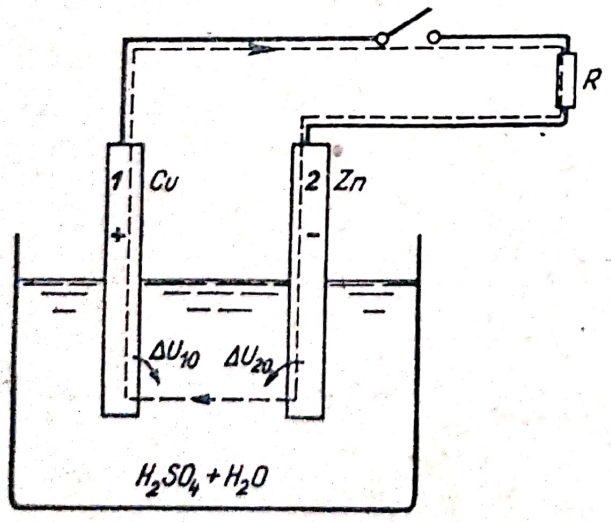


Fig. 15.2.

deoarece în relația (15.10) s-a considerat echilibru:

$$\overline{E}_i=-\overline{E}. \quad (15.11)$$

În consecință:

$$e=\Delta U_{10}-\Delta U_{20} \quad (15.12)$$

adică t.e.m. este egală cu diferența dintre tensiunile de electrod.

15.3.2. Elementul Volta. Acest element este cea mai simplă pilă electrică, formată dintr-un electrod de zinc și unul de cupru cufundați într-o soluție apoasă de acid sulfuric(fig. 15.2).

[1] Electrodul de referință este, de exemplu, electrodul normal de hidrogen, format dintr-un electrod de platină cufundat într-o soluție normală de ioni de hidrogen. Potențialul de electrod al acestui electrod este 0,00 001 V, și se consideră aproximativ nul la toate temperaturile.

Scanned with OKEN Scanner

Ca schemă echivalentă se poate considera un generator de rezistență interioară r (fig. 15.3). T.e.m. a pilei este, conform relației (15.12) și tabelei 15.1:

$$e=0{,}34-(-0{,}77)=1{,}11 \text{ V}. \qquad (15.13)$$

Închizînd circuitul pe o rezistență exterioară, t.e.m. nu se mai menține constantă, ci scade. Notînd cu e' noua t.e.m. se obține:

$$e'=e-\Delta e. \qquad (15.14)$$

Scăderea se datorește unor fenomene electrochimice de polarizație, care modifică starea inițială. În interiorul pilei se produc reacțiile chimice:

— prin dizolvare, acidul sulfuric (H_2SO_4) se disociază în ioni: $H_2SO_4 \rightleftarrows SO_4^{--}+2H^+$;

— la trecerea curentului, ionii negativi SO_4^{--} trec spre electrodul 2 de zinc, se neutralizează și reacționează chimic cu zincul formînd sulfatul de zinc ($ZnSO_4$), care rămîne în soluție;

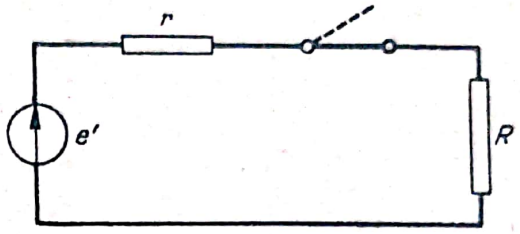


Fig. 15.3.

— ionii pozitivi de hidrogen trec spre electrodul 1 de cupru, se neutralizează și se degajează sub formă de bule gazoase în jurul acestuia.

În acest fel, la stratul de contact cu electrolitul se modifică natura electrozilor și apar fenomene de polarizație; electrodul pozitiv al elementului nu mai este de cupru, ci de hidrogen — al cărui potențial electrolitic este mai mic decît al cuprului. T.e.m. a pilei Volta ajunge la 0,85—0,9 V. Pe de altă parte, rezistența electrolitului crește, din cauza stratului de hidrogen. Din aceste motive, pila Volta este în prezent complet abandonată.

Pentru a înlătura polarizația se utilizează *depolarizanți* (substanțe oxidante plasate în vecinătatea electrodului pozitiv), care reacționează cu hidrogenul dînd apă, oprind depunerea lui în jurul acestui electrod, sau *pereți poroși*, care separă în două regiuni electrolitul între cei doi electrozi. În tehnică se utilizează următoarele tipuri de pile:

15.3.3. **Pila Daniell**. O lamă de cupru, care formează polul pozitiv, este cufundată într-o soluție concentrată de sulfat de cupru ($CuSO_4$) și înconjurată de un perete poros P. Vasul poros împreună cu electrodul este introdus într-un vas de sticlă în care se găsește un cilindru de zinc (polul negativ) și o soluție diluată de acid sulfuric (fig. 15.4). În interiorul pilei, curentul circulă de la zinc la cupru și peretele poros este traversat de ionii pozitivi de hidrogen, care circulă spre electrodul de cupru. În compartimentul central se descompune $CuSO_4$. Cu^{++} se depune pe lama de cupru, iar SO_4^{--} se combină cu ionii de hidrogen formînd acidul sulfuric. În compartimentul exterior, ionii de SO_4^{--} atacă zincul formînd sulfat de zinc ($ZnSO_4$).

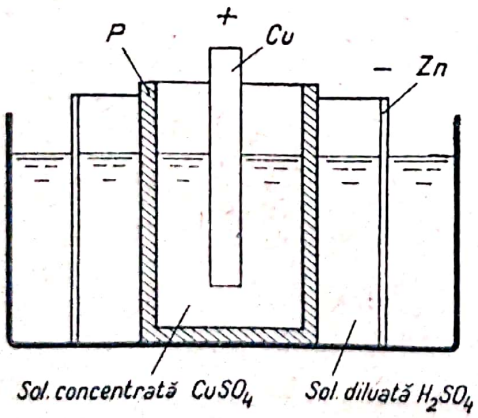


Fig. 15.4.

În concluzie, reacțiile chimice sînt:

$H_2SO_4+Zn=ZnSO_4+H_2$ în jurul electrodului de zinc;

$CuSO_4+H_2=H_2SO_4+Cu$ în jurul electrodului de cupru.

Deci, în cursul funcționării, electrodul de zinc este atacat mereu și transformat în $ZnSO_4$, a cărui soluție se concentrează, în timp ce soluția $CuSO_4$ se diluează, cuprul se depune și se reformează H_2SO_4.

T.e.m. a pilei Daniell este de 1,07—1,08 V, iar rezistența interioară este mare: 6—8 Ω (din cauza vasului poros, a concentrației mari a soluției de $CuSO_4$ etc.).

15.3.4. **Pila Leclanché**. Este formată dintr-un electrod de cărbune de retortă introdus într-un vas poros umplut cu bioxid de mangan (MnO_2). Totul este introdus într-un vas care conține un electrod de zinc și o soluție de clorură de amoniu (NH_4Cl — țipirig) (fig. 15.5).

În soluție, clorura de amoniu se disociază:

$$NH_4Cl \rightleftarrows Cl^- + NH_4^+$$

Ionul de clor este neutralizat de electrodul de zinc, pe care îl atacă formînd clorura de zinc; ionul NH_4^+ trece prin peretele poros, neutralizîndu-se la electrodul de cărbune, și produce hidrogen și amoniac. Hidrogenul reacționează cu bioxidul de mangan, dînd și peroxid de mangan (Mn_2O_3).

Reacția chimică totală este:

$$Zn+2NH_4Cl+2MnO_2=ZnCl_2+H_2O+2NH_3+Mn_2O_3$$

(amoniacul ce rezultă se combină cu clorura de zinc).

T.e.m. a pilei Leclanché este de circa 1,5 V, iar rezistența sa interioară de 0,3 Ω. Pentru a obține o rezistență interioară mică, vasul poros se înlocuiește cu un săculeț de pînză rară.

Pila Leclanché este foarte utilizată sub formă de pilă uscată. La aceste pile, electrodul de zinc formează vasul, iar electrolitul este o soluție de țipirig îngroșat cu făină de cartofi. Electrodul pozitiv este cărbunele în jurul căruia se găsește săculețul cu depolarizant.

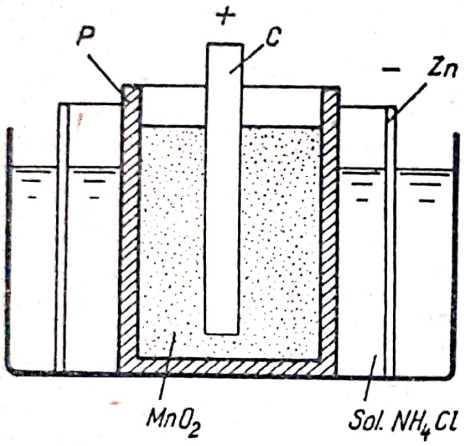


Fig. 15.5.

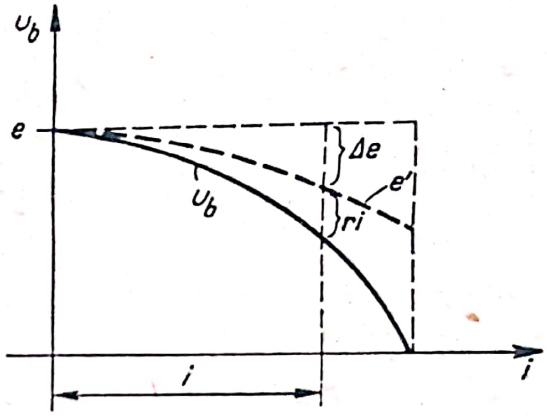


Fig. 15.6.

În afară de aceste pile, există și alte tipuri. De exemplu, pila Poggendorf-Grenet, pilele etalon Weston și Cleark, etc.

15.3.5. Elemente primare și secundare

În general, pilele se caracterizează prin:

— tensiunea electromotoare (în gol);

— rezistența interioară;

— capacitatea pilei — sarcina totală ce o poate debita în funcționarea normală. Capacitatea pilei este limitată de reacțiile chimice (de exemplu, la elementul Volta este limitată de reacția între H_2SO_4 și Zn). Capacitatea este exprimată în coulombi sau în amper-oră (1 Ah=3 600 C);

— uneori, se indică și caracteristica pilei (fig. 15.6): $u_b=e'-ri$.

Pilele electrice descrise se mai numesc și *elemente primare*. Ele sînt caracterizate prin rezistențe interne mari, curenți mici și prin caracterul practic ireversibil al reacțiilor chimice care se produc. Readucerea pilei în starea inițială se face prin reînoirea substanțelor active.

Spre deosebire de acestea, se construiesc și *elemente secundare*, care sînt *reversibile*, în sensul că în ele reacțiile chimice se succed în mod invers, cînd curentul care trece prin electrolit este inversat. Aceste elemente secundare au rezistențe interioare foarte mici și se pot utiliza pentru acumularea energiei sub formă electrochimică, numindu-se *acumulatoare electrice*.

Scanned with OKEN Scanner

15.3.6. **Acumulatoare.** În acumulatoare se realizează atît transformarea energiei chimice în energie electrică, cît și transformarea inversă (regenerarea substanțelor active de la electrozi prin schimbarea sensului curentului).

În practică se utilizează două tipuri de acumulatoare: acumulatoare (acide) cu plumb și acumulatoare alcaline.

Acumulatoare cu plumb. Electrozii sînt executați din grătare de plumb, care în stare așa-numit „neformată" sînt acoperite cu o pastă din oxizi de plumb (de exemplu miniu Pb_3O_4 și litargă PbO). Electrozii sînt cufundați într-o soluție apoasă de acid sulfuric. Prin așa-numita operație de „formare" (a cărei rețetă diferă de la un mod de fabricație la altul), care consistă în principal în alimentarea cu curent a acumulatorului, electrozii se transformă: plăcile pozitive sînt de culoare cafenie și acoperite cu PbO_2, plăcile negative sînt cenușii și acoperite cu plumb spongios.

Vasul acumulatorului trebuie să reziste la acțiunea electrolitului (H_2SO_4 diluat) și se execută din sticlă, ebonită etc.

Descărcarea acumulatoarelor cu plumb comportă următoarele reacții chimice globale:

	Electrod pozitiv		Electrod negativ
Situația înainte de descărcare	PbO_2	H_2SO_4	Pb
Sensul curentului în element		$\longleftarrow$	
Circulația ionilor		$\leftarrow H_2^{++}$ SO_4^{--}	$\rightarrow$
Reacții chimice la electrozi	$PbO_2+H_2+H_2SO_4=$ $=PbSO_4+2H_2O$		$Pb+SO_4=$ $=PbSO_4$
Situația finală a electrozilor	$PbSO_4$		$PbSO_4$

Cele două plăci fiind identice, acumulatorul nu mai poate debita curent. Plăcile se sulfatează, concentrația acidului descrește.

La încărcare, reacțiile chimice sînt inverse:

	Electrod pozitiv		Electrod negativ
Situația înainte de încărcare	$PbSO_4$	H_2SO_4	$PbSO_4$
Sensul curentului în element		$\longrightarrow$	
Circulația ionilor		$\leftarrow SO_4^{--}$ H_2^{++}	$\rightarrow$
Reacții chimice la electrozi	$PbSO_4+SO_4+2H_2O=$ $=PbO_2+2H_2SO_4$		$PbSO_4+H_2=$ $=Pb+H_2SO_4$
Starea finală a electrozilor	PbO_2		Pb

Prin încărcarea acumulatorului se restabilește situația inițială și concentrația acidului crește.

Un acumulator cu plumb încărcat are o t.e.m. de circa 2,2 V. În funcționare, tensiunea scade destul de repede la 1,95 V, apoi rămîne cîtva timp aproape constantă, scăzînd apoi din nou brusc. Cînd tensiunea a ajuns la 1,8 V, descărcarea trebuie întreruptă, deoarece, sub această valoare, reacțiile chimice nu mai sînt reversibile.

La încărcare, tensiunea acumulatorului crește întîi rapid pînă la 2,2 V, apoi lent pînă la 2,3 V. La sfîrșitul încărcării, tensiunea este 2,6—2,7 V (fig. 15.7).

Scanned with OKEN Scanner

Din punct de vedere tehnic, acumulatoarele cu plumb se caracterizează prin:

— tensiune, determinată de numărul elementelor în serie;

— capacitatea elementului (acumulatorului) (în Ah) pentru o anumită durată de descărcare (la prima vedere, capacitatea acumulatorului ar trebui să fie independentă de durata de descărcare, sarcina trecută prin el fiind proporțională cu masa substanțelor descompuse electrochimic; deoarece în cazul curenților de descărcare mai intenși reacțiile chimice au loc numai la suprafața masei active, capacitatea scade în acest caz);

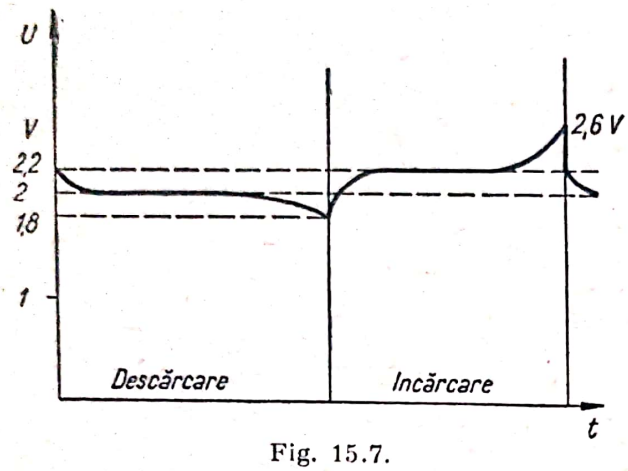


Fig. 15.7.

— curentul de lucru maxim admisibil (care nu trebuie mult depășit nici pentru un timp foarte scurt, putînd duce prin efectele lui mecanice la distrugerea plăcilor);

— randamentul (energetic) $\eta = W_{desc}/W_{inc}$, care este de ordinul 70—80%, din cauza pierderilor de energie prin reacții chimice secundare (care determină și diferența dintre tensiunea medie de încărcare și tensiunea medie de descărcare) și prin efect electrocaloric în rezistența lui interioară;

— randamentul în cantitate de electricitate $\eta_q = Q_{desc}/Q_{inc}$ de ordinul a 85—90%;

— tipul constructiv (adecvat condițiilor de utilizare și durabilității necesare: acumulatoare de dimensiuni mici și durabilitate redusă pentru autovehicule, acumulatoare de dimensiuni mari și durabilitate mare pentru instalații staționare etc.).

Un acumulator neutilizat mai multă vreme se descarcă lent și se poate deteriora. De aceea, acumulatoarele se păstrează înlocuind electrolitul cu apă distilată.

Acumulatoare alcaline. Electrodul pozitiv este format de exemplu, din hidroxid de nichel, $Ni(OH)_3$, iar cel negativ din fier. De fapt, ambii electrozi sînt executați sub formă de grătare de fier nichelat, în care sînt presate masele active. Ca electrolit se utilizează, de exemplu hidroxidul de potasiu (KOH). Vasul acumulatorului este din tablă de fier nichelat, cu capacul sudat.

Electrolitul KOH este disociat în $K^+ + (OH)^-$.

La *descărcarea* acumulatorului alcalin, la electrodul negativ are loc reacția: $Fe + 2OH = Fe(OH)_2$, prin care fierul se transformă în hidroxid de fier. La electrodul pozitiv, hidroxidul de nichel (nichelic) se transformă în alt hidroxid de nichel (nichelos):

$$2Ni(OH)_3 + 2K = 2Ni(OH)_2 + 2KOH.$$

Se observă că nu se schimbă concentrația electrolitului.

La *încărcare*, la electrodul negativ are loc reacția inversă:

$$Fe(OH)_2 + 2K = Fe + 2KOH,$$

iar la electrodul pozitiv:

$$2Ni(OH)_2 + 2OH = 2Ni(OH)_3$$

se reformează hidroxidul de nichel inițial.

Se observă că este necesară o cantitate relativ mică de electrolit, de concentrație constantă, iar acumulatorul poate fi executat în construcție compactă. T.e.m. a acestui acumulator este de circa 1,45 V.

Acumulatorul alcalin are un randament scăzut, de 52—55%. Totuși, acumulatorul alcalin prezintă anumite avantaje față de cel cu plumb: este ușor transportabil (este mai ușor și masa activă se poate fixa foarte bine în grătare); are rezistența interioară mare, ceea ce micșorează randamentul, dar îl face să fie mai puțin solicitat în cazul unui scurtcircuit; nu emană vapori vătămători. Se construiesc acumulatoare alcaline și cu alte metale decît Fe—Ni.

Acumulatoarele se folosesc: în centrale electrice, ca surse de c.c. pentru serviciile auxiliare, circuitele de protecție prin relee etc.; în telefonie; în transporturi auto, aviație etc.; la iluminatul trenurilor în stații; la antrenarea motoarelor mici de c.c. (de exemplu la autocare) etc.

15.3.7. **Aplicație.** O baterie de acumulatoare este destinată a alimenta instalația de lumină a unui atelier format din 40 lămpi de 60 W, 120 V. Randamentul bateriei este de 75%. Să se găsească durata de descărcare a bateriei și să se calculeze randamentul de capacitate al său, dacă:

— la încărcare bateria este străbătută de un curent de 23,7 A la 150 V, timp de 9 h;

— la descărcare bateria debitează curentul cerut la tensiunea de 120 V.

Soluție. Durata de descărcare se obține din expresia randamentului:

$$\eta = \frac{I_d U_d t_d}{I_i U_i t_i}. \tag{15.5}$$

Deci:

$$t_d = \frac{I_i U_i t_i}{I_d U_d}\eta = \frac{23{,}7 \cdot 150 \cdot 9}{20 \cdot 120} 0{,}75 = 10 \text{ h}$$

în care:

$$I_d = \frac{P}{U_d} = \frac{40 \cdot 60}{120} = 20 \text{ A}.$$

Deoarece $U_d < U_i$, randamentul în cantitate de electricitate este superior celui de energie, conform relației:

$$\eta_q = \frac{I_d t_d}{I_i t_i} = \frac{20 \cdot 10}{23{,}7 \cdot 9} = 0{,}935 = 93{,}5\%.$$

Scanned with OKEN Scanner

Electrodinamica şi magnetostatica

În electrostatică şi electrocinetică s-a prezentat unul din aspectele cîmpului electromagnetic: *cîmpul electric*. În prezentul capitol se vor considera şi proprietăţile magnetice ale cîmpului electromagnetic, tratîndu-se cel de-al doilea aspect al lui: *cîmpul magnetic*. Totodată se vor studia stările electromagnetice variabile în timp, în care cîmpul electric şi cîmpul magnetic se condiţionează reciproc şi direct.

16. Cîmpul magnetic şi explorarea lui. Inducţia magnetică în vid

16.1 Cîmpul megnetic şi explorarea lui în vid

16.1.1. **Cîmpul magnetic.** În regim staţionar, existenţa cîmpului magnetic se constată experimental în vecinătatea magneţilor şi a circuitelor parcurse de curenţi electrici. Dacă în vecinătatea unui conductor parcurs de curent electric se aduce un ac magnetic, acesta tinde să se orienteze într-un anumit fel. Dacă se găsesc în apropiere conductoare parcurse de curenţi electrici, între ele se exercită acţiuni mecanice (forţe şi momente). Toate aceste fenomene speciale sînt manifestări ale cîmpului magnetic. În jurul circuitelor parcurse de curenţi electrici sau în jurul corpurilor magnetizate există un cîmp magnetic, care exercită forţe asupra altor circuite parcurse de curenţi electrici sau asupra altor corpuri magnetizate. Forţele magnetice pot fi împărţite în trei categorii, după cauzele fizice ale cîmpului magnetic care le exercită: *forţe electrodinamice*, care se exercită între circuite parcurse de curenţi electrici; *forţe electromagnetice*, care se exercită între un circuit parcurs de curent electric şi un corp magnetizat; *forţe magnetostatice*, care se exercită între magneţi permanenţi.

Particularizînd cele precizate în par. 1.5.3. referitor la semnificaţiile termenului de cîmp, precizăm că prin *cîmp magnetic* se poate înţelege:

a) sistemul fizic, diferit de corpuri, care există în jurul şi în interiorul conductoarelor parcurse de curent şi a corpurilor magnetizate (cîmpul electromagnetic considerat sub aspectul său magnetic) — semnificaţia fundamentală;

b) mulțimea de valori a mărimii vectoriale de stare, a acestui sistem fizic, numită intensitatea cîmpului magnetic (v. par. 19);

c) regiunea din spațiu în care se exercită forțe magnetice asupra unor corpuri magnetizate sau parcurse de curent electric (în care mărimile de stare ale cîmpului magnetic sînt diferite de zero);

d) prescurtat, mărimea numită intensitatea cîmpului magnetic.

În cazul cel mai general, cîmpul magnetic poate fi produs de corpuri (conductoare) parcurse de curent electric; de corpuri magnetizate; de cîmpul electric variabil în timp.

16.1.2. **Bucla de curent.** Pentru explorarea cîmpului magnetic este necesar un corp de probă. Cel mai potrivit corp de probă magnetic se realizează cu o mică spiră executată dintr-un conductor foarte subțire, închis, parcurs de un curent electric i. Acest corp de probă se numește *buclă de curent* (în tehnică: bobină de explorare). În figura 16.1. sînt indicate atît modelul teoretic al unei bucle de curent, cît și realizarea lui practică, cu firele de aducere a curentului răsucite pentru a nu contribui la acțiunile ponderomotoare exercitate asupra buclei.

Bucla de curent se caracterizează prin vectorul $\bar{m}_b$ — momentul buclei — perpendicular pe planul ce conține bucla și care se definește prin relația:

$$\bar{m}_b = \bar{n}\ i\ A \tag{16.1}$$

în care: A este aria suprafeței închise de buclă, iar $\bar{n}$ este versorul normal la suprafață, al cărui sens este asociat cu sensul curentului prin regula burghiului drept (sensul de înaintare a burghiului drept răsucit în sensul curentului i).

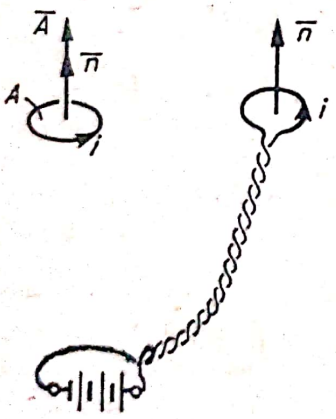


Fig. 16.1.

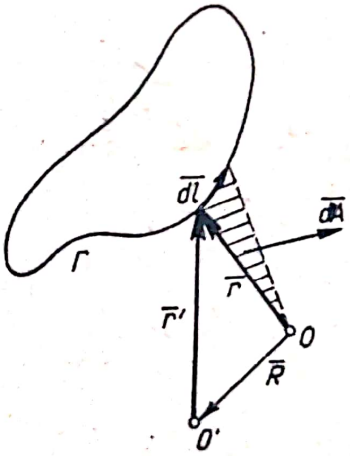


Fig. 16.2.

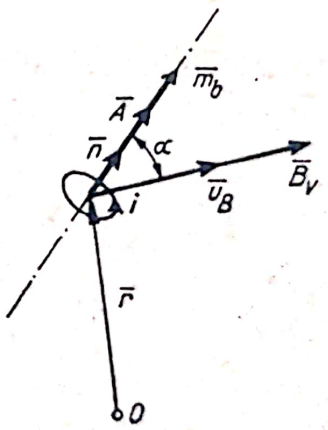


Fig. 16.3.

Expresia momentului se poate scrie și sub forma:

$$\boxed{\bar{m}_b = i\ \bar{A}} \tag{16.1'}$$

în care $\bar{A} = \bar{n}A$ este vectorul-arie al conturului ocupat de conductorul buclei. Dacă bucla este formată din N spire suprapuse, aria este:

$$A = N\ A_s \tag{16.2}$$

în care A_s este aria unei spire. Din relaţia (16.1) se observă că, dacă aria $A \to 0$, pentru ca expresia momentului să fie finită trebuie ca intensitatea curentului i să tindă către infinit ($i \to \infty$).

Experimental se constată că efectele mecanice exercitate asupra unei bucle suficient de mici nu depind de forma conturului.

Dacă curba Γ, care formează conturul, este plană, vectorul arie are ca modul chiar aria curbei plane. În cazul în care curba nu este plană (fig. 16.2), vectorul arie este definit de relaţia:

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{r} \times d\bar{l} \tag{16.3}$$

în care $\bar{r}$ este raza vectoare din origine aleasă O pînă în punctul de pe contur unde se consideră elementul de arc $d\bar{l}$. Relaţia (16.3) se deduce prin integrarea de-a lungul conturului Γ a vectorilor arie $d\bar{A}$, ai ariilor elementare care formează aria suprafeţei conice cu vîrful în O

$$d\bar{A} = \frac{1}{2} \bar{r} \times d\bar{l}. \tag{16.4}$$

Vectorul arie $\bar{A}$ nu depinde de originea aleasă. Pentru demonstrarea acestei proprietăţi se consideră o altă origine O', faţă de care vectorul arie se presupune că ar avea o valoare diferită $\bar{A}'$, şi rezultă:

$$\bar{A}' = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{r}' \times d\bar{l} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} (\bar{r} - \bar{R}) \times d\bar{l} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \bar{r} \times d\bar{l} = \bar{A} \tag{16.5}$$

în care $\bar{r}' = \bar{r} - \bar{R}$, $\bar{R}$ fiind distanţa constantă între cele două origini O şi O' (fig. 16.2), iar

$$\oint_{\Gamma} d\bar{l} = 0.$$

16.2. Inducţia magnetică în vid

Se constată experimental că dacă se aduce bucla de curent în apropierea unor circuite parcurse de curenţi electrici şi situate în vid (practic, situate în aer), asupra ei se vor exercita acţiuni mecanice (fig. 16.3).

Momentul static al forţelor ce se exercită asupra buclei de curent, în raport cu centrul ei de masă, se notează cu $\bar{C}$ (cuplu). Se constată experimental următoarele:

— în fiecare punct din cîmp există o direcţie privilegiată, caracterizată în figura 16.3 prin versorul $\bar{u}_B(\bar{r})$, astfel că dacă momentul magnetic $\bar{m}_b$ este orientat în această direcţie, cuplul $\bar{C}$ e nul;

— într-o poziţie oarecare a buclei, pentru care $\bar{m}_b$ face unghiul α cu $\bar{u}_B$ (fig. 16.3), cuplul tinde să aducă normala $\bar{n}$ la spiră după orientarea $\bar{u}_B$ şi e proporţional cu $\sin \alpha$, avînd drept factor de proporţionalitate valoarea maximă a cuplului. Se poate deci scrie:

$$\bar{C} = C_{max}\, \bar{n} \times \bar{u}_B; \tag{16.6}$$

— cuplul maxim C_{max} e proporţional cu curentul i, cu aria buclei A, iar în rest depinde numai de punctul în care se aşază bucla în cîmp printr-un factor notat $B_v(\bar{r})$:

$$C_{max} = iA B_v\ (\bar{r}). \tag{16.7}$$

Dacă se reunesc cele trei constatări experimentale precedente, se obține expresia momentului:

$$\bar{C}=iA\bar{n}\times\bar{u}_B(\bar{r})Bv(\bar{r}), \tag{16.8}$$

în care s-a indicat explicit că direcția arătată de $\bar{u}_B$ depinde numai de punctul în care se așază bucla și nu de curentul sau aria buclei. Relația (16.8) se poate scrie, ținînd seama de relația (16.1):

$$\boxed{\bar{C}=\bar{m}_b\times\bar{B}_v(\bar{r})} \tag{16.9}$$

în care $\bar{B}_v(r)=\bar{u}_B(\bar{r})B_v(\bar{r})$ este o mărime ce caracterizează cîmpul magnetic în fiecare punct.

Așadar cuplul $\bar{C}$, care se exercită în vid într-un cîmp magnetic asupra unei bucle de curent, este egal cu produsul vectorial dintre *momentul magnetic* al buclei, $\bar{m}_v$, și o mărime vectorială de stare a cîmpului, $\bar{B}_b$, numită *inducție magnetică în vid*. Inducția magnetică în vid caracterizează starea locală a cîmpului magnetic în vid. Cuplul tinde să rotească bucla în așa fel, încît momentul magnetic al buclei să fie paralel cu direcția locală a inducției magnetice în vid.

Unități de măsură. Momentul magnetic se măsoară, în sistemul MKSA raționalizat în *amper-metru*^{2} (Am^2) conform relației (16.1). Inducția magnetică are, în sistemul MKSA, unitatea *weber/metru*^{2} (Wb/m^2) sau *tesla* (Te), iar în sistemul CGS em unitatea gauss (*Gs* sau *G*).

Inducția magnetică este egală cu 1 T, dacă asupra unei bucle de curent cu un moment magnetic de 1 Am^2 se exercită un cuplu maxim egal cu 1 N.m. Unitățile de măsură ale inducției magnetice în celelelate sisteme de unități se definesc în mod analog.

Ținînd seama de relațiile care leagă unitățile de măsură ale mărimilor mecanice și unitățile de măsură ale curentului în diferitele sisteme de unități, rezultă:

$$1\frac{Wb}{m^2}=1\text{ T}=10^4\text{ Gs (uCGS em)}=\frac{1}{3.10^6}\text{ uCGS es.}$$

16.3. Forța exercitată asupra unui element de conductor

16.3.1. **Forța lui Laplace.** Măsurînd forța $\Delta\bar{F}$ ce se exercită asupra unui element de conductor $\Delta\bar{l}$, care face parte dintr-un circuit parcurs de curentul i și plasat într-un cîmp magnetic exterior de inducție $\bar{B}_v$, se constată valabilitatea expresiei:

$$\boxed{\Delta\bar{F}=i\,\Delta\bar{l}\times\bar{B}_v.} \tag{16.10}$$

Această expresie se poate demonstra cu ajutorul expresiei (16.8). Se va verifica acest lucu numai în cazul particular al unui cadru dreptunghiular de

dimensiuni Δl și d (fig. 16.4), parcurs de curentul i și așezat într-un cîmp magnetic de inducție $\overline{B}_v$, uniform.

Conform relației (16.10), forțele ce se exercită asupra laturilor sînt perpendiculare pe planul format de $\overline{\Delta l}$ și $\overline{B}_v$. Cadrul se poate roti în jurul axei punctate. În consecință, vor da momente numai forțele care se exercită pe laturile de lungime Δl, deoarece forțele exercitate asupra laturilor de lungime d sînt paralele cu axa de rotație.

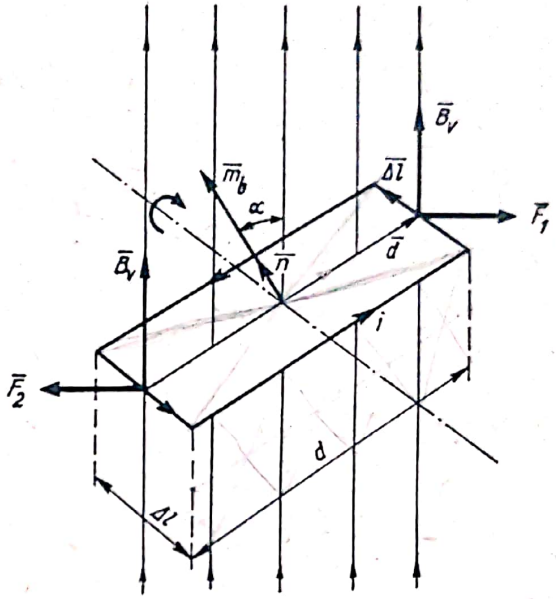


Fig. 16.4.

Momentul cuplului este:

$$\overline{C}=\overline{d}\times\overline{F}_1. \qquad (16.11)$$

Înlocuind valoarea forței în relația (16.11) cu expresia din relația (16.10) se obține:

$$\overline{C}=\overline{d}\times(\overline{i\,\Delta l}\times B_v) \qquad (16.12)$$

sau, ținînd seama că $\sin(\overline{\Delta l}, \overline{B}_v)=1$, iar $\sin(\overline{d}, \overline{F}_1)=\sin\alpha$,

$$C=|\overline{C}|=i\ \Delta l\cdot d\cdot B_v\sin\alpha= =iAB_v\sin\alpha \qquad (16.13)$$

care reprezintă modulul vectorului din relația (16.8). Orientările cuplurilor date de relațiile (16.8) și (16.12) coincid de asemenea.

În general, pentru un element $\overline{dl}$ de conductor, relația (16.10) devine:

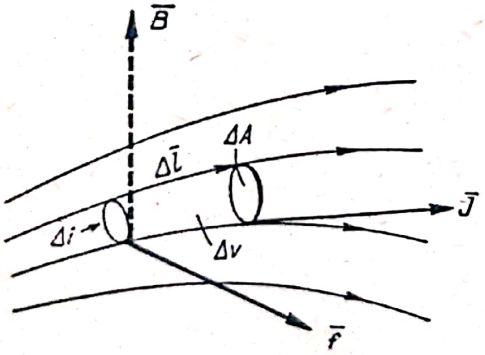


Fig. 16.5.

$$\overline{dF}=i\overline{dl}\times\overline{B}_v=i\overline{dl}B_v\sin(\widehat{\overline{dl}, \overline{B}_v})\overline{u}_F. \qquad (16.14)$$

16.3.2. **Densitatea de forță.** În cazul conductorilor masivi, se introduce mărimea numită *densitate de volum a forței*. Se consideră un tub de curent, de intensitate Δi, plasat sub acțiunea unui cîmp magnetic de inducție $\overline{B}$ (fig. 16.5).

Aplicînd relația (16.10) se obține:

$$F=i\overline{\Delta l}\times\overline{B}. \qquad (16.14')$$

Volumul tubului este:

$$\Delta V=\Delta l\,\Delta A, \qquad (16.15)$$

și ținînd seama de relația (11.13) de definiție a densității de curent $\overline{J}$, se obține:

$$i\overline{\Delta l}=(\overline{J}\cdot\overline{\Delta A})\overline{\Delta l}=\overline{J}\Delta V \qquad (16.16)$$

$$\overline{\Delta F}=\Delta V\cdot\overline{J}\times\overline{B} \qquad (16.17)$$

(se observă că în cazul tubului de linii de curent, $\overline{\Delta l}$, $\overline{\Delta A}$ și $\overline{J}$ sînt îndreptate în aceeași direcție).

Densitatea de volum a forței este:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta V} = \overline{f} = \overline{J} \times \overline{B}. \qquad (16.18)$$

Asupra unui conductor masiv, străbătut de curentul de conducție i, se exercită o forță a cărei densitate de volum este egală cu produsul vectorial dintre densitatea de curent și inducția magnetică în punctul considerat.

16.3.3. **Aplicații.** În cazul cînd conductorul face o buclă, asupra lui se exercită forțe transversale, care tind să lărgească bucla sub influența cîmpului magnetic propriu [1]. Acest efect de deformare al unui circuit închis este folosit în cazul stingerii arcului la eclatoarele de protecție cu coarne (fig. 16.6). Forța care se exercită asupra arcului îl ridică în sus, unde distanța între coarne este mai mare, și el este întrerupt mai repede.

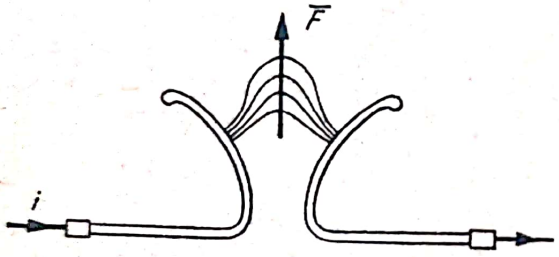


Fig. 16.6.

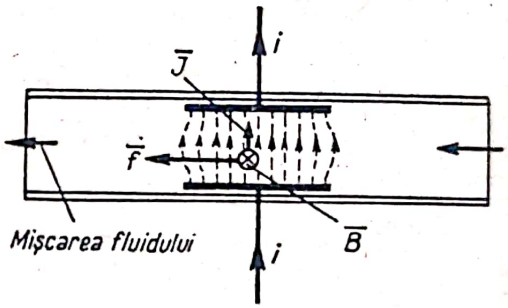


Fig. 16.7.

În cazul cuptoarelor electrice de inducție se observă un efect de *reostricțiune* (pinch-efect) asupra fluidului metalic, datorit forțelor electrodinamice. Conductorul este lichid, fiind format de masa de metal topit, și este parcurs de curenți de mare intensitate. Se observă, în acest caz, o gîtuire a vinei de fluid metalic care se poate chiar rupe. Gîtuirea se datorește forțelor pe care cîmpul magnetic propriu al vinei fluide le exercită asupra părților ei cu densitatea $\overline{f}$, care este dirijată către axa vinei fluide.

Forța magnetică cu densitatea de volum (16.18) este utilizată în pompele electromagnetice, al căror principiu este ilustrat în figura 16.7. Prin trecerea unui curent i transversal prin lichidul conductor de pompat situat într-un cîmp magnetic de inducție $\overline{B}$, perpendicular atît pe direcția fluidului cît și pe direcția liniilor de curent, se exercită asupra lichidului o densitate de volum a forței, dirijată în lungul conductei, și care poate pune lichidul în mișcare.

16.4. Forța electrodinamică dintre două conductoare paralele. Permeabilitatea vidului.

16.4.1. **Forța lui Ampère.** Se consideră două conductoare paralele, filiforme și foarte lungi, parcurse de curenții i_1 și respectiv i_2. Experimental

[1] Asupra inducției magnetice a cîmpului propriu al curenților electrici, care trec prin conductori, a se consulta par. 17.

se constată că cele două conductoare se atrag în cazul cînd curenţii i_1 şi i_2 sînt în acelaşi sens, şi se resping cînd curenţii circulă în sens contrar.

Prin experienţele sale André-Marie Ampère a constatat (în 1820—1821) că valoarea forţei este dată de relaţia:

$$\bar{F}_{12} = -\bar{u}_{12}\lambda_0 \frac{2i_1 i_2}{R_{12}} l, \tag{16.19}$$

în care:

$\bar{F}_{12}$ e forţa datorită cîmpului magnetic al curentului i_1 exercitată asupra conductorului 2; l e lungimea de conductor pentru care se calculează forţa;

R_{12} e distanţa între conductori; $\bar{u}_{12}$ e versorul dirijat de la conductorul *1* spre 2 (fig. 16.8);

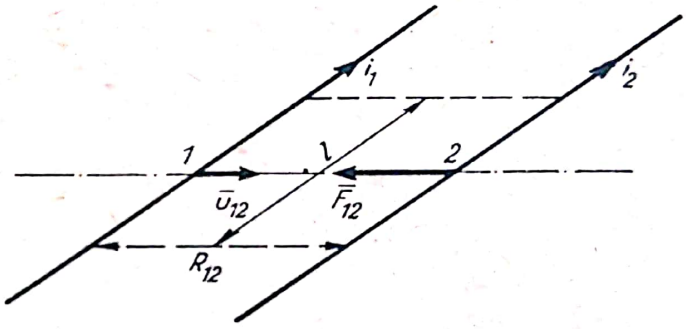


Fig. 16.8.

Λ_0 e constantă universală de proporţionalitate, care depinde de sistemul de unităţi de măsură.

Mărimea Λ_0 este o mărime fizică, pentru că valoarea ei numerică variază o dată cu schimbarea unităţilor de măsură ale anumitor mărimi fizice. Este o constantă universală, deoarece la unităţi date ale celorlalte mărimi fizice, ea are o singură valoare, care depinde de alegerea acestor unităţi. Λ_0 este o constantă universală referitoare la vid, deoarece se obţine prin operaţii executate în vid. Valoarea numerică a constantei Λ_0 depinde de unitatea de curent aleasă.

— În sistemul MKSA se defineşte în modul următor unitatea de curent numită *amper absolut*: *intensitatea curentului constant care menţinut în doi conductori filiformi paraleli, rectilinii, de lungime practic infinită, aşezaţi la o distanţă de un metru unul de al tul, în vid, determină între aceste conductoare o forţă de* $2 \cdot 10^{-7}$ *newtoni pe metrul de lungime.*

În consecinţă, în sistemul MKSA:

$$\Lambda_0 = 10^{-7} \frac{N}{A^2} \qquad \Lambda_0 = 10^{-7} \frac{N}{s^2} \cdot A^2 \qquad \frac{N}{A^2} \tag{16.20}$$

— În sistemul CGS*em* unitatea de curent biot (Bi) este astfel definită încît rezultă:

$$\Lambda_0 = 1 \frac{\text{dyn}}{\text{Bi}^2}. \tag{16.21}$$

Din relaţiile (16.20) şi (16.21) se deduce (cu $1\text{N} = 10^5$ dyn):

$$1 \text{ Bi} = 10 \text{ A}. \tag{16.22}$$

— În sistemul CGSes, unitatea de curent numită franklin pe secundă (Fr/s) e derivată din unitatea de sarcină electrică numită franklin (Fr), v. par. 2.5. Se constată atunci, experimental, că:

$$\Lambda_0=\frac{1}{c_0^2}\approx\frac{1}{9\cdot10^{20}} \tag{16.21'}$$

în care c_0 este valoarea numerică, în cm/s, a vitezei luminii în vid. Rezultă că raportul dintre unitatea CGSem de curent și unitatea CGSes de curent este egal cu c_0, adică:

$$1\text{Fr/s}=\frac{1}{3.10^{10}}\text{Bi}=\frac{1}{3.10^{9}}\text{A}. \tag{16.22'}$$

16.4.2. **Permeabilitatea vidului.** În primele expuneri ale teoriei electricității s-au utilizat sisteme de unități *neraționalizate*. În aceste sisteme, Λ_0 este notat cu simbolul μ_0. Mai tîrziu s-a observat că, pentru a obține forme mai simple pentru legile generale și teoremele mai importante, este convenabil să se noteze cu μ_0 constanta universală:

$$\mu_0=\frac{4\pi\Lambda_0}{\varkappa} \tag{16.23}$$

în care: $\varkappa=4\pi$ în sistemele neraționalizate și $\varkappa=1$ în sistemele raționalizate.

Mărimea μ_0 astfel definită se numește *permeabilitatea vidului* și este o constantă universală cu următoarele valori numerice:

în MKSA neraționalitat	$\mu_0=10^{-7}$
în CGSem neraționalizat	$\mu_0=1$
în CGSes neraționalizat	$\mu_0=\frac{1}{9.10^{20}}$

În sistemul MKSA raționalizat, care se utilizează în expunerea acestor lecții, permeabilitatea vidului este:

$$\boxed{\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\frac{\text{H}}{\text{m}}} \tag{16.24}$$

H (henry) este unitatea de măsură în sistemul MKSA pentru inductivități, par. 26). Bineînțeles că se pot deduce unitățile de măsură ale permeabilității în oricare alt sistem de unități de măsură, considerînd relațiile în care intră μ_0 (v. și par. 30).

Scriind relația (16.19) în sistem raționalizat, se obține:

$$\overline{F}_{12}=-\overline{u}_{12}\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2i_1i_2}{R_{12}}l. \tag{16.25}$$

Cu ajutorul permeabilității vidului μ_0 și al inducției magnetice în vid $\overline{B}_v$ se definește *intensitatea cîmpului magnetic în vid*:

$$\overline{H}_v=\overline{B}_v/\mu_0. \tag{16.26}$$

Observație: Se constată o analogie de formă între expresia forței electrodinamice între două conductoare parcurse de curenții electrici i_1 și i_2 și aceea a forței electrostatice între două fire încărcare cu sarcină electrică de densitate de linie ρl_1, și ρl_2.

În adevăr, din relațiile (2.5) și (3.39) se deduce forța exercitată de firul *1* asupra firului 2.:

$$\overline{F}_{12}=\overline{u}_{12}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\rho_{l_1}\rho_{l_2}}{R_{12}}l. \tag{16.27}$$

17. Cîmpul magnetic al circuitelor de curent continuu în vid

17.1. Formula lui Biot-Savart-Laplace

În electrostatică, expresia cîmpului electric $\overline{E}_v$ produs de repartiții cunoscute de sarcină în vid a fost stabilită pe baze experimentale directe cu ajutorul relației (2.5):

$$\overline{F}=q\overline{E}_v \tag{2.5}$$

și a formulei lui Coulomb (2.18):

$$\overline{F}_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{R_{12}^2}u_{12}. \tag{3.1}$$

Pentru o sarcină punctuală a rezultat expresia coulombiană:

$$\overline{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\overline{R}}{R^3} \tag{3.3}$$

iar pentru o repartiție de sarcină (de exemplu, de volum) expresia:

$$\overline{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_v\overline{R}}{R^3}dv. \tag{3.8}$$

În cîmpul magnetic staționar se poate urma o cale analogă pentru a stabili pe baze experimentale expresia cîmpului magnetic produs de un circuit de curent continuu, expresie analogă cu (3.8) și cunoscută sub numele de formula Biot-Savart-Laplace (17.1). Analogă relației (2.5) este acum relația lui Laplace:

$$\Delta\overline{F}=i\,\Delta\overline{l}\times\overline{B}_v=i\,\Delta\overline{l}\times\mu_0\overline{H}_v \tag{16.14}$$

iar analogă relației (3.1) se poate considera relația (16.25), care exprimă forța dintre doi conductori paraleli. Deoarece analogia aceasta are un caracter particular — în cîmpul magnetic neexistînd un corp de probă atît de simplu cum este micul corp încărcat cu sarcină electrică — raționamentele sînt mai complicate și vor fi prezentate simplificat, iar premisa experimentală pe care

o constituie relația (16.25) este insuficientă. Ea poate fi înlocuită și completată de experiențele făcute de Jean-Baptiste Biot și Félix Savart. Ca rezultat al acestor experiențe s-a stabilit pentru intensitatea cîmpului magnetic $\overline{H}_v = \overline{B}_v/\mu_0$ produs în vid de un circuit filiform închis, parcurs de curentul continuu i, expresia:

$$\boxed{\frac{\overline{B}_v}{\mu_0} = \overline{H}_v = \frac{i}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{\overline{ds}' \times \overline{R}}{R3}} \qquad \frac{i}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{\overline{ds}' \times \overline{R}}{R^3} \qquad (17.1)$$

numită *formula lui Biot-Savart-Laplace*, în care:

$\overline{ds}'$ este elementul de arc al conturului Γ al circuitului (v. fig. 17.3) cu sensul dat de sensul pozitiv al curentului i;

$\overline{R}$ este raza vectoare dirijată de la $\overline{ds}'$ la punctul P, unde se calculează cîmpul;

$R = |\overline{R}|$ este distanța dintre $\overline{ds}$ și P.

La operarea cu această formulă trebuie să se sublinieze că integrarea trebuie efectuată numai asupra unor curbe închise, rezultatul efectuării ei asupra unei curbe deschise fiind lipsit de semnificație fizică, deoarece curenții continui sînt totdeauna închiși. Experiența verifică această expresie în cîmpuri magnetice staționare (și chiar cvasistaționare), în vid sau (așa cum se va arăta ulterior) în medii omogene. De aceea, din punctul de vedere al formulării bazelor experimentale ale teoriei cîmpurilor magnetice staționare, această formulă are același rol ca și acel pe care expresia coulombiană a cîmpului electric (3·8) îl are din punctul de vedere al formulării bazelor experimentale ale teoriei cîmpurilor electrostatistice. Demonstrația riguroasă a formulei Biot-Savart-Laplace se face pe baza legilor generale ale cîmpului magnetic, acceptate ca postulate ale teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic, și va fi dată în par. 25.3. În cele ce urmează se amintește și deducerea pe baze experimentale a acestei formule, deducere care prezintă un interes mai mult istoric.

17.2. Experiențele lui Biot și Savart (1820—1821).

Din relațiile (16.25) și (16.10) se poate deduce expresia inducției magnetice $\overline{B}_v = \mu_0 \overline{H}_v$ stabilită în vid de un conductor rectiliniu infinit situat în vid și străbătut de curentul i. Se presupune că la distanța d de conductor se așază un al doilea conductor, parcurs de curentul i', și se măsoară forța $\overline{F}$ exercitată, asupra unei porțiuni de lungime $l = |\overline{l}|$ a lui, în cîmpul magnetic al primului. Se obține:

$$\overline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2ii'}{d} l\overline{u} = i'\overline{l} \times \mu_0 \overline{H}_v = \mu_0 i' l \left(\frac{\overline{l}}{l} \times \overline{H}_v\right).$$

Rezultă că $\overline{H}_v$ produs de primul conductor la distanța d (fig. 17.1) este perpendicular pe vectorii $\overline{l}$ și $\overline{u}$ avînd mărimea:

$$H_v = \frac{i}{2\pi d}. \tag{17.2}$$

Liniile cîmpului H_v rezultă a fi cercuri concentrice situate în plane transversale față de curentul i care îl determină. Expresia (17.2) a fost stabilită independent de formula lui Ampère (17.1) de către Biot și Savart care au explorat cîmpul magnetic al firului rectiliniu cu ajutorul unui mic ac magnetic. Expresia (17.2) nu este însă suficientă pentru a putea deduce cîmpul magnetic produs de un circuit de formă oarecare. Biot și Savart și-au extins

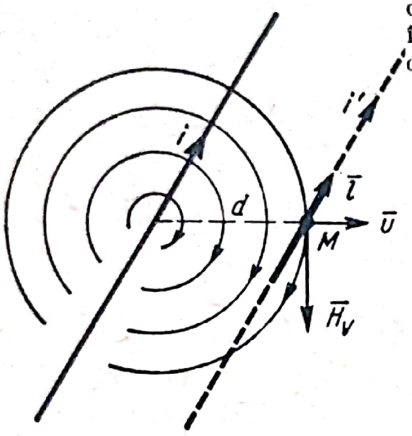


Fig. 17.1.

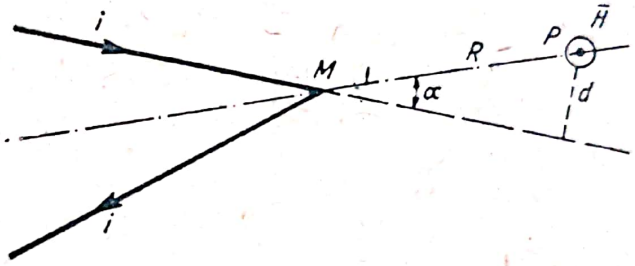


Fig. 17.2.

însă experiențele și la cîmpul unui fir îndoit în unghi (v. fig. 17.2), măsurînd intensitatea cîmpului magnetic într-un punct P situat pe bisectoarea unghiului astfel format (de deschidere 2α), la distanța R de vîrful M al unghiului. Vectorul $\overline{H}$ a fost găsit perpendicular pe planul determinat de unghi (adică pe planul figurii), orientat după regula burghiului drept față de prelungirile oricăreia dintre laturile unghiului și de mărime:

$$H = \frac{i}{2\pi R}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{i}{2\pi d}(1-\cos\alpha) \tag{17.3}$$

în care $d = R\sin\alpha$ este distanța de la punctul P la oricare din prelungirile laturilor unghiului. Se vede imediat că acest rezultat generalizează rezultatul precedent (17.2), care se regăsește în cazul unui unghi complet deschis $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$.

Pentru a se putea deduce din relația (17.3) expresia intensității cîmpului magnetic produs de un circuit de formă oarecare (fig. 17.3), marele matematician și astronom Pierre Simon Laplace (1749—1827), a utilizat ipoteza că acest cîmp este rezultanta, obținută prin superpoziție, a unor cîmpuri elementare $\delta\overline{H}$, produse de fiecare element de circuit de lungime ds în parte,

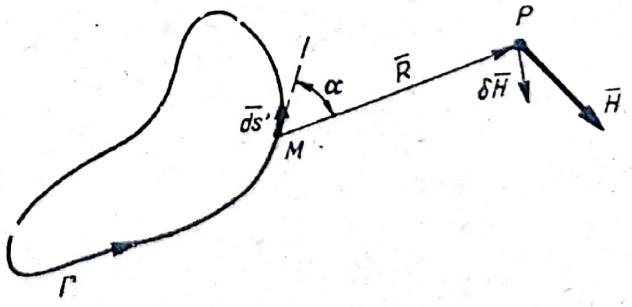


Fig. 17.3.

$$\overline{H} = \oint_\Gamma \delta\overline{H}(i,\ \overline{ds}',\ R). \tag{17.4}$$

Înainte de a examina validitatea însăși a acestei ipoteze (care din punctul de vedere fizic s-a dovedit inadecvată), arătăm cum poate fi folosită pentru a deduce din experiențele lui Biot și Savart, și în particular din (17.3), expresia generală a lui $\overline{H}$:

— Din motive de simetrie rezultă că, aplicînd relația (17.4) la conturul în unghi cu laturile infinite din figura 17.1, contribuția $\bar{H}^*$ a uneia dintre laturi va fi (v. fig. 17.4) jumătate din valoarea (17.3), adică:

$$\bar{H}^* = \frac{i}{4\pi d}(1-\cos\alpha)\bar{u}_H . \tag{17.5}$$

În acord cu (17.4) și considerînd un punct fix O de la care se măsoară lungimile s', rezultă că

$$\bar{H}(s) = \int_{-\infty}^{s'} \delta H = \bar{u}_H \frac{i}{4\pi d}(1-\cos\alpha) \tag{17.6}$$

unde $\bar{u}_H$ este versorul, perpendicular pe planul figurii, al vectorului $\bar{H}^*$, considerat ca funcție de s' (cînd capătul M se deplasează în lungul axei ON). Diferențiind această relație se obține:

$$\frac{d\bar{H}^*}{ds'} ds' = \delta\bar{H} = \bar{u}_H \frac{i}{4\pi d} \sin\alpha \frac{d\alpha}{ds'} ds'. \tag{17.7}$$

Dar, din triunghiul MNP (cu $PN = d = \text{constant}$) rezultă:

$$l - s' = d\operatorname{cotg}\alpha \quad \text{și} \quad -ds' = -d\frac{1}{\sin^2\alpha}\cdot d\alpha \tag{17.8}$$

adică $d\alpha/ds' = \sin^2\alpha/d$, iar:

$$\delta\bar{H} = \bar{u}_H \frac{i}{4\pi d^2}\sin^3\alpha\, ds'. \tag{17.9}$$

Introducînd distanța $R = d/\sin\alpha$ și observînd că

$$\bar{ds}\times\bar{R} = \bar{u}_H ds' R\sin\alpha \tag{17.10}$$

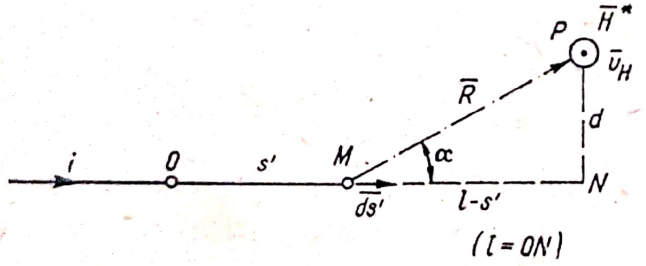


Fig. 17.4.

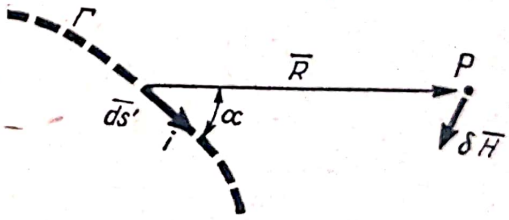


Fig. 17.5.

rezultă expresia:

$$\delta\bar{H} = \bar{u}_H \frac{i}{4\pi}\frac{\sin\alpha\, ds'}{R^2} = \frac{i}{4\pi}\frac{\bar{ds'}\times R}{R^3} \tag{17.11}$$

pentru ipoteticul cîmp elementar cu care contribuie un element de circuit $i\bar{ds'}$ (fig. 17.6) la cîmpul magnetic produs de un circuit închis.

Expresia intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$ dat de întreg circuitul Γ în punctul P (fig. 17.3), rezultă prin integrare:

$$\bar{H} = \frac{i}{4\pi}\oint_\Gamma \frac{\bar{ds'}\times\bar{R}}{R^3} \tag{17.12}$$

adică tocmai formula (17.1). Deşi rezultatul obţinut e corect, *ipoteza superpoziţiei „cîmpurilor elementare" $\delta\overline{H}$ date de* (17.4) *este incorectă, deoarece nu pot exista elemente de circuit rupte de circuitul din care fac parte* (independente de acesta), curentul continuu fiind totdeauna închis. Din acest motiv, formula (17.11) este corectă numai dacă e folosită pentru obţinerea intensităţii cîmpului magnetic produs de un circuit închis, prin integrare pe o curbă închisă, adică sub forma (17.12).

17.3. Cîmpul magnetic al curentului ce trece printr-un conductor rectiliniu, infinit de lung.

Valabilitatea formulei Biot-Savart-Laplace se poate verifica în diferite cazuri particulare, de exemplu regăsind expresia experimentală (17.2). Astfel, aplicînd relaţia (17.1) în cazul unui conductor infinit de lung (considerat că se închide pe la infinit), parcurs de curentul i (prezentat în perspectivă în fig. 17.6), şi observînd că $\delta\overline{H}$ sînt vectori de aceeaşi direcţie, se obţine:

$$H=\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds'}{R^3}R\sin(\pi-\alpha). \tag{17.13}$$

Făcînd următoarele înlocuiri:

$$s=d\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\qquad ds=-\frac{d}{\sin^2\alpha}\cdot d\alpha;\qquad R=\frac{d}{\sin\alpha}$$

în relaţia 17.13), rezultă:

$$H=-\frac{i}{4\pi}\int_{\pi}^{0}\frac{d}{\sin^2\alpha}\frac{\sin^3\alpha}{d^2}d\alpha=-\frac{i}{4\pi d}\int_{\pi}^{0}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{i}{4\pi d}\cos\alpha\Big|_{\pi}^{0}=\frac{i}{2\pi d},$$

adică relaţia (17.3) obţinută pe baze experimentale.

Sensul intensităţii cîmpului magnetic este dat de regula burghiului drept (sensul de rotaţie al burghiului drept care înaintează în sensul curentului i), liniile de cîmp fiind circulare.

Spre deosebire de spectrul cîmpului electric, ale cărui linii de cîmp plecau de la sarcini pozitive la sarcinile negative, spectrul cîmpului magnetic din vid al conductorilor parcurşi de curent este format din linii de cîmp închise (sau practic închise v. par. 20.3—, sau închise pe la infinit).

Cu ajutorul spectrului liniilor de cîmp se poate deduce în mod intuitiv sensul forţelor electrodinamice între conductoare (fig. 17.7), ţinînd seama de „compresiunea" laterală şi de „întinderea longitudinală" pe care le „exercită" liniile de cîmp (v. Tensiunile maxwelliene în cîmpul magnetic par. 28.6).

Se observă că firele conductoare sînt împinse în ambele cazuri spre regiunile cu linii de cîmp mai rare.

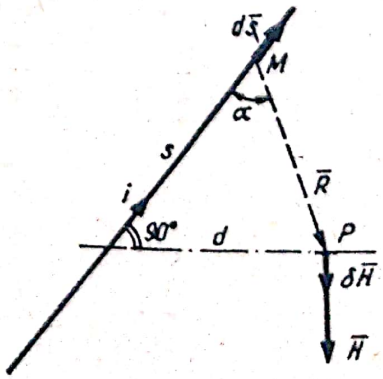


Fig. 17.6.

De asemenea, se poate determina sensul forței $\overline{F}$ ce se exercită asupra unui conductor parcurs de curentul i și introdus în cîmpul magnetic exterior de inducție $\overline{B}_v$.

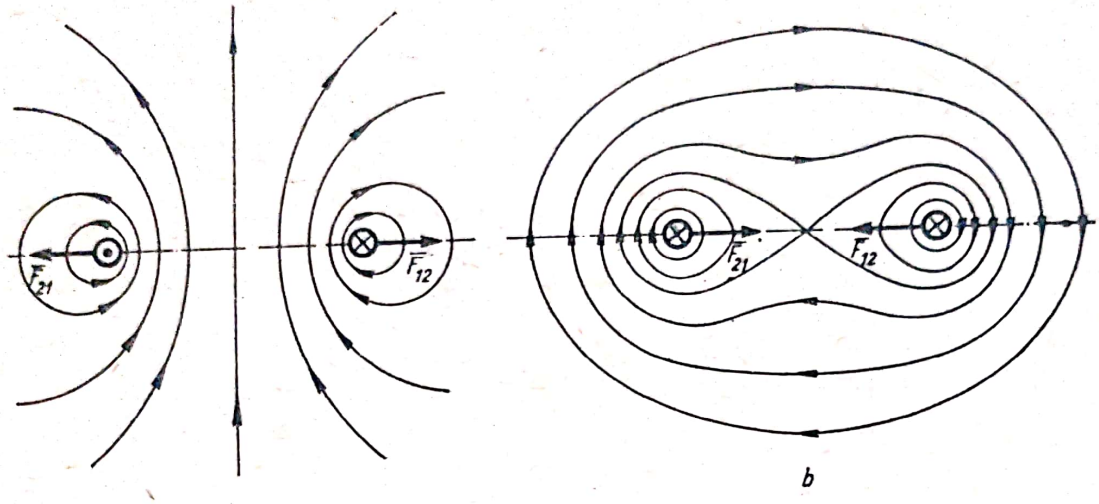


Fig. 17.7.

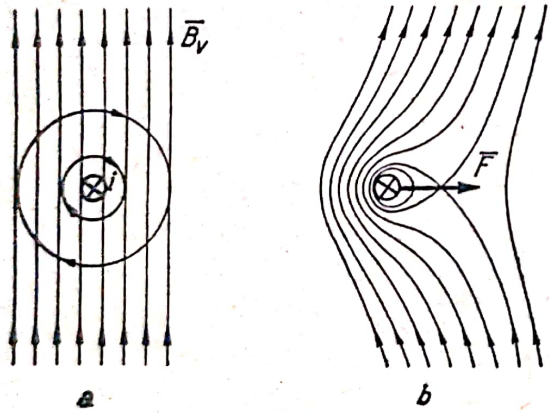


Fig. 17.8

În figura 17.8, *a* sînt figurate liniile de cîmp propriu ale conductorului și liniile de cîmp ale cîmpului exterior. În figura 17.8, *b* sînt desenate liniile rezultante, din a căror repartiție se poate deduce următoarea regulă: conductorul este acționat de o forță transversală îndreptată dinspre regiunea cu cîmp magnetic mai intens spre regiunea cu cîmp magnetic mai slab. În aceasta consistă *regula lui Mitkevici*.[1]

17.4. Intensitatea cîmpului magnetic într-un punct pe axa unei spire circulare parcurse de curent electric

Pentru a găsi intensitatea cîmpului magnetic într-un punct pe axa spirei din figura 17.9, se aplică formula Biot-Savart-Laplace, relația (17.1). Se observă că toate componentele perpendiculare pe axă ale vectorilor $\delta\overline{H}_v$ se anulează (două cîte două pentru elemente *ds* de spiră diametral simetrice),

[1] *Vladimir Feodorovici Mitkevici* (1872—1961) este unul dintre marii electrotehnicieni sovietici, cu valoroase lucrări în domeniul fenomenelor electromagnetice. A luat parte activă la elaborarea planului de electrificare GOELRO și a fost unul dintre organizatorii învățămîntului electrotehnic în U.R.S.S.

iar cîmpul rezultant este suma componentelor în lungul axei. În consecinţă, modulul intensităţii cîmpului magnetic în punctul P este:

$$H_z=\frac{i}{4\pi}\oint\frac{ds}{R^2}\cos=\frac{i}{4\pi R^2}\cos\theta\oint ds=\frac{ia}{2R^2}\cos\theta$$

deoarece $\overline{ds}$ şi $\overline{R}$ formează un unghi de 90°.

Dacă se ţine seama de relaţiile $R=\sqrt{a^2+z^2}$ şi $\cos\theta=\frac{a}{R}$ se obţine intensitatea cîmpului magnetic într-un punct pe axa unei spire

$$H_v=\frac{ia^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}=\frac{ia^2}{2R^3}, \qquad (17.14)$$

în care: i este curentul care parcurge spira; a e raza spirei; z e distanţa pe ax a punctului P faţă de planul spirei.

Direcţia vectorului $\overline{H}_v$ este cea a axei, iar sensul lui este dat de sensul de înaintare a burghiului drept rotit în sensul curentului.

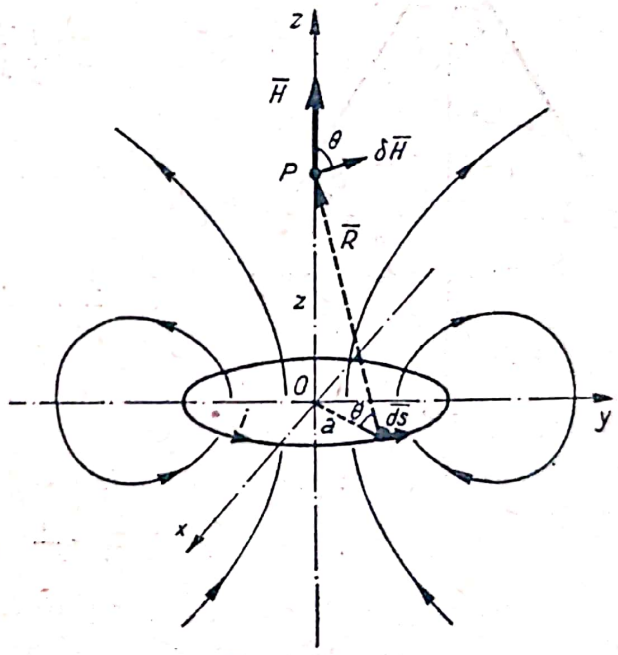


Fig. 17.9.

17.5. Potenţialul magnetic scalar al unei spire

Se consideră spira circulară din exemplul precedent (par. 17.4) cu axele de coordonate indicate în figura 17.9. Se observă că cele trei componente ale vectorului $\overline{H}_v$ sînt:

$$H_x=0;\ H_y=0; \qquad H_z=H_v=\frac{ia^2}{2R^3} \qquad (17.15)$$

în care: $R^3=(a^2+z^2)^{3/2}$ (fig. 17.10).

Prin analogie cu potenţialul electric se poate defini un potenţial magnetic scalar. Astfel, corespunzător relaţiei (3.27):

$$\overline{E}_v=-\text{grad}\,\overline{V} \quad \text{cu} \quad V(\overline{r})=V(\overline{r}_0)-\int_{\overline{r}_0}^{\overline{r}}\overline{E}\cdot\overline{ds}$$

se poate scrie $\overline{H}=-\text{grad}\ V_m$, (17.16)

iar mărimea V_m astfel definită se numeşte potenţialul magnetic scalar (deoarece aşa cum se poate verifica cu relaţia 17.1 şi se va arăta la par. 21.4, $\text{rot}\overline{H}=0$ în vid).

În cazul spirei circulare, potențialul magnetic în punctul P (fig. 17.9) se calculează cu:

$$V_m(z)=V_m(z_0)-\int_{z_0}^{z}\overline{H}\,\overline{ds}. \tag{17.17}$$

Fixînd prin convenție $V_m(0)=0$ și $z_0=\infty$, rezultă:

$$V_m=-\int_{\infty}^{z}H_z dz=\int_{z}^{\infty}\frac{ia^2}{2R^3}dz \tag{17.18}$$

Făcînd schimbarea de variabilă:

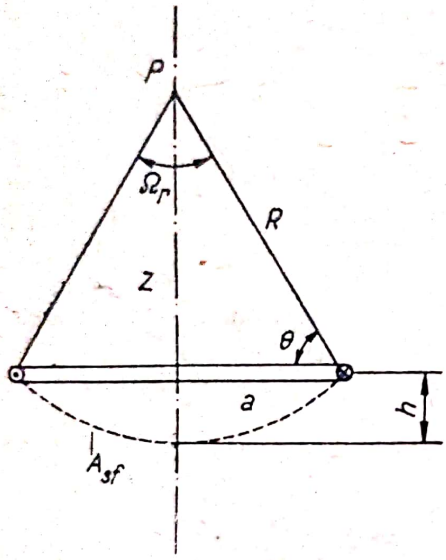


Fig. 17.10.

$$z=a\,\mathrm{tg}\,\theta;\quad dz=\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

și ținînd seama că $R=\dfrac{a}{\cos\theta}$ se obține:

$$V_m=\frac{i}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=\frac{i}{2}\Big|\sin\theta\Big|_{0}^{\pi/2}=\frac{i}{2}(1-\sin\theta). \tag{17-19}$$

Acest rezultat se poate scrie altfel, observînd că unghiul solid Ω_Γ sub care se vede spira de contur Γ din punctul P este, conform figurii 17.10:

$$\Omega_\Gamma=\frac{A_{sf}}{R^2}=\frac{h\cdot 2\pi R}{R^2}=\frac{R(1-\sin\theta)2\pi R}{R^2}=2\pi(1-\sin\theta) \tag{17.20}$$

unde A_{sf} este aria calotei sferice definite de spiră pe sfera de rază R cu centrul în P.

Înlocuind această valoare în relația (17.19) se obține:

$$V_m=\frac{i}{4\pi}\Omega_\Gamma. \tag{17.21}$$

Se poate demonstra că formula (17.21) este valabilă oricare ar fi forma spirei și poziția punctului din cîmpul magnetic al acestei spire. Potențialul magnetic este (pînă la o constantă aditivă arbitrară) egal cu cîtul prin 4π al produsului dintre intensitatea curentului din spiră și unghiul solid sub care se vede spira din punctul considerat. Unghiul Ω_Γ este pozitiv, dacă spira este văzută din punctul P, ca fiind parcursă de curent în sens trigonometric, și este negativ în caz invers.

Demonstrația se poate face obținînd din expresia:

$$\overline{H}_v=-\mathrm{grad}\,V_m=-\frac{i}{4\pi}\mathrm{grad}\,\Omega_\Gamma \tag{17.22}$$

relația (17.22) — formula Biot-Savart-Laplace[1]. Cu ajutorul potențialului magnetic scalar se poate determina, deci, intensitatea cîmpului magnetic.

---

[1] În adevăr, se observă că $\Omega_\Gamma=\iint_{s_\Gamma}\dfrac{\overline{dA'}\cdot\overline{R}}{R^3}=\iint_{s_\Gamma}\overline{dA'}\cdot\mathrm{rot}'\,\overline{G}=\oint_{\Gamma}\overline{G}\,\overline{ds'}$ cu $\mathrm{rot}'\,\overline{G}=\dfrac{\overline{R}}{R^3}=-\mathrm{rot}\,\overline{G}$. Rezultă că $\mathrm{grad}\,\Omega_\Gamma=\mathrm{grad}\oint_\Gamma\overline{G}\,\overline{ds'}=-\oint_\Gamma(\overline{ds'}\,\mathrm{grad}')\overline{G}+\oint_\Gamma\overline{ds'}\,\mathrm{rot}\,\overline{G}=-\oint_\Gamma d\overline{G}-$

Notă. Se va arăta în par. 21.4 că se poate defini potențialul magnetic scalar numai în regim staționar și numai în regiunile unde densitatea de curent electric este nulă, adică unde rot $\overline{H}=0$. Deoarece aceste regiuni sînt, în general, multiplu conexe, potențialul magnetic scalar este *neuniform*, adică are în același punct un șir de valori, după curba de integrare utilizată pentru calcularea lui.

17.6. Proprietăți generale ale cîmpului magnetic din vid produs de circuite de curent continuu

În electrostatică, proprietățile generale ale intensității cîmpului electric erau caracterizate în vid prin relațiile:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E}_v \overline{ds}=0 \qquad (3.22)$$

$$\iint_{\Sigma} \overline{E}_v \overline{dA}=\frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (3.14)$$

Inducția magnetică în vid, a cărei expresie e generală rezultă din:

$$\overline{B}_v=\mu_0\overline{H}_v=\mu_0\frac{i}{4\pi}\oint_{\Gamma'}\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3} \qquad (17.23)$$

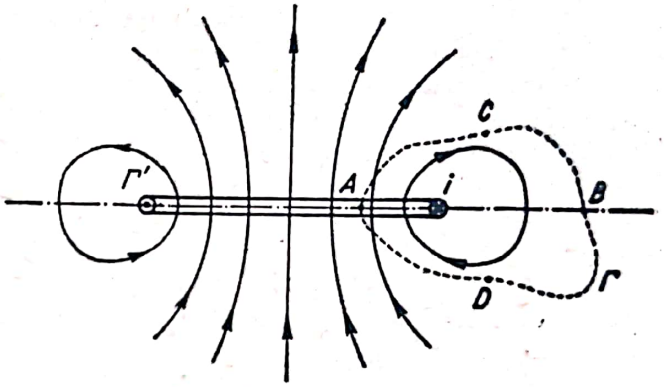


Fig. 17.11.

va fi caracterizată de proprietăți generale analoge ce se expun în teoremele următoare, referitoare la circulația și fluxul vectorul cîmp $\overline{B}_v$.

17.6.1. **Teorema lui Ampère.** Se consideră cîmpul magnetic produs de o spiră plană de contur Γ' (fig. 17.11), parcursă de curentul i.

Calculînd integrala de linie a inducției $\overline{B}_v$ de-a lungul conturului (ACBDA) $\equiv\Gamma$ care înlănțuie spira și ale cărui puncte A și B sînt în planul spirei, se obține:

$$\oint_{\Gamma}\overline{B}_v\overline{ds}=\int_{ACB}\overline{B}_v\overline{ds}+\int_{BDA}\overline{B}_v\overline{ds}. \qquad (17.24)$$

$$\text{Dar } \int_{ACB}\overline{B}_v\overline{ds}=\mu_0\int_{ACB}(-\text{grad } V_m)\,\overline{ds}=\mu_0\int_{ACB}(-dV_m)=\mu_0[V_m(A)-V_m(B)]=$$

$$=\mu_0\frac{i}{4\pi}[\underbrace{\Omega_{\Gamma'}(A)}_{2\pi}-\underbrace{\Omega_{\Gamma'}(B)}_{0}]=\mu_0\frac{i}{2}, \qquad (17.25)$$

$-\oint_{\Gamma}\overline{ds'}\times\frac{\overline{R}}{R^3}$, iar $\overline{H}=-\text{grad } V_m=\frac{i}{4\pi}\text{grad}\,(-\Omega_{\Gamma})=\frac{i}{4\pi}\oint_{\Gamma}\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}$. În aceste relații, $\overline{dA'}$ este vectorul element de arie al unei suprafețe S_{Γ} sprijinită pe conturul Γ al circuitului, iar integrala diferențialei $d\overline{G}$ a funcțiunii vectoriale de punct $\overline{G}(x', y', z')$ se anulează, fiind referitoare la o curbă închisă.

în care $\Omega_{\Gamma'}(A)=2\pi$ (spira este privită de sus) și $\Omega_{\Gamma'}(B)=0$ (spira este privită dintr-un punct exterior situat în planul ei). În mod similar se ajunge la

$$\int_{BDA} \overline{B}_v \overline{ds} = \mu_0 \frac{i}{4\pi} [\underbrace{\Omega_{\Gamma'}(B)}_{0} - \underbrace{\Omega_{\Gamma'}(A)}_{-2\pi}] = \mu_0 \frac{i}{2}, \tag{17.26.}$$

în care $\Omega_{\Gamma'}(A)=-2\pi$ (spira este privită de jos) și $\Omega_{\Gamma'}(B)=0$.

În consecință, din relațiile (17.25), (17.26), (17.27) rezultă:

$$\oint \overline{B}_v \overline{ds} = \mu_0 i. \tag{17.27}$$

Integrala de linie a inducției magnetice în vid luată pe o curbă ce înconjură o singură dată un conductor parcurs de curentul i este egală cu produsul între curent și permeabilitatea vidului. În cazul cînd Γ nu înconjură linii de curent, integrala de linie a inducției magnetice este nulă, deoarece, în acest caz, după parcurgerea curbei închise, unghiul solid $\Omega_{\Gamma'}$ (și deci potențialul V_m) ia aceeași valoare:

$$\oint \overline{B}_v \overline{ds} = 0 \tag{17.28}$$

În cazul în care curba Γ înconjură mai mulți conductori parcurși de curenți electrici, aplicînd principiul superpoziției se deduce:

$$\oint_{\Gamma} \overline{B}_v \overline{ds} = \mu_0 \Sigma i. \tag{17.29}$$

Relația (17.29) exprimă *teorema lui Ampère*; *integrala de linie a inducției magnetice în vid este egală cu produsul între permeabilitatea* μ_0 *și suma algebrică a curenților înlănțuiți. La calculul sumei, curenții se consideră pozitivi cînd sensul în care ei străbat conturul* Γ *se asociază după regula burghiului drept cu sensul în care se face integrarea.* De exemplu, în figura 17.12, pe conturul Γ:

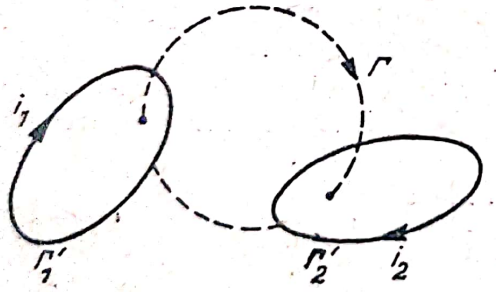


Fig. 17.12.

$$\oint_{\Gamma} \overline{B}_v \overline{ds} = \mu_0 (i_2 - i_1)$$

Cînd conturul Γ înlănțuie o bobină cu N spire, relația (17.29) devine:

$$\oint_{\Gamma} \overline{B}_v \overline{ds} = \mu_0 N i, \tag{17.30}$$

deoarece, în acest caz, curentul i trece printr-o suprafață S_Γ de N ori. În general, cînd conturul străbate mai multe bobine relația (17.30) devine

$$\oint_{\Gamma} \overline{B}_v \overline{ds} = \mu_0 \Sigma N i. \tag{17.30'}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind cu relaţia (17.30) pe $\overline{B}_v=\mu_0\overline{H}_v$ se obţine formularea obişnuită a teoremei

$$\boxed{\oint_\Gamma \overline{H}_v\overline{ds}=\Sigma Ni=\theta} \qquad (17.31)$$

(în care mărimea $\theta=\Sigma Ni$ poartă denumirea de *solenaţie* şi se măsoară în amper-spire):

Tensiunea magnetică în lungul unei curbe închise, adică integrala de linie a intensităţii cîmpului magnetic, este proporţional cu solenaţia care înlănţuie curba respectivă. Coeficientul de proporţionalitate este egal cu 1 în sistemul MKSA raţionalizat utilizat în acest curs (şi este egal cu 4π în sistemul MKSA neraţionalizat).

Concluzie. Tensiunea magnetică între două puncte nu depinde de drum, numai dacă drumurile care leagă cele două puncte alcătuiesc împreună o curbă închisă care nu înlănţuie diferite circuite parcurse de curenţi. În cazul general, tensiunea magnetică între două puncte depinde de drum. Aceasta se datoreşte faptului că, în prezenţa curenţilor electrici, cîmpul magnetic nu este irotaţional în tot spaţiul. Numai în domeniile simplu conexe, în care densitatea de curent este peste tot nulă, cîmpul magnetic este irotaţional şi poate fi considerat ca gradientul unui potenţial magnetic scalar.

17.6.2. **Conservarea fluxului magnetic.** A doua proprietate generală importantă a cîmpului magnetic se referă la fluxul vectorului inducţie magnetică $\overline{B}_v$ printr-o suprafaţă închisă Σ care este identic nul, oricare ar fi suprafaţa:

$$\iint_\Sigma \overline{B}_v\, \overline{dA}=0 \qquad (17\ 23)$$

spre deosebire de situaţia din electrostatică, unde fluxul vectorului inducţie electrică printr-o suprafaţă închisă este egal cu sarcina localizată în interiorul suprafeţei (v. rel. 3.14).

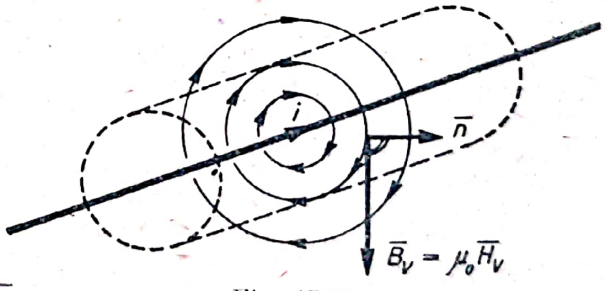


Fig. 17.13.

Ca verificare a acestei proprietăţi, se poate considera, de exemplu [1], cîmpul magnetic al unui fir conductor infinit lung, calculînd integrala pentru o suprafaţă cilindrică coaxială cu firul (fig. 17.13).

---

[1] Demonstraţia generală se poate da folosind formula lui Biot-Savart-Laplace şi calculînd

$$\text{div}\ \overline{B}_v=\text{div}\left[\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}\right]=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint \text{div}\ \frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}=-\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint\overline{ds'}\,rot\,\frac{\overline{R}}{R^3}=0,$$

deoarece $rot\,\dfrac{\overline{R}}{R^3}=0$.

Rezultă atunci

$$\iint_\Sigma \overline{B}_v\overline{ds}=\iiint_{V_\Sigma}\text{div}\ \overline{B}_v\overline{dv}=0.$$

Liniile de cîmp fiind circulare sînt conținute în această suprafață și unghiul dintre elementul de arie $\overline{dA}=\overline{n}dA$ și vectorul $\overline{B}_v$ este de 90° (fig. 17.13) în orice punct al suprafeței. Deci:

$$\iint_{\Sigma}\overline{B}_v\,\overline{dA}=\iint B_v dA\,\underbrace{\cos(\overline{B}_v,\ \overline{dA})}_{0}=0$$

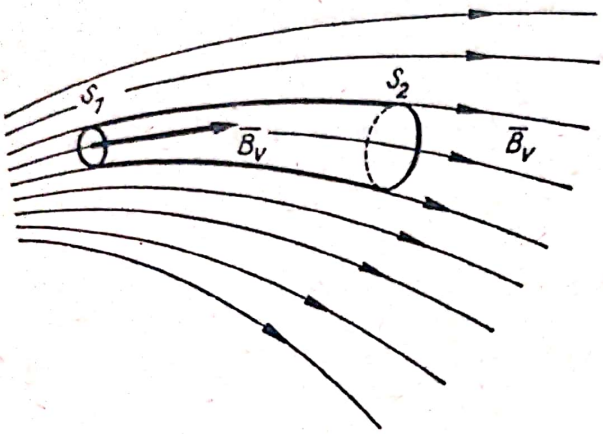


Fig. 17.14.

această proprietate determină forma liniilor de cîmp ale inducției magnetice, care sînt linii închise (punctul pe la infinit) sau aproape închise (adică reunind oricît de aproape de un punct prin care au mai trecut), fără început și fără sfîrșit. De asemenea, fluxul inducției magnetice (fluxul magnetic) este conservativ, adică dacă se consideră un tub de flux (fig. 17.14) se obține, ținînd seama de relația (17.32):

$$\iint_{S_1}\overline{B}_v\cdot\overline{dA}=\iint_{S_2}\overline{B}_v\cdot\overline{dA},$$

deoarece $\iint_S B_v\,\overline{dA}$ prin suprafața laterală este nul, $\overline{B}_v$ fiind tangent la această suprafață (a se vedea și par. 20).

17.6.3. Inexistența sarcinilor magnetice. Nu există sarcini magnetice adevărate:

$$q_m\equiv 0. \tag{17.33}$$

Noțiunea de sarcină (masă) magnetică s-a introdus în trecut prin analogie cu sarcina electrică, considerîndu-se polii magneților drept mici corpuri încărcate cu sarcini magnetice între care s-ar exercita forțe de tip coulombian. Dacă ar exista astfel de sarcini, fluxul lui $\overline{B}_v$ prin suprafețe închise ar fi proporțional cu sarcina magnetică din interiorul suprafeței. Acest flux este însă nul (conform cu 17.32). Argumentul experimental fundamental care infirmă ipoteza existenței sarcinilor magnetice constă în faptul că asupra particulelor elementare aduse într-un cîmp magnetic uniform de inducție $\overline{B}_v=\mu_0\overline{H}_v$ *nu se exercită forțe omoparalele cu intensitatea cîmpului de forma*: $\overline{F}=q_m\overline{H}_v$.

17.6.3. Unități de măsură pentru $\overline{H}_v$ și V_m. Unitatea de măsură pentru inducția magnetică $\overline{B}_v$ s-a dat în par. 16.2. Unitatea de măsură pentru intensitatea cîmpului magnetic $\overline{H}_v$, în sistemul MKSA raționalizat, se numește amper pe metru sau amperspiră pe metru $\left(\frac{A}{m}\text{ sau }\frac{A.sp}{m}\right)$.

Valorile acestei unități (exprimate în raport cu unitățile din alte sisteme) sînt:

1 A·sp/m$=4\pi$ unități MKSA neraționalizat $=4\pi$ milioersted (mOe)
$=4\pi\cdot10^{-3}$ unități CGS em$=4\pi\cdot10^{-3}$ oersted (Oe)=
$=4\pi\cdot3\cdot10^{7}$ unități CGS es.

Unitatea de măsură pentru potențialul magnetic V_m sau pentru tensiunea magnetică U_m, în sist. MKSA raționalizat, se numește amper sau amperspiră

(A sau A.sp). Valorile ei sînt 1 A.sp $= 4\pi$ unităţi MKSA neraţionalizat $= 4\pi$ mOe $\cdot$ m $= 4\pi$ decigilbert (dGb) $= 4\pi \cdot 10^{-1}$ unităţi CGS em $= 4\pi \cdot 10^{-1}$ .Oe.cm $= 4\pi \cdot 10^{-1}$ gilbert (Gb) $= 4\pi \cdot 10^{9}$ unităţi CGS es.

În prezentul curs se indică numai unităţile în sistemele CGSem şi CGS es neraţionalizat, deoarece aceasta este forma uzuală sub care sînt folosite. Forma raţionalizată a sistemelor CGS nu se utilizează în tehnică. Relaţiile, date mai sus, între diferitele unităţi ale mărimilor $\overline{H}_v$ şi U_m se deduc fără dificultăţi din relaţiile corespunzătoare pentru unităţile $\vec{B}_v$ şi valorile constantei universale μ_0 (v. par. 16.4.2).

18. Magnetizarea corpurilor

Aşa cum cîmpul electrostatic poate fi produs atît de corpuri încărcate cu sarcină electrică (adevărată), cît şi de corpuri polarizate electric, se constată experimental că şi existenţa cîmpului magnetic staţionar este determinată de două stări distincte ale corpurilor:

— starea conductoarelor parcurse de curenţi electrici (v. par. 16 şi par. 17) (starea electrocinetică);

— starea corpurilor magnetizate.

În cazul stărilor nestaţionare (variabile în timp) se mai constată existenţa unui cîmp magnetic produs de variaţia în timp a cîmpului electric (prin curentul de deplasare, v. par. 21), după cum se mai constată existenţa unui cîmp electric produs de variaţia în timp a cîmpului magnetic (inducţia electromagnetică, v. par. 22).

În paragraful care urmează se studiază cea de a doua cauză de producere a cîmpului magnetic staţionar.

18.1. Starea de magnetizaţie. Momentul magnetic. Magnetizaţia

18.1.1. Starea de magnetizaţie. Experimental se stabileşte existenţa unor corpuri magnetizate, adică a unor corpuri care au proprietatea de a exercita între ele şi asupra altor corpuri (de fier, de nichel, cobalt sau de anumite aliaje) din apropierea lor, forţe şi momente de un tip nou (diferite de cele de natură electrică). Se mai constată că în regiunea de spaţiu din jurul corpurilor magnetizate se exercită forţe asupra conductoarelor parcurse de curent, adică există cîmp magnetic, ca şi în jurul circuitelor electrice. În mod natural există anumiţi oxizi de fier (Fe_3O_4) — numiţi magneţi naturali — cu proprietatea de a produce cîmp magnetic (aceşti magneţi naturali erau cunoscuţi încă din antichitate şi se găseau la Magnesia, în Asia Mică). Magneţii pot fi

produși și în mod artificial prin aducerea unor substanțe în cîmp magnetic. Substanțele care pot fi ușor magnetizate sînt oțelul, nichelul, cobaltul, aliajelor lor etc. și se numesc substanțe feromagnetice.

Un corp se găsește în *stare de magnetizație* dacă este supus unor forțe și unor cupluri cînd este situat într-un cîmp magnetic, chiar dacă nu e parcurs de curent electric.

Cel mai simplu și mai cunoscut corp magnetizat este *acul magnetic*. Dacă un ac magnetic este adus în apropierea unui conductor parcurs de curentul i, el este supus acțiunii unor forțe (experiența lui Oersted).

Stările de magnetizație ale corpurilor pot fi *permanente*, cînd nu depind de inducția magnetică exterioară $\overline{B}_v$ sau *temporare*, cînd depind de inducția magnetică exterioară $\overline{B}_v$.

Un corp dat poate avea ambele stări de magnetizație concomitent.

18.1.2. **Momentul magnetic și magnetizația.** Caracterizarea acestor stări de magnetizație se face cu ajutorul mărimii primitive vectoriale numite *moment magnetic* $\overline{m}$. Analiza experiențelor efectuate cu un mic corp de probă magnetizat arată că asupra lui se exercită un cuplu $\overline{C}$ (un moment rezultant în raport cu centrul său de inerție) și o forță $\overline{F}$:

$$\boxed{\begin{aligned}&\overline{C}=\overline{m}\times\overline{B}_v\\&\overline{F}=\operatorname{grad}\,(\overline{m}\,\overline{B}_v).\end{aligned}} \qquad (18.1)$$

Cuplul $\overline{C}$, care se exercită în vid asupra unui mic corp magnetizat, este egal cu produsul vectorial al momentului său magnetic $\overline{m}$ prin inducția magnetică în vid $\overline{B}_v$ (fig. 18.1). Direcția mărimii vectoriale $\overline{m}$ este *direcția de magnetizare* a corpului. Valoarea cuplului este:

$$C=mB_v \sin\alpha \qquad (18.2)$$

Un mic corp magnetic tinde deci să se orienteze în direcția cîmpului magnetic, astfel ca direcția lui de magnetizare să devină paralelă cu inducția magnetică exterioară.

În cazul în care cîmpul magnetic este neuniform, se exercită asupra micului corp magnetizat cu momentul magnetic $\overline{m}$ și o forță rezultantă $\overline{F}$, avînd componentele pe cele trei axe:

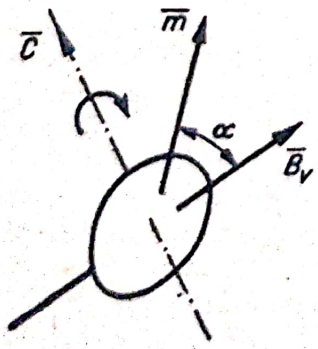


Fig. 18.1.

$$F_x=m_x\frac{\partial B_{vx}}{\partial x}+m_y\frac{\partial B_{vy}}{\partial x}+m_z\frac{\partial B_{vz}}{\partial x}$$

$$F_y=m_x\frac{\partial B_{vx}}{\partial y}+m_y\frac{\partial B_{vy}}{\partial y}+m_z\frac{\partial B_{vz}}{\partial y} \qquad (18.3)$$

$$F_z=m_x\frac{\partial B_{vx}}{\partial z}+m_y\frac{\partial B_{vy}}{\partial z}+m_z\frac{\partial B_{vz}}{\partial z}.$$

Pentru a măsura momentul magnetic este suficient să fie cunoscut cîmpul exterior (derivatele parțiale ale inducției magnetice) și să se măsoare forța exercitată asupra corpului, adică F_x, F_y și F_z. Sistemul de ecuații (18.3) determină univoc componentele m_x, m_y, m_z ale momentului magnetic (temporar sau permanent).

Momentul magnetic al unui mic corp magnetizat este, deci, o mărime de stare magnetică a acestui corp care caracterizează complet starea lui de magnetizație și condiționează exercitarea unui cuplu și a unei forțe date de (18.1), *dacă micul corp magnetizat este adus într-un cîmp magnetic exterior de inducție* $\overline{B}_v$.

În cazul general, momentul magnetic poate avea o componentă permanentă $\overline{m}_p$ (independentă de cîmpul exterior $\overline{B}_v$) și una temporară $\overline{m}_t$ (dependentă de $\overline{B}_v$ și anulîndu-se o dată cu aceasta):

$$\overline{m}=\overline{m}_t+\overline{m}_p \qquad (18.4)$$

Relațiile (18.1) și (18.4) sînt complet analoge relațiilor (4.1) și (4.4) privitoare la starea de polarizație electrică și la caracterizarea ei cu ajutorul momentului electric $\overline{p}$.

În cazul cînd corpul magnetizat are dimensiuni mai mari, momentul lui magnetic se definește ca suma momentelor $\Delta\overline{m}$ ale părților lui elementare, $\overline{m}=\Sigma\,\Delta\overline{m}$.

Limita $\overline{M}$ a raportului dintre $\Delta\overline{m}$ și volumul Δv corespunzător, cînd acest volum tinde către zero, se numește *magnetizație*:

$$\overline{M}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\Delta\overline{m}}{\Delta v}=\frac{d\overline{m}}{dv} \qquad (18.5)$$

Mărimea $\overline{M}$ se mai numește intensitate de magnetizare și este, deci, densitatea de volum a momentelor magnetice sau momentul magnetic al unității de volum.

În funcție de magnetizație, momentul magnetic $\overline{m}$ al corpului se exprimă prin relația:

$$\overline{m}=\iiint\overline{M}dv. \qquad (18.6)$$

18.1.3. **Unitatea de măsură** pentru momentul magnetic este în sistemul MKSA raționalizat, *amper-metru pătrat* Am^2 (a se vedea și par. 16.2). În adevăr, dimensiunea momentului magnetic rezultă din relația (18.1):

$$[m]=\frac{[F]\,[l]}{[B]}=\frac{[I]\,[L]\,[B]\,[L]}{[B]}=[I\,L^2]$$

iar dimensiunea magnetizației rezultă:

$[M]=\frac{[m]}{[L^3]}=[IL^{-1}]$, ceea ce duce la unitatea *amper pe metru* (A/m) pentru magnetizație în sistemul MKSA.

Observație: În literatura tehnică se mai folosește pentru caracterizarea stării de magnetizație mărimea $\bar{j}$ — numită *moment magnetic coulombian* sau moment magnetic „vechi" definită de relațiile:

$$\bar{C}=\bar{j}\times\bar{H}_v; \qquad \bar{F}=\text{grad}\,(\bar{j}\cdot\bar{H}_v) \tag{18.1'}$$

Deoarece $\bar{H}_v=\frac{1}{\mu_0}\bar{B}_v$, rezultă că $\bar{j}=\mu_0\bar{m}$, adică diferă de momentul magnetic $\bar{m}$ (numit pentru mai multă precizie și moment magnetic amperian sau moment magnetic „nou") numai prin factorul μ_0 — constantă universală. În acest caz, mărimea

$$\bar{I}=\mu_0\bar{M}=\frac{d\bar{j}}{dv} \tag{18.5'}$$

se numește *polarizație magnetică*.

18.2. Echivalența dintre un mic corp magnetizat și o buclă de curent

Teorema echivalenței: *În regim staționar, un mic corp magnetizat de moment magnetic $\bar{m}$ și o buclă de curent parcursă de un curent electric i și având vectorul arie $\bar{A}$, sînt echivalente atît din punctul de vedere al forțelor și momentelor mecanice carese exercită asupra lor într-un cîmp magnetic exterior, cît și din punctul de vedere al cîmpului magnetic produs de ele în vid, dacă este îndeplinită condiția:*

$$\bar{m}=i\bar{A} \tag{18.7}$$

(în care $i\bar{A}=\bar{m}_b$ este prin definiție momentul buclei de curent).

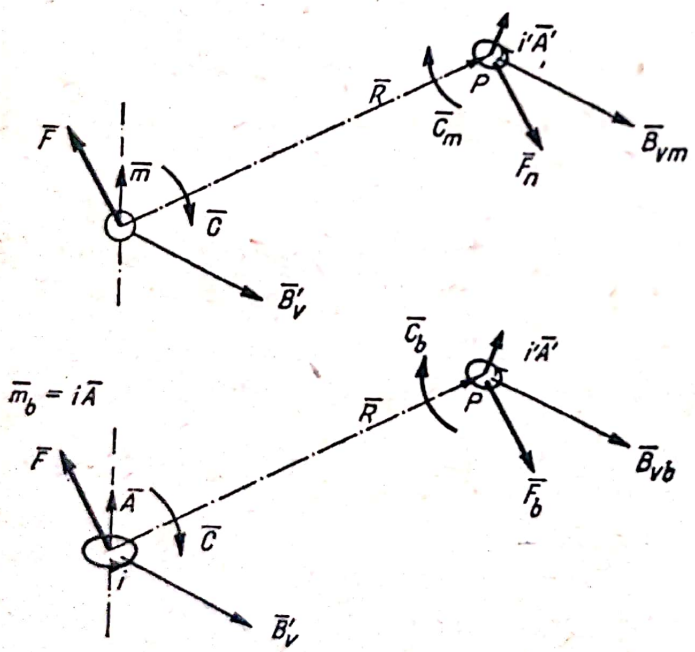


Fig. 18.2.

Se consideră în figura 18.2 un mic corp magnetizat și o buclă de curent pentru care este îndeplinită condiția de echivalență (relația 18.7). Rezultă din relațiile (16.9) și (18.1) că acțiunile mecanice produse asupra lor într-un același cîmp exterior sînt aceleași: $\bar{F}$ și $\bar{C}$[1]. Se presupune că succesiv, în același punct P la distanța $\bar{R}$ de micul corp magnetizat, respectiv de buclă, se așază o buclă

[1] Cu (16.14) se poate calcula și forța rezultantă $\bar{F}$ exercitată asupra buclei de curent de un cîmp magnetic exterior $\bar{B}_v$ și se găsește $\bar{F}=\text{grad}\,(\bar{m}_b\bar{B}_v)$ adică o relație de aceeași formă cu a doua relație (18.1)

de curent auxiliară caracterizată prin momentul $i'\overline{A}'$. Deoarece ansamblul celor două corpuri constituie în fiecare caz un sistem izolat de puncte materiale, trebuie ca în fiecare din cele două situații forța rezultantă și momentul rezultant (luat, de exemplu, față de P) să fie nule (egalitatea acțiunii și reacțiunii), adică:

— pentru partea de sus a figurii 18.2: $\overline{F}=-\overline{F}_m$ și $\overline{C}+\overline{C}_m+(-\overline{R})\times\overline{F}=0$;

— pentru partea de jos a figurii 18.2: $\overline{F}=-\overline{F}_b$ și $\overline{C}+\overline{C}_b+(-\overline{R})\times\overline{F}=0$.

Rezultă că acțiunile mecanice produse de micul corp magnetizat sau de bucla de curent asupra buclei auxiliare sînt identice:

$$\overline{F}_m=\overline{F}_b \text{ și } \overline{C}_m=\overline{C}_b$$

și cum $\overline{C}_m=i'\overline{A}'\times\overline{B}_{vm}$ și $\overline{C}_b=i'\overline{A}'\times\overline{B}_{vb}$, $\overline{B}_{vm}$ și $\overline{B}_{vb}$ fiind respectiv inducțiile cîmpurilor corpului magnetizat și al buclei, rezultă $\overline{B}_{vm}=\overline{B}_{vb}$, deoarece bucla auxiliară poate avea orice orientare și poate fi plasată în orice punct. În consecință, aceste două corpuri (bucla și micul corp magnetizat) sînt echivalente atît din punctul de vedere al acțiunilor mecanice exercitate asupra lor, cît și din punctul de vedere al cîmpului magnetic produs de ele, dacă este îndeplinită condiția (18.7). Folosind această echivalență se poate calcula cîmpul buclei (cu relațiile din par. 17) și deci și cîmpul corpului magnetizat echivalent cu ea.

18.3. Potențialul și cîmpul magnetic produse în vid de corpuri magnetizate

Dacă se consideră relația (17.21) care dă expresia potențialului magnetic și se presupune că aria $\overline{A}$ a circuitului tinde către zero (produsul iA rămîne finit), se obține potențialul magnetic produs la distanța R de bucla de curent:

$$V_m=\frac{i}{4\pi}\Omega_\Gamma=\frac{i}{4\pi}\int\int\frac{\overline{R}d\overline{A}}{R^3}=\frac{i}{4\pi}\frac{\overline{A}\,\overline{R}}{R^3} \tag{18.8}$$

în care unghiul solid este dat de relația (3.13).

Ținînd seama că potrivit teoremei echivalenței $\overline{m}=i\overline{A}$, se obține din relația (18.8) potențialul magnetic produs la distanța R de micul corp magnetizat:

$$V_m=\frac{\overline{m}\,\overline{R}}{4\pi R^3}. \tag{18.9}$$

Valoarea inducției $\overline{B}_v$ în același punct este, conform relației (17.24):

$$\overline{B}_v=-\mu_0 \text{ grad } V_m=-\mu_0 \text{ grad}\left[\frac{\overline{m}\,\overline{R}}{4\pi R^3}\right]. \tag{18.10}$$

Efectuînd derivările din relația (18.10) printr-un calcul asemănător cu cel utilizat la determinarea cîmpului electric al unui dipol electric (par. 4.3), se obține:

$$\overline{B}_v=\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\overline{m}\,\overline{R})\overline{R}}{R^5}-\frac{\overline{m}}{R^3}\right]. \tag{18.11}$$

Rezultă o analogie de formă între liniile de cîmp magnetic (v. fig. 18.3) al unei bucle de curent (sau ale unui mic corp magnetizat echivalent cu ea) și liniile de cîmp ale unui dipol electric (fig. 4.6).

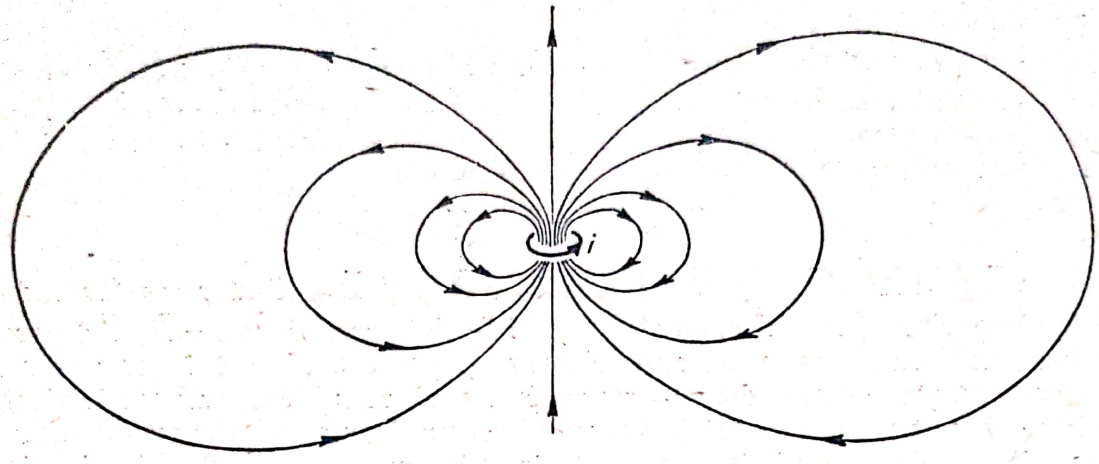


Fig. 18.3.

Ca o consecință a echivalenței între micile corpuri magnetizate și buclele de curent se poate găsi o distribuție de curenți echivalentă cu starea de magnetizare a corpurilor.

18.4. Curenți amperieni

18.4.1. Intensitatea curentului amperian. Curentul care trece printr-o mică spiră echivalentă cu un mic corp magnetizat pe care îl înlocuiește se numește curent amperian, deoarece Ampère a emis ipoteza că la scară microscopică această echivalență este realizată de fapt.

Dacă se consideră un corp cilindric uniform magnetizat în sensul înălțimii, cu aria secțiunii A și înălțimea h (fig. 18.4), momentul său magnetic este conform relației (18.6):

$$m = MV = MAh. \tag{18.12}$$

Dar relația între acest moment și curentul amperian i_m este, conform relației (18.7).

$$m = i_m A \tag{18.13}$$

Din relațiile (18.12) și (18.13) se deduce valoarea curentului amperian pentru o singură buclă:

$$i_m = Mh. \tag{18.14}$$

În general, prin *curenți amperieni* se înțelege o repartiție de curenți de conducție echivalentă cu starea de magnetizație a corpului din punctul de vedere al cîmpului magnetic produs în vid.

Considerînd o suprafață S_Γ sprijinită pe curba Γ în interiorul unui corp magnetizat (fig. 18.5), se poate calcula curentul amperian i_{m_Γ} ce străbate această suprafață.

La valoarea curentului i_{m_Γ} contribuie cu di_m numai elementele de volum dv interceptate de curba Γ (celelalte au un curent amperian ce intersectează de două ori S_Γ cu sensuri opuse (sau care nu intersectează de loc S_Γ).

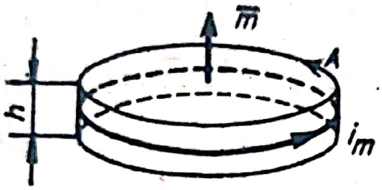


Fig. 18.4.

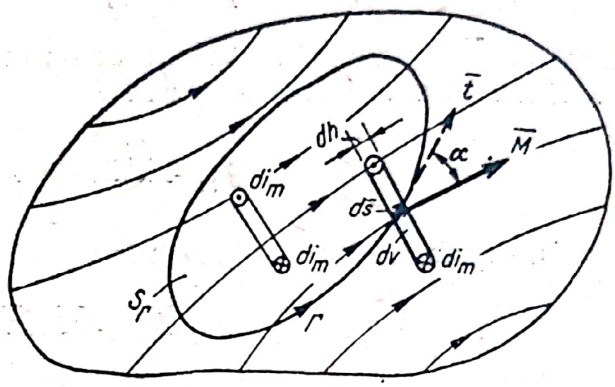


Fig. 18.5.

Dacă se notează cu:

$$\bar{ds}=ds\bar{t},\ |\bar{t}\,|=1,\ di_m=Mdh=M\,ds\cos\alpha=\bar{M}\,\bar{ds}$$

conform relației (18.14) (elementele de volum sînt orientate în sensul magnetizării $\bar{M}$).

Rezultă:

$$\boxed{i_{m_\Gamma}=\oint_\Gamma \bar{M}\,\bar{ds}} \qquad (18.15)$$

Curentul amperian ce străbate o suprafață S_Γ sprijinită pe o curbă Γ este egal cu circulația vectorului magnetizație $\bar{M}$ în lungul acestei curbe.

18.4.2. **Densități de curent amperian.** Repartiția curentului amperian poate fi de volum sau superficială.

a) În cazul general al corpurilor magnetizate neuniform, valoarea locală a densității curentului amperian este dată de:

$$\bar{J}_m=\text{rot}\,\bar{M}=\nabla\times\bar{M} \qquad (18.16)$$

deoarece conform teoremei lui Stokes:

$$i_{m_\Gamma}=\oint_\Gamma \bar{M}\cdot\bar{ds}=\oint_\Gamma \text{rot}\,\bar{M}\,\bar{dA} \qquad (18.17)$$

iar

$$i_{m_\Gamma}=\iint_{S_\Gamma}\bar{J}_m\,\bar{dA} \qquad (18.18)$$

b) La suprafața unui corp magnetizat, se poate defini o repartiție superficială de curenți a cărei densitate liniară este egală cu componenta tangențială a magnetizației:

$$J_{ms}=\frac{\Delta i_m}{\Delta s}=M_t. \qquad (18.19)$$

În adevăr, considerînd expresia curentului amperian pentru un contur dreptunghiular Γ (fig. 18.6) de lungime Δs și înălțime neglijabilă, valoarea curentului amperian este conform relației (18.15):

$$\Delta i_m = \oint_{\Gamma} \overline{M}\,\overline{ds} = \int_{A}^{B} \overline{M}\,\overline{ds} = \overline{M}\,\overline{\Delta s} = M_t\,\Delta s \tag{18.20}$$

deoarece $\overline{M}$ are o valoare diferită de zero numai în interiorul corpului magnetizat. Rezultă din relația (18.20):

$$J_{ms} = \frac{\Delta i_m}{\Delta s} = M_t = M \sin\alpha.$$

În exprimarea vectorială, ținînd seama și de sensul acestor curenți, rezultă:

$$\overline{J}_{ms} = \overline{M} \times \overline{n}. \tag{18.21}$$

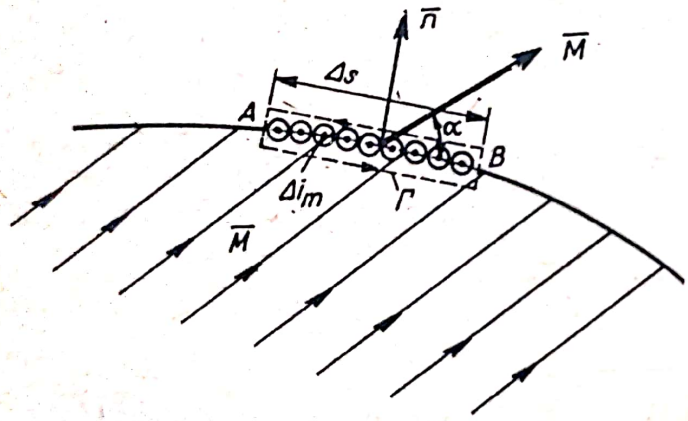


Fig. 18.6.

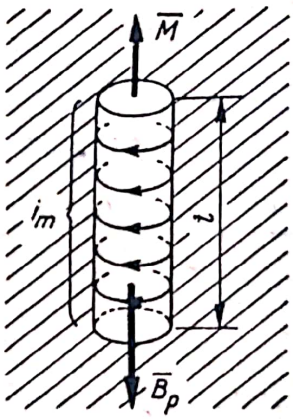


Fig. 18.7.

18.4.3. **Aplicație. Cîmpul magnetic produs de curenții amperieni într-o cavitate cilindrică subțire paralelă cu magnetizația $\overline{M}$** (fig. 18.7). Se consideră această cavitate — canal de înălțime l. Repartiția superficială de curenți amperieni pe pereții cavității va avea densitatea liniară:

$$J_{ms} = M_t = M \tag{18.22}$$

iar curentul amperian total va fi:

$$i_m = M_t l = Ml \tag{18.23}$$

Cîmpul magnetic, datorit repartiției de curenți amperieni circulari localizați pe peretele cilindric al cavității este același cu cîmpul $\overline{B}_v$ produs de un solenoid lung și subțire, liniile de cîmp fiind practic paralele atît în interiorul solenoidului cît și al cavității de forma unui canal.

Conform teoremei lui Ampère, relația (17.30):

$$\oint \frac{\overline{B}_v}{\mu_0}\,\overline{ds} = Ni \tag{18.24}$$

În cazul unui solenoid (v. fig. 21.5), prin aplicarea integralei de-a lungul circuitului Γ, rezultă valoarea inducției magnetice:

$$B_v=\mu_0\frac{Ni}{l} \tag{18.25}$$

și prin urmare inducția magnetică în vidul unui canal, datorită repartiției curenților amperieni este:

$$B_p=\mu_0\frac{i_m}{l}=\mu_0 M. \tag{18.26}$$

Se observă din figura 18—7 că vectorul B_q este dirijat în sens contrar magnetizației M:

$$\overline{B}_p=-\mu_0\overline{M}. \tag{18.27}$$

18.5. Interpretarea microscopică a magnetizației

Fiecare magnet fiind caracterizat prin existența a doi poli magnetici, fizicienii au admis în trecut ipoteza existenței sarcinii magnetice prin analogie cu sarcinile electrice. S-a constatat însă totodată pe cale experimentală că nu se pot despărți polii magnetici pozitivi de cei negativi, cum se despart corpurile încărcate cu sarcini electrice pozitive sau negative. A. M. Ampère a emis ipoteza că, la scară microscopică, echivalența dintre micul corp magnetizat și o buclă de curent corespunde unui fapt fizic, imaginînd *curenții moleculari* închiși în dimensiuni de ordinul moleculei și constituind mici bucle de curent. Fizica modernă a confirmat acest punct de vedere, identificînd curenții moleculari cu mișcarea electronilor pe orbite închise în jurul nucleelor atomilor. Totodată s-a identificat și un moment magnetic propriu (de spin) al electronului (asociabil în anumite limite cu rotația în jurul axei lui proprii) Momentul magnetic al unui atom se compune din suma vectorială a momentelor magnetice datorite atît mișcărilor pe orbită, cît și rotirii în jurul axei proprii (de spin) a particulelor elementare. Dacă orientările acestor momente elementare sînt distribuite dezordonat și se consideră fenomenele macroscopic, magnetizația macroscopică e nulă. Dacă aceste momente capătă o componentă ordonată (sub acțiunea unui cîmp exterior, de exemplu) corpul se magnetizează (din punctul de vedere macroscopic). Experimental se constată că magnetizația temporară este proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic exterior H (v. și par. 19 și 23):

$$\overline{M}_t=\chi_m\overline{H}, \tag{18.28}$$

în care χ_m *este susceptivitatea magnetică*. χ_m poate avea valori pozitive sau negative.

Materialele magnetizabile numai temporar se împart din punctul de vedere al proprietăților lor magnetice în două categorii:

— *materiale diamagnetice* (de exemplu cuprul), pentru care $\chi_m<0$. Moleculele acestor substanțe nu au inițial moment magnetic (substanțe nepolare). Ele capătă, printr-un fenomen de inducție electromagnetică, un moment magnetic (cînd sînt aduse într-un cîmp magnetic) de sens opus cîmpului exterior;

— *materiale paramagnetice* (de exemplu aluminiul) pentru care $\chi_m>0$. Moleculele acestor substanțe au un moment magnetic propriu spontan (substanțe polare). Din cauza orientării dezordonate, momentul magnetic total este nul. La aplicarea unui cîmp magnetic exterior, se orientează în direcția cîmpului axelor momentelor magnetice; acestei așezări ordonate i se opune agitația termică. Rezultă o susceptivitate magnetică pozitivă și dependentă de temperatura $\left(\chi_m=\frac{\text{const.}}{T}\right)$

O clasă specială a materialelor paramagnetice o formează *materialele feromagnetice*, pentru care χ_m este pozitiv și foarte mare (par. 23) și care au și magnetizație permanentă.

19. Intensitatea cîmpului magnetic și inducția magnetică în interiorul corpurilor magnetizate

În vid, inducția magnetică $\overline{B}_v$ și intensitatea cîmpului magnetic $\overline{H}_v = \frac{\overline{B}_v}{\mu_0}$ s-au definit cu ajutorul forțelor, respectiv momentelor care acționează asupra unei bucle de curent, relațiile (16.9) și (16.26). Pentru a defini mărimile ce caracterizează cîmpul magnetic din interiorul corpurilor magnetizate se vor folosi raționamente analoge celor utilizate în cazul cîmpului electric (par. 5).

În consecință, se practică în jurul punctului P, în care trebuie studiat cîmpul magnetic, o cavitate vidă (fig. 19.1) și se măsoară inducția magnetică $\overline{B}_{cav}$ în această cavitate[1]. Experimental se constată că oricît de mică ar fi cavitatea, $\overline{B}_{cav}$ depinde de forma și orientarea cavității. În adevăr, prin practicarea unei cavități într-un corp magnetizat, se scoate o porțiune de material magnetizat, ceea ce adaugă la repartițiile de curenți (de conducție și amperieni) existente înainte de practicarea cavității, o repartiție superficială de curenți amperieni pe fața interioară Σ_{cav} a cavității (ca pe orice față de separație a unui corp față de vid).

În general, inducția magnetică din interiorul unei cavități vide (fig. 19.1) poate fi pusă sub forma:

$$\overline{B}_{cav} = \overline{B}_v + \overline{B}_p \tag{19.1}$$

în care $\overline{B}_v$ este inducția magnetică calculată ca în vid, în punctul considerat, în funcție de curenții de conducție și de cei amperieni (echivalenți stării de magnetizație) existenți înainte de practicarea cavității, iar $\overline{B}_p$ este inducția

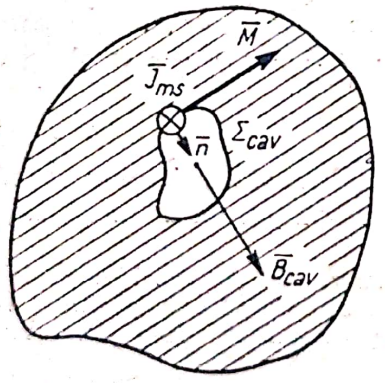


Fig. 19.1.

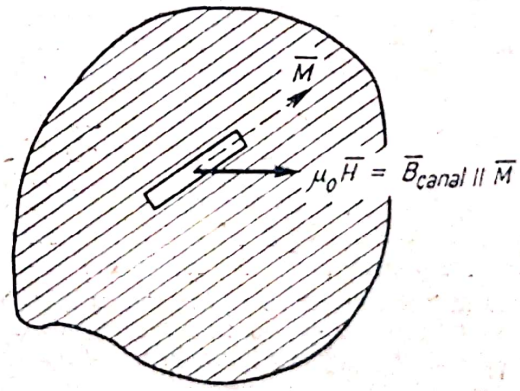


Fig. 19.2.

magnetică datorită curenților amperieni, care apar pe pereții cavității în urma practicării acesteia, cu densitatea liniară $\overline{J}_{ms} = \overline{M} \times \overline{n}$ (în care $\overline{n}$ este normala exterioară față de corp, adică interioară la cavitate).

[1] Se presupune că s-a introdus un corp de probă (o buclă de curent) în cavitate și se măsoară cuplul sau forța care acționează asupra lui.

Pentru definirea cîmpului este suficient să se aleagă două cavități diferite, ca și în cazul cîmpului electrostatic:

— un mic canal drept, foarte scurt, extrem de strîmt în raport cu lungimea sa, cu axa paralelă cu direcția locală a magnetizației;

— o mică fantă, extrem de plată în raport cu celelalte dimensiuni, transversală față de direcția locală a magnetizației.

19.1. Intensitatea cîmpului magnetic $\overline{H}$

Prin definiție *se numește intensitatea cîmpului magnetic într-un punct din interiorul unui corp magnetizat o mărime de stare a cîmpului magnetic numeric egală cu raportul dintre inducția magnetică, care se stabilește în vidul unei cavități de forma unui canal orientat în lungul magnetizației, și permeabilitatea vidului* μ_0 *(fig. 19.2).*

Intensitatea cîmpului magnetic se notează cu $\overline{H}$:

$$\boxed{\overline{H}=\frac{\overline{B}_{canal\,\|\,\overline{M}}}{\mu_0}.} \tag{19.2}$$

Pentru această cavitate, repartiția curenților amperieni pe pereți este ca în figura 18.7, iar inducția magnetică proprie este dată de relația (18.27). Înlocuind această valoare în relația (19.1) se obține:

$$\overline{B}_{cav}=\overline{B}_{canal\,\|\overline{M}}=\overline{B}_v+\overline{B}_p=\overline{B}_v-\mu_0\overline{M}=\mu_0\overline{H}. \tag{19.3}$$

La același $\overline{B}_{cav}$ s-ar fi ajuns dacă în loc de formă de canal, cavitatea ar fi fost de forma unei fante paralele cu vectorul magnetizație $\overline{M}$

O mărime derivată din intensitatea cîmpului magnetic este *tensiunea magnetică*, care se definește ca integrala de linie a vectorului H în lungul unei curbe (C) date, între două puncte date:

$$U_{m12}=\int_{1(c)}^{2}\overline{H}\cdot\overline{ds}=\int_{1(c)}^{2}\overline{H}_t\overline{ds}. \tag{19.4}$$

Unitățile de măsură pentru $\overline{H}$ sînt aceleași ca și pentru $\overline{H}_v$ (par. 17.7). Unitățile de măsură pentru tensiunea magnetică U_m sînt aceleași ca pentru potențialul magnetic V_m (par. 17.7).

19.2. Inducția magnetică $\overline{B}$

Prin definiție *se numește inducție magnetică într-un punct din interiorul unui corp magnetizat o mărime de stare a cîmpului magnetic numeric egală cu*

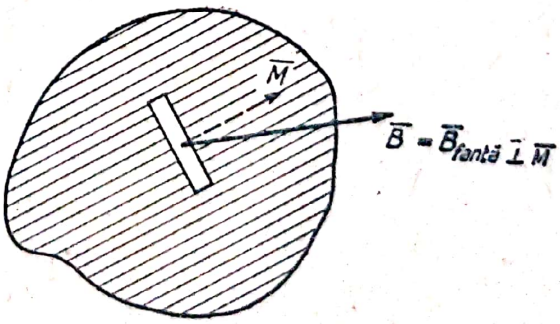


Fig. 19.3.

inducția magnetică din vidul unei cavități de forma unei mici fante transversale față de magnetizație (fig. 19.3):

$$\overline{B}=\overline{B}_{fantă\perp\overline{M}}\,. \tag{19.5}$$

Se observă conform relației (19.1):

$$\overline{B}_{cav}=\overline{B}_{fantă\perp\overline{M}}=\overline{B}_v=\overline{B}, \tag{19.5'}$$

deoarece bazele fantei, fiind normale pe magnetizare, componenta tangențială a acesteia este nulă și nu există pe baze o repartiție superficială de curenți amperieni, adică $\overline{B}_p=0$.

O mărime derivată din inducția magnetică este *fluxul magnetic*, care se definește ca integrala de suprafață a componentei normale a vectorului $\overline{B}$, relativă la o suprafață S_Γ (în general deschisă):

$$\Phi=\iint\limits_{S_\Gamma}\overline{B}\cdot d\overline{A}=\iint\limits_{S_\Gamma}B\cos\alpha\cdot dA=\iint\limits_{S_\Gamma}B_n dA\,. \tag{19.6}$$

Unitățile de măsură pentru $\overline{B}$ sînt aceleași ca și pentru $\overline{B}_v$ (par. 16.2). Unitatea de flux magnetic în sistemul MKSA (raționalizat sau neraționalizat) se numește weber (Wb): 1 Wb$=10^8$ unități CGS em (maxwell) $=\frac{1}{300}$ unități CGS es$=1$ V·s (volt-secundă)$=1$ T.m^2.

Practicarea cavităților constituie numai un mijloc pentru măsurarea mărimilor $\overline{B}$ și $\overline{H}$, care au existență reală o dată cu cîmpul electromagnetic a cărui stare locală o caracterizează, independent de practicarea acestor cavități.

19.3. Legea legăturii dintre inducția magnetică, intensitatea cîmpului magnetic și magnetizație

În paragraf 19.1 și 19.2 s-au definit mărimile $\overline{H}$ și $\overline{B}$ prin măsurarea inducției magnetice din cavitățile canal, respectiv fantă, practicate în corpul magnetizat, epuizîndu-se astfel definirea tuturor mărimilor primitive ale electromagnetismului.

Dacă se apreciază contribuția magnetizației corpului (la cimpul dintr-o cavitate) prin cîmpul curenților amperieni echivalenți cu ea, la crearea fantei, perturbația apărută prin scoaterea materialului magnetizat este minimă, deoarece cîmpul dat de curenții amperieni echivalenți materialului scos este neglijabil în punctul considerat. Invers, perturbația apărută prin practicarea canalului este foarte mare. Toate aceste considerații s-au concretizat în relațiile (19.3) și (19.5), din care rezultă:

$$\mu_0\overline{H}=\overline{B}-\mu_0\overline{M},$$

sau

$$\overline{B}=\mu_0(\overline{H}+\overline{M}) \tag{19.7}$$

relație care se numește *legea legăturii dintre* $\overline{B}$, $\overline{H}$ și $\overline{M}$. Această relație este o lege, deoarece numai verificarea experimentală a consecințelor ei, în cazul

cîmpurilor magnetice variabile în timp, permite să stabilească valabilitatea ei. La demonstraţia precedentă s-a folosit echivalenţa dintre magneţi şi curenţi amperieni, echivalenţă care (fără a apela la această relaţie) se poate demonstra numai în cîmpuri staţionare.

19.4. Recapitularea unor noţiuni şi teoreme de analiză vectorială

Pentru expunerea următoarelor paragrafe din Electrodinamică este necesar să se reamintească cîteva teoreme cunoscute din calculul vectorial (pentru detalii, a se vedea: R. Răduleţ, *Mijloacele matematice ale Electrotehnicii*, Lit. Inst. Căi Ferate, Buc., 1958).

19.4.1. **Teorema gradientului** (v. şi par. 3.3.1). *Gradientul* sau vectorul gradient al unui scalar φ e limita raportului între integrala pe o suprafaţă închisă a scalarului cîmp şi volumul ΔV pe care această suprafaţă Σ îl închide, cînd suprafaţa se strînge către un punct:

$$\operatorname{grad}\ \varphi = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\Sigma} \varphi \bar{n}\, dA \tag{19.8}$$

Componentele gradientului pe cele trei axe sînt:

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{grad}\ \varphi)_x &= \bar{i}\ \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ (\operatorname{grad}\ \varphi)_y &= \bar{j}\ \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ (\operatorname{grad}\ \varphi)_z &= \bar{k}\ \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{19.9}$$

$$\operatorname{grad}\varphi \equiv \bar{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \equiv \nabla\varphi \tag{19.10}$$

$$\text{în care: } \nabla \equiv \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \tag{19.11}$$

este operatorul diferenţial *nabla*.

Dacă se consideră creşterea funcţiunii φ în lungul unui element de arc $\bar{ds}$ de componente dx, dy, dz, se obţine:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz$$

sau, ţinînd seama de expresia gradientului (19.10):

$$d\varphi = \bar{ds} \cdot \operatorname{grad}\varphi \equiv \bar{ds}\nabla\varphi \equiv (\bar{ds}\cdot\nabla)\varphi. \tag{19.12}$$

Considerînd relaţia (19.8) de definiţie a gradientului se obţine *teorema gradientului*, prin extinderea integralei de înveliş la o suprafaţă Σ care închide volumul finit V_Σ:

$$\iiint_{V_\Sigma} \operatorname{grad}\varphi \cdot dv = \iint_{\Sigma} \varphi \bar{n}\, dA, \tag{19.13}$$

în care normala $\bar{n}$ este dirijată spre exteriorul suprafeţei Σ.

Scanned with OKEN Scanner

19.4.2. **Teorema lui Gauss și Ostrogradski** (v. și par. 4.4.2). *Divergența* unui cîmp de vectori $\bar{G}$ este limita raportului între fluxul printr-o suprafață închisă Σ al vectorului cîmp și volumul pe care îl închide cînd suprafața se strînge către un punct:

$$\operatorname{div} \bar{G} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \iint \bar{n}\, \bar{G}\, dA. \tag{19.14}$$

Divergența este un scalar atașat fiecărui punct din cîmpul de vectori; ea formează astfel un cîmp de scalari.

$\iint \bar{n}\, \bar{G}\, dA = \iint \bar{G}\, \overline{dA}$ este fluxul vectorului $\bar{G}$ printr-o suprafață închisă, $\bar{n}$ fiind versorul normalei exterioare. Divergența este deci un flux specific.

Considerînd un volum închis de o suprafață într-un cîmp de vectori $\bar{G}$, se spune că:

— fluxul vectorului $\bar{G}$ „iese" din interiorul suprafeței dacă:

$$\iint_{\Sigma} \bar{G}\, \overline{dA} > 0;$$

— fluxul vectorului $\bar{G}$ „intră" în interiorul suprafeței dacă:

$$\iint_{\Sigma} \bar{G}\, \overline{dA} < 0.$$

În coordonate carteziene (v. par. 24.4.2), divergența are expresia:

$$\operatorname{div} \bar{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = \nabla \cdot \bar{G}. \tag{19.15}$$

Teorema divergenței (teorema lui Gauss și Ostrogradski): Fluxul vectorului cîmp al unui cîmp de vectori continuu și derivabil, prin orice suprafață închisă, e egal cu integrala divergenței lui asupra volumului din interiorul suprafeței:

$$\iiint_{V_\Sigma} \operatorname{div} \bar{G}\, dv = \iint_{\Sigma} \bar{G}\, \overline{dA}. \tag{19.16}$$

19.4.3. **Teorema lui Stokes. Rotorul** (v. și par. 6.6.6). *Componenta scalară după o orientare $\bar{u}_\nu$ a rotorului vectorului cîmp $\bar{G}$* e limita raportului dintre circulația vectorului $\bar{G}$ pe o curbă Γ_ν și aria închisă de curbă, cînd aceasta se strînge către un punct, într-un plan de normală $\bar{u}_\nu$:

$$(\operatorname{rot} \bar{G})_\nu = \lim_{\Delta A_{\Gamma_\nu} \to 0} \frac{1}{\Delta A_{\Gamma_\nu}} \oint_{\Gamma_\nu} \bar{G}\, \overline{ds}. \tag{19.17}$$

Dacă $\bar{u}_n$ este orientarea pentru care această componentă scalară este maximă, rotorul vectorului cîmp $\bar{G}$ este:

$$\operatorname{rot} \bar{G} = \bar{u}_n \lim_{A_n \to 0} \frac{\oint \bar{G}.\, \overline{ds}}{A_n} \tag{19.18}$$

Rotorul este așadar o circulație specifică.

În coordonate carteziene, componenta rotorului pe axa x se calculează alegînd drept curbă Γ un mic dreptunghi într-un plan paralel cu Oyz (fig. 19.4), iar drept sens de integrare sensul asociat după regula burghiului drept cu sensul pozitiv al axei Ox:

$$(\text{rot } G)_x = \lim_{\substack{\Delta A_{yz} \to 0}} \frac{1}{\Delta A_{yz}} \oint_\Gamma \bar{G} \cdot \overline{ds} =$$

$$= \frac{G_z(y+dy)\,dz - G_z(y)\,dz + G_y(z)\,dy - G_y(z+dz)\,dy}{dy\,dz} =$$

$$= \frac{\frac{\partial G_z}{\partial y} dy\; dz - \frac{\partial G_y}{\partial z} dz\; dy}{dy\,dz} = \frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}. \tag{19.19}$$

În mod similar se obțin și celelalte componente ale rotorului:

$$(\text{rot } G)_y = \frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \tag{19.20}$$

$$(\text{rot } G)_z = \frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}.$$

În consecință, rotorul poate fi scris astfel:

$$\text{rot } \bar{G} = (\text{rot } \bar{G})_x \bar{i} + (\text{rot } \bar{G})_y \bar{j} + (\text{rot } \bar{G})_z \bar{k} \equiv \nabla \times \bar{G}. \tag{19.21}$$

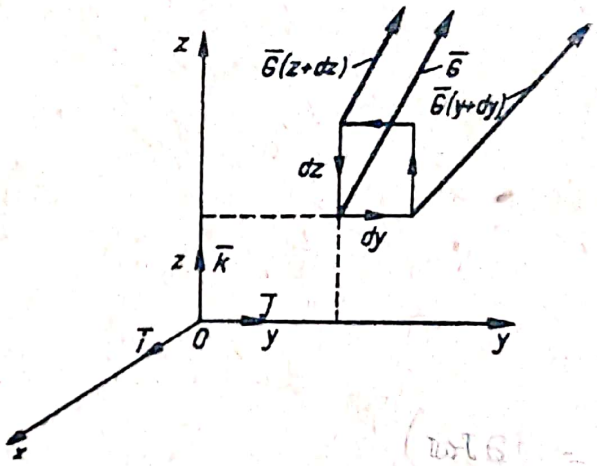


Fig. 19.4.

Teorema lui Stokes: Integrala de linie a vectorului $\bar{G}$ pe o curbă închisă Γ (circulația) este egală cu fluxul rotorului său, prin orice suprafață mărginită de curba Γ:

$$\oint_\Gamma \bar{G} \cdot \overline{ds} = \iint_{S_\Gamma} \text{rot } \bar{G} \cdot \overline{dA}. \tag{19.22}$$

19.4.4. **Identități.** Ținînd seama de operațiile de diferențiere *div* și *rot* asupra unui vector și *grad* asupra unui scalar, rezultă următoarele identități vectoriale:

a) $$\text{rot grad } \varphi \equiv 0 \tag{19.23}$$

b) $$\text{div grad } \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta \varphi \tag{19.24}$$

în care:

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ este } \textit{operatorul lui Laplace.}$$

c) $$\text{div rot } \bar{G} \equiv 0 \tag{19.25}$$

d) $$\text{rot rot } \bar{G} = \text{grad div } \bar{G} - \Delta G \tag{19.26}$$

În cele ce urmează (par. 20, 21, 22, 23) vor fi prezentate succesiv acele relații fundamentale ale cîmpului electromagnetic care nu au fost încă enunțate, deoarece se referă la fenomene magnetice sau la stări variabile în timp, și anume: trei legi generale (legea fluxului magnetic, legea circuitului magnetic, legea inducției electromagnetice) și o lege de material (legea magnetizației temporare). Sistemul complet al legilor electromagnetismului va fi prezentat în paragraful 29.

20. Legea fluxului magnetic

20.1. Forma integrală a legii

Se constată experimental că oricare ar fi modul de producere al cîmpului magnetic, este totdeauna valabilă următoarea lege generală:

Fluxul magnetic (fluxul vectorului inducție magnetică) printr-o suprafață închisă este nul, oricare ar fi forma suprafeței și în orice moment:

$$\boxed{\Phi_\Sigma = 0} \quad \text{sau} \quad \iint_\Sigma \overline{B} \cdot \overline{dA} = 0. \tag{20.1}$$

Această lege exprimă faptul că nu există sarcini magnetice (v. par. 17.6.3) analoge sarcinilor electrice care determină fluxul electric prin suprafețe închise (v. par. 6.6). În cazul cîmpului magnetic staționar, legea poate fi demonstrată și verificată pentru cazuri particulare, în mod similar verificării făcute pentru fluxul inducției magnetice în vid (par. 17.6.2.). Conform acestei legi, dacă intră flux magnetic printr-o parte a unei suprafețe închise, același flux iese în același moment prin altă parte a ei. Legea fluxului magnetic se mai poate enunța și sub forma:

Fluxul magnetic are aceeași valoare prin toate suprafețele *deschise*, care au același contur, adică el depinde numai de acest contur și nu de forma suprafeței.

20.2. Formele locale ale legii

În domenii de continuitate (și netezime) ale funcției de punct $\overline{B}(r)$, prin aplicarea teoremei lui Gauss și Ostrogradski relația (20.1) devine

$$\iint_\Sigma \overline{B}\, \overline{dA} = \iiint_{V_\Sigma} \operatorname{div} \overline{B}\, dv = 0, \tag{20.2}$$

de unde rezultă (volumul V_Σ fiind arbitrar):

$$\boxed{\operatorname{div} \overline{B}=0.} \tag{20.3}$$

În fiecare moment și în fiecare loc divergența inducției magnetice este nulă. Inducția magnetică este un *vector-cîmp solenoidal* (fără surse).

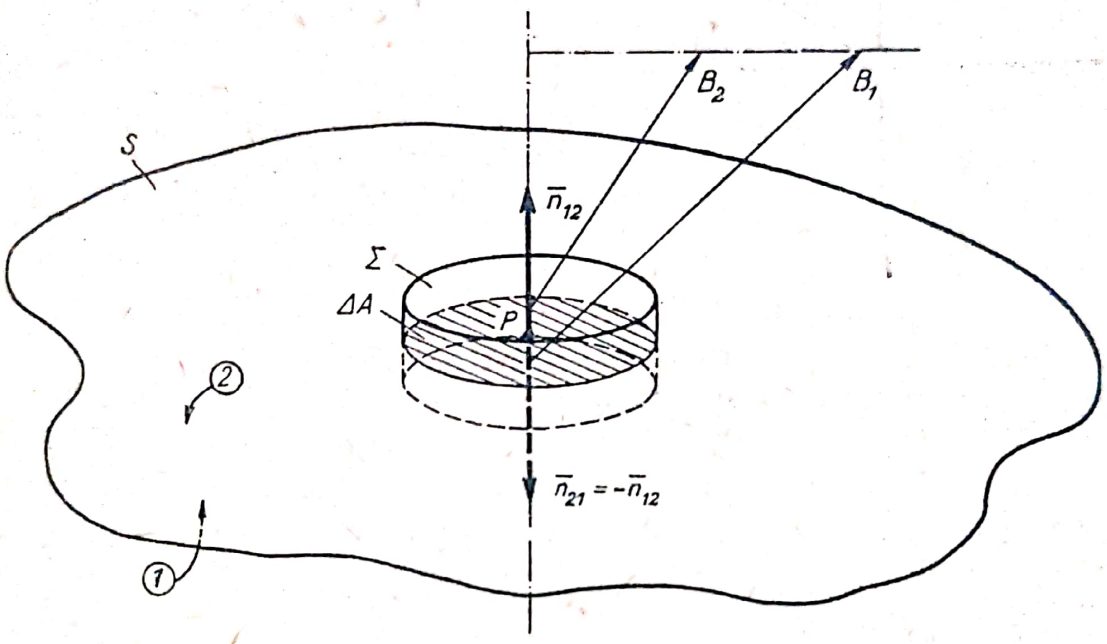


Fig. 20.1.

În cazul unei suprafețe de discontinuitate S, se aplică forma integrală a legii fluxului magnetic unei suprafețe închise de forma unui mic cilindru extrem de plat, cu bazele ΔA și de înălțime foarte mică prin comparație cu dimensiunile bazelor (fig. 20.1). Se obține:

$$\overline{B}_1\overline{n}_{21}\,\Delta A+\overline{B}_2\overline{n}_{12}\,\Delta A=0 \text{ sau}$$

$$\operatorname{div}_s \overline{B}=\overline{n}_{12}(\overline{B}_2-\overline{B}_1)=0, \text{ adică } (B_n)_1=(B_n)_2 \tag{20.4}$$

dacă se raportează la același sens al normalei ambele componente, a lui $\overline{B}_1$ și a lui $\overline{B}_2$.

Componentele normale ale inducției magnetice trec continuu prin orice suprafață de discontinuitate.

Deoarece $\overline{M}$ este diferit în cele două medii, din relația (19.7) rezultă că nu se va conserva componenta normală a intensității cîmpului magnetic.

Aplicație. Verificăm forma locală (20.3) a legii pentru cîmpul unui conductor rectiliniu, infinit de lung, străbătut de curentul i (fig. 20.2), în vid.

Componentele vectorului $\overline{B}_v=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\overline{u}_t$ pe cele două axe sînt: $B_{vz}=0$

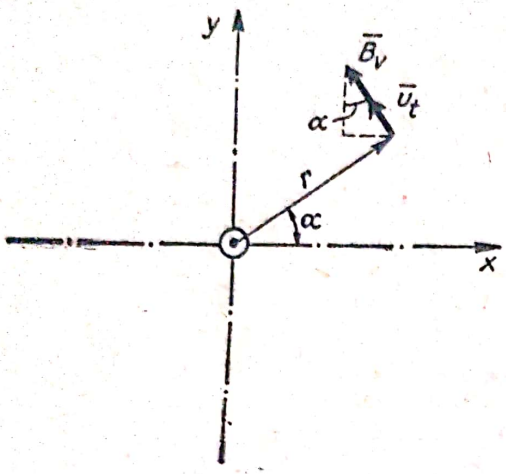


Fig.20.2.

$$B_{vx}=-\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\sin\alpha=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$B_{vy}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\alpha=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

Deci:

$$\operatorname{div}\overline{B}_v=\frac{\partial B_{vx}}{\partial x}+\frac{\partial B_{vy}}{\partial y}+\frac{\partial B_{vz}}{\partial z}$$

$$=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]=$$

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[-\frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]=0$$

20.3. Linii și tuburi de flux magnetic

Din legea fluxului magnetic rezultă că liniile vectorului inducție $\overline{B}$ nu pot să înceapă sau să se termine într-un punct din cîmp (deoarece fluxul, printr-o suprafață închisă ce se strînge către acel punct, ar fi nenul). Liniile pot fi închise (ca în cazul conductorului foarte lung), pot începe și se pot termina la infinit, sau se pot înfășura asimptotic în jurul unor curbe limită sau pe anumite suprafețe (linii practic închise).

Un ansamblu de linii ale vectorului inducție magnetică ce se sprijină pe o anumită curbă închisă constituie un *tub de flux magnetic*.

Aplicînd legea fluxului magnetic unei porțiuni de tub de flux limitată de două secțiuni de bază A_1 și A_2 rezultă că tuburile de flux magnetic sînt conservative: în lungul lor fluxul magnetic are aceeași valoare (fig. 20.3): $\Phi_1=\Phi_2$ (deoarece prin suprafața laterală a tubului fluxul este nul, vectorul $\overline{B}$ fiind tangențial, fluxul care intră la un capăt al tubului este egal cu fluxul care iese la celălalt capăt).

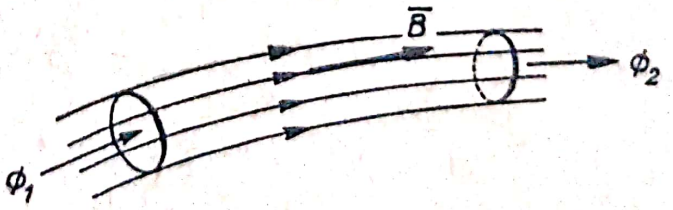


Fig. 20.3.

Tot cîmpul se poate imagina împărțit în tuburi de flux magnetic de secțiuni suficient de mici și de flux egal cu unitatea și se poate conveni ca fiecare tub să fie reprezentat printr-o linie magnetică care să coincidă cu axa tubului. Tuburile de flux la care fluxul prin secțiunea transversală este egal cu unitatea se numesc *tuburi-unitate*, iar liniile de cîmp care le reprezintă *linii-unitate*.

20.4. Potențialul magnetic vector

Condiția div $\overline{B}=0$, care exprimă principiul continuității fluxului magnetic, este identic satisfăcută dacă se exprimă vectorul inducției $\overline{B}$ sub forma rotorului unui vector auxiliar $\overline{A}$:

$$\overline{B}=\operatorname{rot}\overline{A} \tag{20.5}$$

deoarece $$\operatorname{div}\overline{B}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\equiv$$

$$\equiv\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{A}\equiv 0.$$

Mărimea $\overline{A}$ se numește *potențial magnetic vector* al cîmpului magnetic, iar existența acestei mărimi este condiționată de valabilitatea legii fluxului magnetic. Potențialul vector poate fi utilizat pentru a calcula fluxul magnetic. Din relația (19.6) și (20.5) se obține:

$$\Phi_{S_\Gamma}=\iint\limits_{S_\Gamma}\overline{B}\cdot\overline{dA}=\iint\limits_{S_\Gamma}\operatorname{rot}\overline{A}\cdot\overline{dA}\,^{1}$$

sau, conform teoremei Stokes, relația (19.22):

$$\Phi_{S_\Gamma}=\oint\limits_{\Gamma}\overline{A}\;\overline{ds} \tag{20.6}$$

Fluxul magnetic care trece prin suprafața S_Γ este egal cu integrala de linie a potențialului vector de-a lungul conturului închis Γ, care limitează această suprafață (fig. 20.4).

La calculul fluxului magnetic cu ajutorul integralei $\iint_{S_\Gamma}\overline{B}\,\overline{dA}$, este necesar să se determine valorile vectorului $\overline{B}$ în toate punctele suprafeței S_Γ. La calculul fluxului magnetic cu ajutorul potențialului vector $\overline{A}$ este suficient să se cunoască valorile lui pe conturul care limitează această suprafață, înlocuind integrarea pe suprafață printr-o integrală de contur, ceea ce uneori poate fi foarte util. Expresia (20.6) pune în evidență faptul că fluxul magnetic depinde numai de conturul Γ la care se referă.

Denumirea de „potențial“ vector s-a dat prin analogie cu potențialul scalar. În adevăr, printr-o derivare spațială a potențialului scalar se obține intensitatea cîmpului ($\overline{E}=-$grad V, în electrostatică). Tot printr-o operație de derivare spațială vectorială a lui $\overline{A}$ se obține vectorul inducție magnetică $\overline{B}$ ($\overline{B}=\operatorname{rot}\overline{A}$).

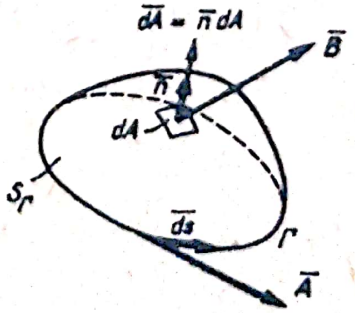


Fig. 20.4.

[1] A se observa că, în această relație, $\overline{A}$ reprezintă potențialul vector, iar $\overline{dA}$ elementul de arie.

Potențialul vector este o mărime vectorială de calcul, care nu are o semnificație fizică nemijlocită. Se folosește însă pentru a simplifica tratarea matematică a multor probleme fizice. El e univoc definit *numai* după ce se alege div $\bar{A}$ și originea potențialelor (punctul în care $\bar{A}=0$).

21. Legea circuitului magnetic

21.1. Forma integrală a legii

În orice moment, tensiunea magnetomotoare u_{mm_Γ} *de-a lungul oricărei curbe închise* Γ *este egală cu suma a doi termeni: primul este solenația* θ_{S_Γ}, *corespunzătoare curenților care străbat o suprafață deschisă oarecare* S_Γ *mărginită de curba* Γ; *al doilea termen este derivata în raport cu timpul a fluxului electric* Ψ_{S_Γ} *prin aceeași suprafață* S_Γ *și se numește curent de deplasare:*

$$\boxed{u_{mm_\Gamma}=\theta_{S_\Gamma}+\frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}}^{1} \qquad (21.1)$$

Tensiunea magnetomotoare (t.m.m.) este integrala de linie pe o curbă închisă a intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$: $u_{mm_\Gamma}=\int_\Gamma \bar{H}\overline{ds}$; *solenația* este curentul de conducție total, adică suma algebrică a curenților din conductoarele care străpung suprafața considerată: $\theta_{S_\Gamma}=\Sigma Ni=\iint_{S_\Gamma}\bar{J}d\bar{A}$. Se utilizează termenul „solenație", în loc de intensitatea curentului electric de conducție, deoarece ultima mărime caracterizează un conductor, pe cînd solenația este definită referitor la o suprafață care poate fi străbătută de mai multe conductoare sau de același conductor de mai multe ori (de N ori).

Deoarece *fluxul electric* este $\Psi_{S_\Gamma}=\iint_{S_\Gamma}\bar{D}\cdot\overline{dA}$, legea circuitului magnetic se scrie explicit:

$$\boxed{\oint_\Gamma \bar{H}\cdot\overline{ds}=\iint_{S_\Gamma}\bar{J}\cdot d\bar{A}+\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\bar{D}\cdot\overline{dA}.} \qquad (21.2)$$

Dacă se alege un anumit sens pozitiv al intensității curentului electric prin suprafața deschisă S_Γ și acestuia i se asociază după regula burghiului drept

[1] În sisteme de unități neraționalizate se schimbă unitățile de tensiune magnetomotoare și de flux electric și legea se scrie:

$$u'_{mm_\Gamma}=4\pi\theta_{S_\Gamma}+d\Psi'_{S_\Gamma}/dt \qquad (21.1')$$

un sens pozitiv al t.m.m. pe conturul Γ al suprafeței (fig. 21.1), se constată că intensităților pozitive le corespund t.m.m. pozitive și invers. Deci $d\bar{A}$ și $\bar{ds}$ sînt asociați prin regula burghiului drept în forma (21.2) a legii. Mai trebuie observat că Γ și S_Γ sînt arbitrare și că trebuie considerate drept curbe și suprafețe atașate corpurilor în mișcarea lor.

Deoarece circulația vectorului $\bar{H}$ în lungul unei curbe închise este diferită de zero, rezultă că (în cazul general), vectorul-cîmp $\bar{H}$ *nu este* derivabil dintr-un potențial scalar, iar *tensiunea magnetică* $u_m = \int_A^B \bar{H}\,\bar{ds}$, între două puncte *depinde de drum* (adică de curba de integrare de la A la B).

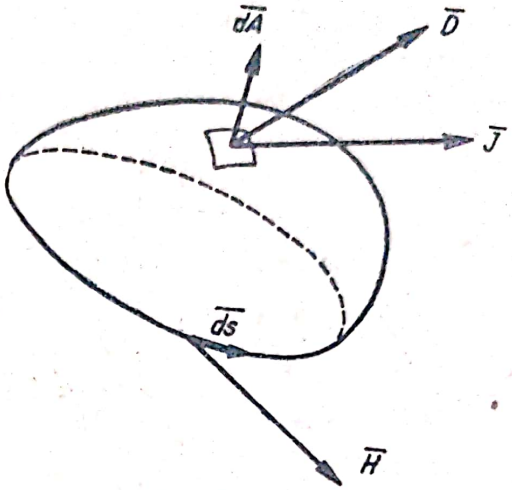


Fig. 21.1

21.2 Justificarea legii circuitului magnetic

Justificarea legii exprimate prin relația (21.2) se poate face în cazuri particulare.

Dacă, de exemplu, în regim staționar se consideră un conductor rectiliniu, filiform, infinit, parcurs de curentul i, intensitatea cîmpului magnetic în vid $\bar{H}_v$ la distanța r este dată de relația (17.3):

$$H_v = \frac{i}{2\pi r}. \tag{21.3}$$

Aplicînd legea circuitului magnetic pe o curbă Γ circulară, care coincide cu o linie de cîmp de rază r, rezultă:

$$\oint \bar{H}_v \bar{ds} = \frac{i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = i, \tag{21.4}$$

adică un caz particular al relației (21.2).

În cazul mai general, al unor circuite de formă arbitrară parcurse de curent continuu și situate în vid, s-a constatat în paragraful 17.6.1 că este valabilă *teorema lui Ampère*, conform căreia:

$$\oint_\Gamma \bar{H} d\bar{s} = \Sigma Ni = 0_S, \tag{21.5}$$

adică o formă particulară a legii (21.2), cînd $\frac{d\Psi}{dt} = 0$.

Această lege este deci complet justificată în regim staționar de proprietățile cîmpului magnetic a cărui expresie (formula Biot-Savart-Laplace) a fost obținută din analiza datelor experimentale. Se va arăta (în par. 21.3) că din această lege a circuitului magnetic formula lui Biot-Savart-Laplace rezultă ca teoremă.

Este meritul lui J. C. Maxwell de a fi arătat (în 1862) că teorema lui Ampère nu mai poate fi valabilă în regim nestaționar, fiind incompatibilă cu legea conservării sarcinii, și că membrul drept al relației (21.5) trebuie completat aditiv cu un termen: curentul de deplasare $\frac{d\Psi}{dt}$ prin aceeași suprafață S_Γ. Verificarea experimentală a acestei ipoteze s-a făcut atunci cînd H. Hertz (în 1888) a pus în evidență existența undelor electromagnetice, prevăzute de Maxwell ca o consecință a teoriei sale.

În mod simplificat, justificarea teoretică a necesității introducerii curentului de deplasare, alături de curentul de conducție (solenație), în expresia tensiunii magnetomotoare (21.2), se poate face considerînd un circuit de curent variabil în care este intercalat un condensator plan (v. fig. 21.2).

Dacă Γ e o linie de cîmp magnetic, aproximativ circulară, situată în dreptul condensatorului și dacă S_Γ e o suprafață deschisă sprijinită pe Γ și, trecînd printre armături (prin dielectric), $S_{1\Gamma}$ o suprafață deschisă sprijinită pe Γ și intersectînd conductorul 1 (parcurs de curentul i_1 (t) și conectat la armătura de sarcină q) și $S_{2\Gamma}$ o suprafață deschisă sprijinită pe Γ și intersectînd conductorul 2 (parcurs de curentul i_2 (t) și conectat la armătura de sarcină — q), din aplicarea legii conservării sarcinii (12.4) rezultă (cu sensurile indicate în figură):

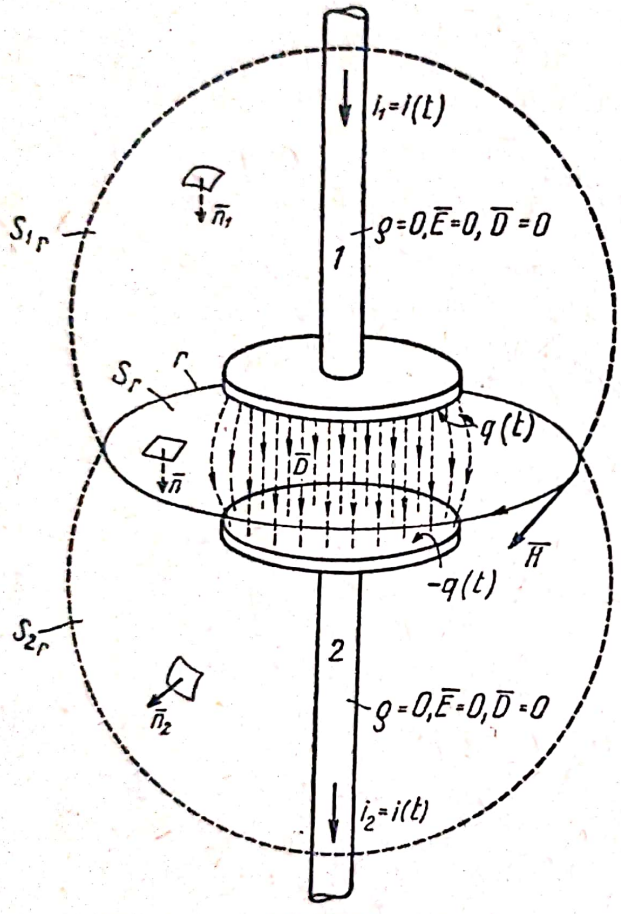


Fig. 21.2.

$i=i_1=\dfrac{dq}{dt}$ — dacă legea se aplică suprafeței închise constituite de $S_{1\Gamma}$ și S_Γ reunite;

$i_2=-\dfrac{d}{dt}(-q)$ — dacă legea se aplică suprafeței închise constutite de S_Γ și $S_{2\Gamma}$ reunite,

adică

$$i_2=i_1=i(t)=\frac{dq}{dt}.$$

Curentul de conducție poate fi deci diferit de zero în conductorul întrerupt de condensator (dacă $\dfrac{dq}{dt}\neq 0$, adică dacă regimul e nestațional) și are aceeași valoare în ambele porțiuni (1 și 2), de-o parte și de alta a condensatorului. Se exprimă plastic acest rezultat spunîndu-se că, în regim nestațional, curentul electric (variabil în timp) „trece" prin condensator. În realitate, dielectricul condensatorului fiind considerat perfect izolant, nu există curent de conducție prin acest dielectric, ci curentul de conducție variabil din conductoarele de legătură (1 și 2) încarcă și descarcă armăturile condensatorului.

Dacă se aplică acum teorema lui Ampère (21.5) liniei de cîmp Γ, considerînd pe rînd pentru calculul curentului de conducție (al solenației) suprefețele $S_{1\Gamma}$ și S_Γ se obține un rezultat contradictoriu

$$0<\oint_\Gamma \bar{H}d\bar{s}=\begin{cases} i \text{ dacă se ia } S_{1\Gamma} \text{ care intersectează conductorul;} \\ 0 \text{ dacă se ia } S_\Gamma \text{ trecînd prin dielectric.} \end{cases}$$

Experiența însă verifică existența cîmpului magnetic, în această situație, și anume cu valori practic neschimbate față de cazul cînd prin conductor ar trece un curent continuu de aceeași intensitate (dacă viteza de variație a curentului nu e prea înaltă). Experiența verifică, deci, prima alternativă și contrazice pe cea de-a doua: teorema lui Ampère nu e valabilă, cel puțin pentru suprafețele sprijinite pe curba Γ și care trec prin dielectricul condensatorului. Maxwell a căutat atunci să completeze membrul doi al acestei teoreme (21.5) cu un termen suplimentar, care — fiind neglijabil în conductori — să fie echivalent curentului electric

de conducţie, din punctul de vedere al producerii cîmpului magnetic în dielectrici. Cu alte cuvinte, a căutat o nouă „formă de curent" care să străbată dielectricul, prelungind astfel între armăturile condensatorului curentul electric de conducţie din conductoarele de legătură ale acestuia, astfel încît circuitul electric să se închidă chiar şi în regim variabil.

În experienţa descrisă, se poate însă constata că din legea fluxului electric (6.6) aplicată suprafeţei închise $(S_\Gamma + S_{1\Gamma})$ şi considerînd nulă inducţia electrică în conductor (presupus deci perfect, cu $\rho = 0$, $\bar{E} = \rho\bar{J} = 0$ şi $\bar{D} = \varepsilon\bar{E} = 0$), rezultă:

$$\iint \bar{D}\,d\bar{A} = \iint_{S_\Gamma} \bar{D}\,d\bar{A} = \Psi_{S_\Gamma} = q \quad \text{şi deci}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}. \tag{21.6}$$

O mărime care poate înlocui curentul de conducţie în dielectric rezultă astfel a fi *viteza de variaţie a fluxului electric*, numită de Maxwell *curent de deplasare*[1].

În adevăr, completînd teorema lui Ampère cu acest termen, adică ajungînd la forma generală (21.1) a legii circuitului magnetic şi aplicînd-o în experienţa descrisă, contradicţia relevată dispare, deoarece se obţine:

$\oint \bar{H}\,\bar{ds} = i$ — cînd se aplică suprafeţei $S_{1\Gamma}$ (sau $S_{2\Gamma}$) nestrăbătută practic de curent de deplasare — şi $\oint_\Gamma \bar{H}\,\bar{ds} = \frac{d\Psi}{dt} = i$ (conform cu 21.6) — cînd se aplică suprafeţei S_Γ nestrăbătută practic de curent de conducţie.

21.3. Forma integrală dezvoltată a legii

În cazul mediilor în mişcare, calculul derivatei fluxului electric în raport cu timpul trebuie făcut considerînd suprafaţa S_Γ antrenată de corpuri în mişcarea lor. Se obţine în felul acesta o formă integrală dezvoltată a legii circuitului magnetic.

21.3.1 Derivata de flux. Se consideră în general un cîmp de vectori cu vectorul-cîmp $\bar{G}(\bar{r}, t)$ al cărui flux se calculează prin suprafeţe mobile S_Γ, ale căror puncte sînt în mişcare în raport cu sistemul de coordonate, punctele de raze vectoare $\bar{r}$ avînd vitezele $\bar{v}(\bar{r}, t)$.

Se numeşte derivată de flux a vectorului-cîmp $\bar{G}(\bar{r}, t)$ în raport cu timpul, la vitezele $\bar{v}$ date ale punctelor de raze vectoare $\bar{r}$, un nou vector-cîmp $\frac{d_f\bar{G}}{dt}$, al cărui flux prin orice suprafaţă deschisă S_Γ este egală cu derivata (substanţială) în raport cu timpul a fluxului vectorului $\bar{G}$ prin suprafaţa mobilă S_Γ. Rezultă că:

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \bar{G}\cdot d\bar{A} = \iint_{S_\Gamma} \frac{d_f\bar{G}}{dt}\,d\bar{A} = \underbrace{\iint_{S_\Gamma} \frac{\partial\bar{G}}{\partial t}\,d\bar{A}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left[\iint_{S_\Gamma} \bar{G}\cdot d\bar{A}\right]_{\bar{G}}}_{\text{II}} \tag{21.7}$$

Termenul I este derivata fluxului în raport cu timpul, dacă suprafaţa S_Γ ar fi imobilă în raport cu sistemul de referinţă considerat; termenul II este derivata fluxului, dacă vectorul-cîmp $\bar{G}$ din diverse puncte fixe, în raport cu sistemul de coordonate considerat,

[1] Această denumire a fost dată de Maxwell în baza unei anumite interpretări microscopice mecaniciste a acestui curent, interpretare care, cel puţin în vid, nu s-a dovedit corectă şi prezintă numai un interes istoric.

Scanned with OKEN Scanner

nu ar depinde de timp (ar avea valorile sale din momentul t) și numai suprafața S_Γ ar fi mobilă.

Efectuînd calculele intermediare[1] se obține:

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\overline{G}\cdot\overline{dA}=\iint_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}+\bar{v}\,\mathrm{div}\,\overline{G}+\mathrm{rot}\,(\overline{G}\times\bar{v})\right]\overline{dA}. \tag{21.8}$$

21.3.2. **Curentul de convecție și curentul Roentgen.** Aplicînd acest rezultat în cazul legii circuitului magnetic (21.2) se obține forma integrală dezvoltată a legii:

$$\oint_\Gamma\overline{H}\cdot\overline{ds}=\iint_{S_\Gamma}\bar{J}\cdot\overline{dA}+\iint_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\overline{dA}+\iint_{S_\Gamma}(\rho_v\bar{v})\overline{dA}+\iint_{S_\Gamma}\mathrm{rot}(\overline{D}\times\bar{v})\overline{dA} \tag{21.9}$$

în care s-a pus $\mathrm{div}\,\overline{D}=\rho_v$ [relația (6.13)], conform legii fluxului electric.

Relația (21.9) se poate scrie:

$$u_{mm_\Gamma}=\theta_{S_\Gamma}+i_{D_{S_\Gamma}}+i_{v_{S_\Gamma}}+i_{R_{S_\Gamma}}. \tag{21.10}$$

În relația (21.9) sau (21.10), contribuția curentului electric de conducție, reprezentată de solenația θ_{S_Γ}, apare completată cu trei termeni noi:

$$i_{D_{S_\Gamma}}=\iint_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\overline{dA}\ \text{numit curentul de deplasare propriu-zis.} \tag{21.11}$$

$$i_{v_{S_\Gamma}}=\iint_{S_\Gamma}\bar{v}\rho_v\overline{dA}\ \text{numit curentul de convecție;} \tag{21.12}$$

$$i_{R_{S_\Gamma}}=\iint_{S_\Gamma}\mathrm{rot}(\overline{D}\times\bar{v})\overline{dA}\ \text{numit curentul Roentgen (teoretic),} \tag{21.13}$$

Experiența care a pus în evidență efectele magnetice ale acestui curent de convecție se datorește lui H. A. Rowland. El a rotit cu viteză mare o placă metalică încărcată și izolată, obținînd efecte magnetice, de exemplu, rotirea unui mic ac magnetic.

Experiențele lui Roentgen și Eichenwald, care au încercat să pună în evidență cîmpul magnetic al unui corp polarizat în mișcare, au dus la alte rezultate. Densitatea de curent care corespundea efectelor magnetice obținute experimental nu era rot $(\overline{D}\times\bar{v})$ ca în relația (21.13), ci rot $[(\overline{D}-\varepsilon_0\overline{E})\times\bar{v}]$ = rot $(\overline{P}\times\bar{v})$. Experiența a consistat în rotirea unui dielectric între armăturile fixe ale unui condensator încărcat. Această nepotrivire dintre teorie și experiență nu prezintă interes în tehnică și a fost explicată complet de teoria relativității, a cărei prezentare depășește cadrul acestui curs.

Se observă că în cazul corpurilor imobile ($\bar{v}=0$), legea circuitului magnetic are forma:

$$\oint_\Gamma\overline{H}\cdot\overline{ds}=0_{S_\Gamma}+\iint_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\overline{dA}. \tag{21.14}$$

[1] v. R. Rădulet, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, p. 473—476.

Se numește *regim cvasistaționar* regimul variabil în care se poate neglija curentul de deplasare în legea circuitului magnetic, peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor.

21.4. Formele locale ale legii

În domenii de continuitate (netezime) a proprietăților fizice, aplicînd teorema lui Stokes membrului din stînga al relației (21.9), rezultă:

$$\iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \bar{H} \cdot d\bar{A} = \iint_{S_\Gamma} \left[\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho_v \bar{v} + \operatorname{rot} (\bar{D} \times \bar{v}) \right] d\bar{A} . \qquad (21.15)$$

Forma locală a legii circuitului magnetic se deduce din relația (21.15), care trebuie să fie verificată oricare ar fi S_Γ:

$$\boxed{\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho_v \bar{v} + \operatorname{rot} (\bar{D} \times \bar{v}).} \qquad (21.16)$$

Dacă legea se aplică unui sistem de corpuri imobile ($\bar{v}=0$), se obține din (21.16) *prima ecuație a lui Maxwell*:

$$\boxed{\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}} \qquad (21.17)$$

În regimul staționar (sau cvasistaționar), relația (21.17) are o formă simplă:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}. \qquad (21.18)$$

Rotorul intensității cîmpului magnetic este egal cu densitatea curentului electric.

Numai în regiunile din cîmpul magnetic în care densitatea curentului este nulă, de ex. în vid, rotorul e nul și se poate defini un potențial magnetic scalar. În general însă, cîmpul magnetic *nu* e un cîmp potențial.

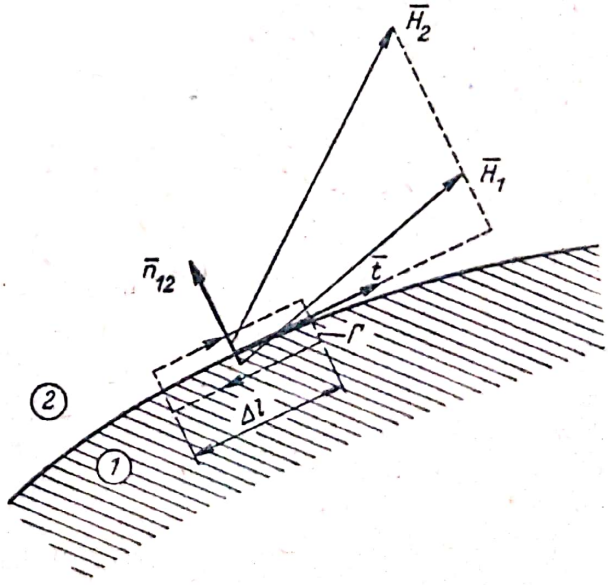


Fig. 21.3.

În cazul suprafețelor de discontinuitate (fig. 21.3) dintre două medii magnetice diferite (*1* și *2*), aplicînd legea circuitului magnetic în lungul micului contur dreptunghiular Γ, rezultă:

$$\oint_\Gamma \bar{H} \cdot d\bar{s} = \bar{H}_2 \, \Delta l \cdot \bar{t} + \bar{H}_1 \, \Delta l (-\bar{t}) = 0$$

(în cazul cînd nu există curenți superficiali), E fiind un versor tangent la suprafață, în planul conturului Γ.

În consecință:

$$(H_t)_1=(H_t)_2, \tag{21.19}$$

ceea ce reprezintă conservarea componentelor tangențiale ale intensității cîmpului magnetic la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, în cazul în care nu există o pînză superficială de curenți.

21.5. Aplicații

21.5.1. Cîmpul magnetic într-un tor (inel) bobinat uniform cu o înfășurare de N spire prin care trece curentul continuu i (fig. 21.4)

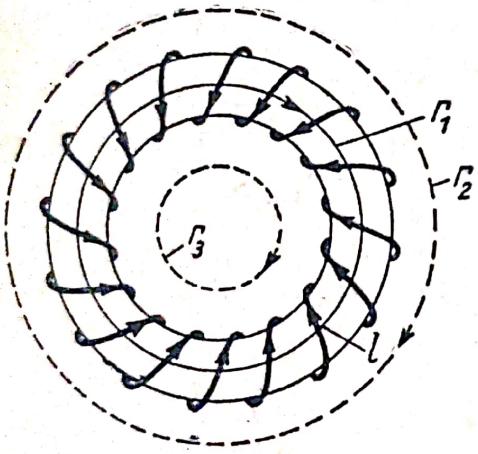


Fig. 21.4.

Din motive de simetrie, liniile de cîmp sînt circulare și, aplicînd legea circuitului magnetic pe conturul Γ_1 al unei linii de cîmp interioare de lungime (medie) l, se obține:

$$\oint_{\Gamma_1} \overline{H} \cdot \overline{ds} = Ni, \tag{21.20}$$

(deoarece orice suprafață sprijinită pe curba Γ_1 e împunsă de N ori de conductorul înfășurării de curent i).

Dar $\overline{H} \parallel \overline{ds}$ și din considerente de simetrie $|\overline{H}|$ este constant ca valoare în orice punct al conturiului. Deci:

$$H \cdot l = N i$$

sau

$$H=\frac{Ni}{l}. \tag{21.21}$$

Dacă dimensiunile secțiunii transversale ale torului sînt mici, în comparație cu lungimea l, H se consideră același în orice punct al secțiunii. Cîmpul în afara bobinajului este nul. Într-adevăr, efectuînd integralele de linie ale vectorului $\overline{H}$ pe contururile Γ_2 și Γ_3, ale căror suprafețe S_{Γ_2} și S_{Γ_3} nu sînt străbătute de curent, sau sînt străbătute de curenți dar cu o solenație totală nulă, rezultă $\overline{H}_{exterior}=0$.

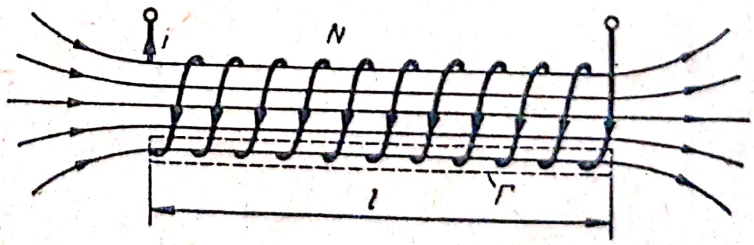


Fig. 21.5.

În cazul în care raza torului tinde spre infinit, el se transformă într-un solenoid drept infinit lung, pentru care valoarea cîmpului magnetic rămîne cea dată de relația (21.21). În general, în cazul unui solenoid drept, de lungime foarte mare față de dimensiunile transversale și regulat bobinat, intensitatea cîmpului magnetic din interior are practic valoarea:

$$H=\frac{N}{l}i = N_s i, \tag{21.22}$$

în care N_s este numărul de spire pe unitatea de lungime (fig. 21.5).

21.5.2. **Cîmpul magnetic al unei particule electrizate în mişcare lentă. Comparaţie cu formula Biot-Savart-Laplace.** În jurul particulei electrizate mobile în vid se produce un cîmp magnetic ale cărui linii de cîmp trebuie să fie, din motive de simetrie, nişte cercuri Γ cuprinse într-un plan perpendicular pe vectorul vitezei $\overline{v}$, şi care au centrele pe dreapta suport a vectorului $\overline{v}$ (fig. 21.6).

Integrala de linie a vectorului $\overline{H}$, de-a lungul uneia dintre liniile de cîmp de rază r este:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = \oint_{\Gamma} H \cdot ds = H \oint_{\Gamma} ds = 2\pi r \cdot H = 2\pi RH \sin\alpha \qquad (21.23)$$

deoarece H = ct. de-a lungul liniei de cîmp în cazul considerat.

Conform legii circuitului magnetic, $\oint \overline{H} \cdot \overline{ds}$ trebuie să fie egală cu curentul de deplasare care trece printr-o suprafaţă S_Γ, sprijinită pe curba Γ, deoarece, în acest caz, nu există solenaţie (curent de conducţie):

$$\oint \overline{H} \cdot \overline{ds} = \frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}. \qquad (21.24)$$

Se orientează axa x a sistemului de coordonate în direcţia în care se deplasează particula de sarcină q. Fie x coordonata punctului P unde se află particula şi l distanţa de la un plan fix trecînd prin originea O şi perpendicular pe OX, la planul transversal ce conţine linia de cîmp Γ. Pentru simplificarea calculelor se alege drept suprafaţă S_Γ o calotă sferică cu centrul în P, sprijinită pe curba Γ.

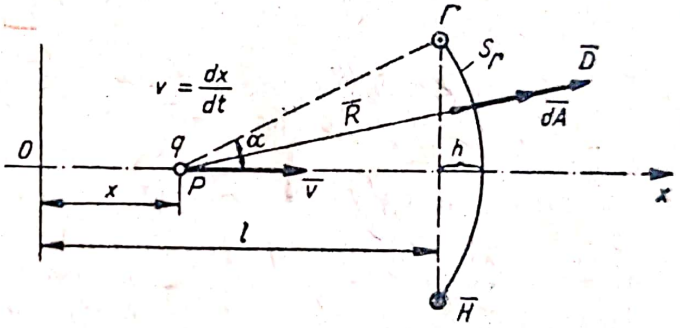


Fig. 21.6.

Dacă viteza particulei este suficient de mică, se poate admite caracterul coulombian al cîmpului electric al particulei. În acest caz, fluxul electric este (cu $\overline{E} \parallel \overline{R} \parallel \overline{D} \parallel \overline{dA}$):

$$\Psi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \overline{D} \cdot \overline{dA} = \iint_{S_\Gamma} \varepsilon_0 \overline{E} \cdot \overline{dA} = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S_\Gamma} \frac{q}{R^3} \overline{R} \right) \overline{dA} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} \iint_{S_\Gamma} dA$$

$$\Psi_{s_\Gamma} = \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \right) A_{cal}. \qquad (21.25)$$

Aria calotei sferice este:

$$A_{cal} = 2\pi R\, h = 2\pi R\, [R - (l - x)] = 2\pi R\, (R - R\cos\alpha) = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha). \qquad (21.26)$$

În consecinţă, înlocuind expresia din relaţia (21.26) în relaţia (21.25) se obţine:

$$\Psi_{S_\Gamma} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha) = \frac{q}{2} (1 - \cos\alpha). \qquad (21.27)$$

Deci:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = \frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt} = -\frac{q}{2} \left(-\sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{q}{2} \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}. \qquad (21.28)$$

Ţinînd seama că:

$$l - x = r \operatorname{ctg}\alpha; \quad \frac{d}{dt}(l - x) = -\frac{dx}{dt} = -v; \quad \frac{d}{dt}(r \operatorname{ctg}\alpha) = -\frac{r}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

rezultă:

$$\frac{d\alpha}{dt} = v \frac{\sin^2\alpha}{r}. \qquad (21.29)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valoarea din relația (21.29) în relația (21.28) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\ \overline{ds} = \frac{q}{2} \cdot \frac{\sin^3\alpha}{r} v. \tag{21.30}$$

Din relațiile (21.30) și (21.23) se deduce valoarea intensității cîmpului magnetic:

$$H = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{\sin^3\alpha}{r^2} = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{R^2}, \tag{21.31}$$

deoarece $r = R \sin\alpha$. Vectorial se poate scrie:

$$\overline{H} = \frac{1}{4\pi} q \frac{\overline{v} \times \overline{R}}{R^3}, \tag{21.32}$$

formulă care prezintă o mare analogie cu formula lui Biot-Savart-Laplace (17.11), dacă se înlocuiește $q\overline{v}$ cu $id\overline{s}$.

22. Legea inducției electromagnetice

22.1. Forma integrală a legii

Se numește *inducție electromagnetică* producerea unei tensiuni electromotoare într-un circuit (Faraday, 1831) sau în general în lungul unei curbe închise, datorită variației în timp a fluxului magnetic care străbate o suprafață sprijinită pe acea curbă. Sensul acestei t.e.m. este astfel, încît efectele ei se opun cauzei care a produs-o (regula lui Lenz).

Forma integrală a legii inducției electromagnetice se scrie:

$$e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \tag{22.1}$$

și se enunță astfel:

Tensiunea electromotoare produsă prin inducție electromagnetică în lungul unei curbe închise Γ *este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață sprijinită pe această curbă.*

Relația (22.1) se scrie explicit:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{ds} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot d\overline{A}, \tag{22.2}$$

în care: $e_\Gamma = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{ds}$ este tensiunea electromotoare în lungul curbei Γ (notată adesea și u_e), iar $\Phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot d\overline{A}$ este fluxul magnetic prin suprafața S_Γ sprijinită pe curbă.

La aplicarea legii inducției electromagnetice trebuie să se țină seama de următoarele:

a) Curba închisă Γ este adesea luată în lungul unui conductor electric filiform; în cazul general, acest lucru nu este însă necesar și curba Γ poate avea orice formă, fiind dusă prin izolanți sau prin vid.

b) Dacă mediul considerat este în mișcare, curba Γ, este atașată corpurilor în mișcarea lor (ca și în legea circuitului magnetic).

c) Sensul de integrare pe curba Γ (sensul lui $\overline{ds}$) și sensul normalei $\overline{n}$ la suprafața S_Γ, în raport cu care se calculează fluxul (adică sensul lui $\overline{dA}=\overline{n}\cdot dA$), sînt asociate după regula burghiului drept (fig. 22.1) (aceeași ca și în legea circuitului magnetic). Dacă s-ar utiliza regula burghiului stîng, ar dispare semnul minus din legea inducției electromagnetice, dar ar apare în legea circuitului magnetic. Diferența de semn dintre cele două legi constituie deci un fapt obiectiv, independent de convenția utilizată pentru asocierea sensului de referință de pe contur cu sensul normalei pe suprafață (aceeași în ambele cazuri) și este exprimată plastic prin regula lui Lenz menționată mai înainte.

Dacă se consideră de exemplu, două spire situate în plane paralele, apropiate, prima spiră fiind parcursă de curentul $i_1(t)$ variabil, în momentele în care fluxul magnetic Φ_{21} (al cîmpului magnetic al primei spire prin conturul celei de-a doua spire) crește (adică $\frac{d\Phi_{21}}{dt}>0$), tensiunea electromotoare indusă în spira a doua este negativă ($e_2=-d\Phi_{21}/dt<0$), adică produce un curent $i_2(t)$ de sens contrar sensului asociat după regula burghiului drept (fig. 22.2). Acest curent indus produce un flux magnetic propriu Φ_{22} de sens contrar celui exterior (în creștere).

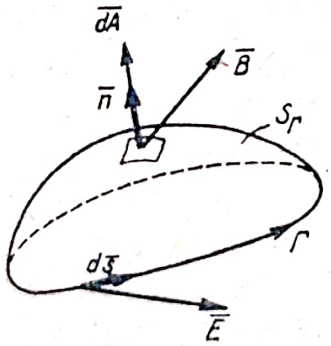


Fig. 22.1.

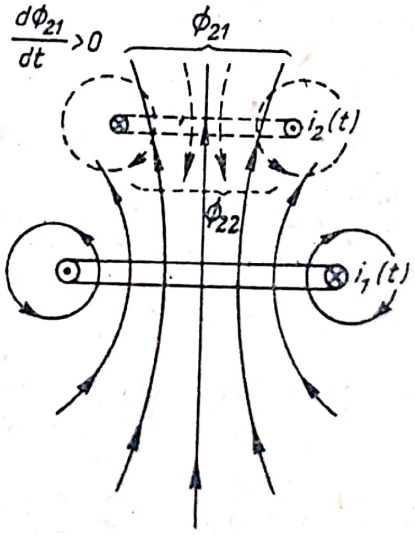


Fig. 22.2.

d) În cazul cînd conturul Γ la care se aplică legea este luat în lungul conductorului unei bobine cu N spire practic suprapuse, fluxul magnetic care intervine în calculul tensiunii electromotoare induse este fluxul printr-o suprafață sprijinită pe întregul contur, adică fluxul prin *toate* spirele. Dacă se notează cu Φ_f fluxul magnetic printr-o singură spiră, numit *flux fascicular*, în legea inducției intervine *fluxul total*: $\Phi=N\Phi_f$ și se poate scrie:

$$e=-N\frac{d\Phi_f}{dt}. \qquad (22.1')$$

22.2. Justificare energetică

În cazuri particulare, legea inducției electromagnetice poate fi demonstrată pe considerente energetice. Se consideră, de exemplu, un conductor drept de lungime l, care face parte dintr-un circuit dreptunghiular închis Γ. Conductorul se poate deplasa fără frecare cu viteza $\bar{v}=v\bar{u}_v$ (fig. 22.3) sub acțiunea unei forțe exterioare $\bar{F}$, în cîmpul magnetic de inducție $\bar{B}_0$, normală pe planul circuitului.

Experimental se constată că în circuit apare o t.e. m. e, de inducție, și un curent $i=e/R$ în sensul acestei t.e.m. În aceste condiții, conductorul va fi supus unei forțe magnetice dată de expresia lui Laplace (par. 16.3):

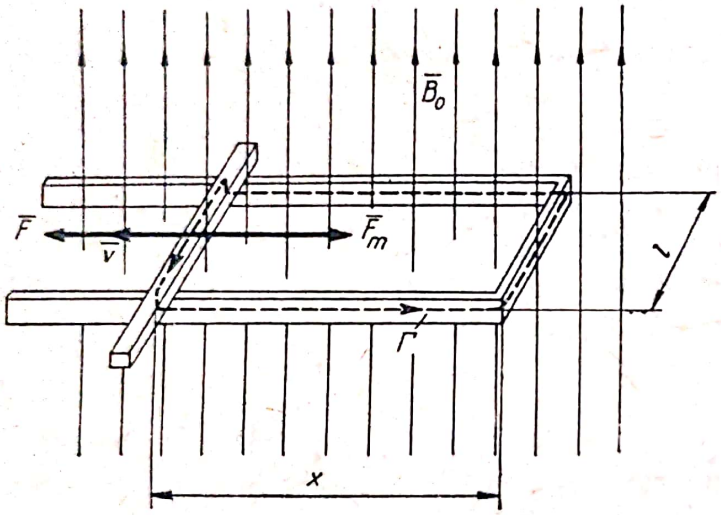


Fig. 22.3.

$$\bar{F}_m=i\bar{l}\times\bar{B}_0=ilB_0\bar{u}_v. \qquad (22.3)$$

În această expresie, vectorul $\bar{l}$ are sensul corespunzător sensului de referință al curentului pe conturul Γ, asociat după regula burghiului drept sensului lui $\bar{B}_0$, iar $\bar{u}_v$ este versorul vitezei $\bar{v}$. În conformitate cu regula lui Lenz, curentul i va rezulta negativ ($i<0$), iar $\bar{F}_m$ va fi de sens opus forței exterioare $\bar{F}$ (efectele inducției se opun cauzei care le produc). În această experiență se poate calcula mărimea tensiunii electromotoare induse (în cazul unei mișcări uniforme), punînd condiția ca lucrul mecanic primit din exterior, în unitatea de timp, să fie egal cu puterea dezvoltată prin efect Joule în circuitul Γ (conservarea puterilor în regim staționar cînd nicăieri nu se acumulează energie). Puterea mecanică cheltuită din exterior este:

$$P=\bar{F}\,\bar{v}=-\bar{F}_m\bar{v}=-ilB_0v>0 \qquad (i<0) \qquad (22.4)$$

deoarece în cazul unei mișcări uniforme:

$$\bar{F}+\bar{F}_m=\bar{F}+il\,B_0\bar{u}_v=0. \qquad (22.5)$$

Puterea dezvoltată în rezistența R a circuitului prin efect Joule, este

$$P_j=Ri^2=ei. \qquad (22.6)$$

Din conservarea puterilor:

$$P=P_j \qquad (22.7)$$

rezultă

$$-iB_0lv=ei$$

sau

$$e=-B_0lv=-B_0\frac{dx}{dt}=-\frac{d(B_0lx)}{dt}. \qquad (22.8)$$

Fluxul magnetic al cîmpului exterior prin conturul Γ este însă:

$$\Phi=B_0lx \qquad (22.9)$$

și rezultă:

$$e=-\frac{d\Phi}{dt}, \tag{22.10}$$

adică tocmai expresia postulată prin legea inducției.

Prin această demonstrație particulară se stabilește valoarea numerică a constantei de proporționalitate dintre cei doi membri ai relației (22.1), constantă care (în sistemul de unități utilizat) rezultă egală cu unitatea.

22.3. Forma integrală dezvoltată a legii

Derivata fluxului magnetic în raport cu timpul este o derivată substanțială, ca și în legea circuitului magnetic. Ea se poate descompune în doi termeni aditivi, cum s-a procedat în calculul derivatei de flux a unui vector cîmp $\bar{G}$ arbitrar (par. 21.3): un prim termen, care ar fi diferit de zero și dacă mediul ar fi imobil în raport cu sistemul de referință ales, și un al doilea termen, care ar fi diferit de zero și dacă inducția $\bar{B}$, din diferitele puncte fixe în raport cu sistemul de referință ales, ar fi independentă de timp și numai mediul ar fi în mișcare în raport cu acest sistem. Conform relației (21.8) se poate scrie:

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\bar{B}\,\overline{dA}=\iint_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}+\bar{v}\,\mathrm{div}\,\bar{B}+\mathrm{rot}\,(\bar{B}\times\bar{v})\right]\overline{dA},$$

cu observația că în cazul inducției magnetice avem $\mathrm{div}\,\bar{B}=0$ (forma locală a legii fluxului magnetic).

În consecință:

$$\frac{d\Phi_\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\bar{B}\cdot\overline{dA}\iint_{S_\Gamma}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\,\overline{dA}+\iint_{S_\Gamma}\mathrm{rot}\,(\bar{B}\times\bar{v})\overline{dA}. \tag{22.11}$$

Aplicînd teorema lui Stokes ultimului termen al membrului drept, se obține, din relațiile (22.2) și (22.11), forma integrală dezvoltată a legii inducției electromagnetice:

$$e_\Gamma=\oint_\Gamma\bar{E}\cdot\overline{ds}=-\iint_{S_\Gamma}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\,\overline{dA}+\oint_\Gamma(\bar{v}\times\bar{B})\overline{ds}, \tag{22.12}$$

în care partea:

$e_{trans.}=-\iint\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\,\overline{dA}$ (22.12′) din t.e.m. indusă se numește tensiune electromotoare indusă prin transformare (sau prin pulsație), iar partea:

$e_{mișc.}=\oint_\Gamma(\bar{v}\times\bar{B})\overline{ds}$ (22.12″) din t.e.m. indusă se numește tensiune electromotoare indusă prin mișcare (sau prin rotație — la mașinile electrice).

Suma celor doi termeni, t.e.m. indusă prin transformare și prin t.e.m. indusă prin mișcare este independentă de sistemul de referință ales, așa încît

împărțirea în cei doi termeni este relativă la acest sistem (față de care se exprimă viteza $\bar{v}$).

Dacă se consideră t.e.m. indusă prin mișcare:

$$e_{mișc} = \oint (\bar{v} \times \bar{B}) \bar{ds} \tag{22.12''}$$

în cazul particular al mișcării unui conductor de lungime $\bar{l}$, care taie transversal liniile inducție $\bar{B}$ cu o viteză $\bar{v}$, restul circuitului din care face parte fiind fix (fig. 22.4), unghiurile dintre vectorii $\bar{v}$ și $\bar{B}$, $\bar{v}$ și $\bar{l}$ și $\bar{B}$ și $\bar{l}$ fiind egale cu cîte 90°, unghiul dintre vectorii $(\bar{v} \times \bar{B})$ și $\bar{ds}$ rezultă nul, și se obține:

$$e_{mișc} = vBl \tag{22.13}$$

cu sensul produsului vectorial $\bar{v} \times \bar{B}$ pe circuit.

Dacă doi dintre vectorii $\bar{v}$, $\bar{B}$ și $\bar{ds}$ (sau $\bar{l}$) sînt paraleli, tensiunea electromotoare indusă prin mișcare se anulează: $(\bar{v} \times \bar{B})\bar{ds} = 0$. Rezultă următoarea regulă intuitivă: *tensiunea electromotoare de mișcare se induce numai dacă conductorul taie liniile de cîmp în mișcarea lui.*

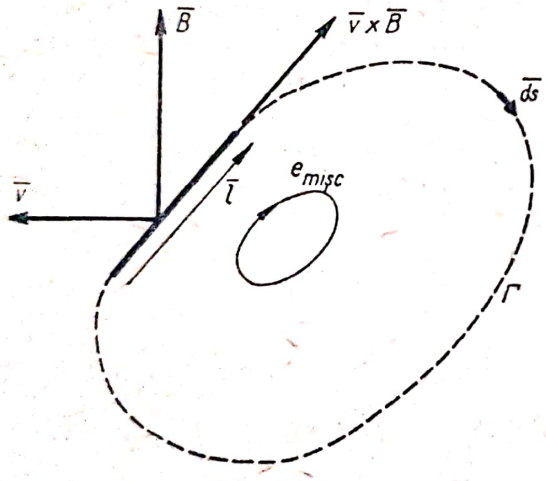


Fig. 22.4

22.4 Formele locale ale legii

În cazul domeniilor de continuitate (și de netezime), aplicînd teorema lui Stokes membrului întîi și ultimului termen din membrul al doilea al relației (22.12) se obține:

$$\iint_{S_\Gamma} \text{rot}\, \bar{E} \cdot d\bar{A} = -\iint_{S_\Gamma} \left[\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot}\, (\bar{B} \times \bar{v}) \right] d\bar{A}. \tag{22.14}$$

Suprafața S_Γ fiind arbitrară, rezultă forma locală a legii inducției electromagnetice:

$$\boxed{\text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \text{rot}\, (\bar{B} \times \bar{v})} \tag{22.15}$$

Pentru corpurile imobile ($\bar{v} = 0$), legea inducției sub formă locală devine:

$$\boxed{\text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}, \tag{22.16}$$

care poartă numele de *ecuația a doua a lui Maxwell.*

În cîmpul electrostatic, liniile de cîmp sînt deschise (deoarece, în caz contrar, ar avea circulație nenulă). În cazul cîmpului electromagnetic variabil în timp, pot apare, la orice variație a cîmpului magnetic, linii de cîmp electric închise, sau practic închise. Se obține astfel un cîmp electric rotațional, con-

diționat de variația în timp a cîmpului magnetic. În cîmpul electric rotațional, tensiunea electrică dintre două puncte depinde de drum și *nu mai poate fi pusă egală cu o diferență de potențial*; nu se mai poate defini un potențial electrostatic.

Observație. Dacă $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}=0$, $\bar{E} \neq \bar{v}\times\bar{B}$, deoarece div $(\bar{v}\times\bar{B})$ diferă în general de div $\bar{E}$, care e determinată de legea fluxului electric Se poate scrie numai:

$$\bar{E}=\bar{v}\times\bar{B}+\bar{E}', \tag{22.17}$$

în care rot $\bar{E}'=0$

În cazul suprafețelor de discontinuitate, aplicînd legea inducției sub forma integrală unui mic dreptunghi Γ (fig. 22.5) care îmbracă strîns suprafața, t.e.m. este proporțională cu derivata în raport cu timpul a fluxului magnetic. Fluxul și derivata lui tind însă către zero, o dată cu aria S_Γ, cînd dreptunghiul Γ este strîns aplicat pe suprafață.

În consecință:

$$\oint \bar{E}\cdot\bar{ds}=\bar{E}_2\bar{l}\cdot\Delta l-\bar{E}_1\bar{l}\cdot\Delta l=0 \tag{22.18}$$

sau

$$\bar{E}_2\bar{l}-\bar{E}_1\bar{l}=0$$

deci

$$\boxed{(E_t)_1=(E_t)_2} \tag{22.19}$$

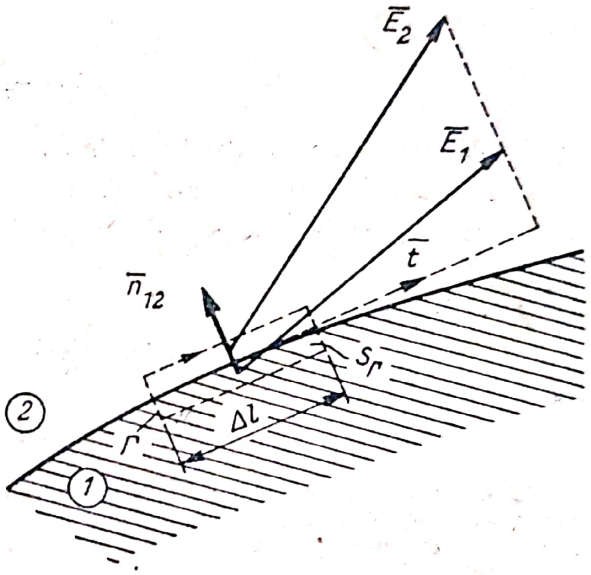


Fig. 22.5.

La trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, se conservă componenta tangențială a cîmpului electric. Liniile de cîmp și deci și liniile de inducție ale tuturor cîmpurilor electrice se refractă în conformitate cu teorema demonstrată în cîmpul electrostatic, relația (6.45).

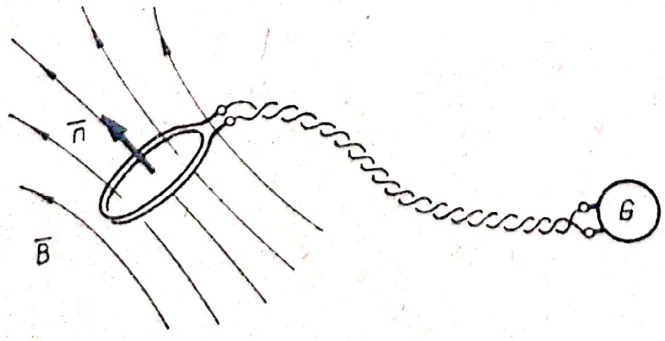


Fig. 22.6.

22.5. Aplicații

22.5.1. **Măsurarea fluxului magnetic.** Se folosește o bobină de probă cu N spire identice străbătute de fluxul fascicular de măsurat Φ_f. Această bobină se leagă în serie cu un galvanometru balistic G. Dacă bobina este introdusă sau scoasă brusc din cîmpul magnetic, variază fluxul magnetic înlănțuit de spirele bobinei. Se obține astfel prin inducție,

pentru un timp scurt, o t.e.m. și o impulsie de curent în galvanometru. Din deviația galvanometrului, atunci cînd bobina e scoasă brusc din cîmp, se poate calcula inducția, respectiv fluxul magnetic.

Într-adevăr curentul electric indus este, conform legii lui Ohm și legii inducției electromagnetice:

$$i=\frac{e}{R}=-\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{1}{R}N\frac{d\Phi_f}{dt}. \tag{22.20}$$

Atunci cînd bobina este scoasă brusc din cîmpul magnetic, deviația maximă a galvanometrului balistic este proporțională cu sarcina electrică Δq, care străbate circuitul în timpul mișcării bobinei:

$$\Delta q=\int i\,dt=-\frac{N}{R}\int d\Phi_f=\frac{N}{R}\left[\int\Phi_{f\ inițial}-\Phi_{f\ final}\right]$$

sau

$$\Delta\Phi_f=\frac{N}{R}\Delta q \tag{22.21}$$

în care: $\Delta\Phi_f$ este diferența între fluxul fascicular inițial și cel final;

R e rezistența totală a circuitului;

$q=k_b\alpha_{max}$, în care α_{max} e deviația maximă a galvanometrului balistic și k_b e constanta lui.

Rezultă:

$$\Delta\Phi_f=\frac{R}{N}k_b\alpha_{max}=\Phi_f \tag{22.22}$$

dacă

$$\Phi_f=\Phi_{f\ inițial}\ \text{și}\ \Phi_{f\ final}=0.$$

22.5.2. **Măsurarea tensiunii magnetice cu cordonul magnetic (Rogowski).** Cordonul Rogowski este o bobină foarte lungă și foarte flexibilă (fig. 22.7). Bobinarea lui se face foarte strîns și perfect uniform pe un tub flexibil de secțiune constantă și suficient de mică, în

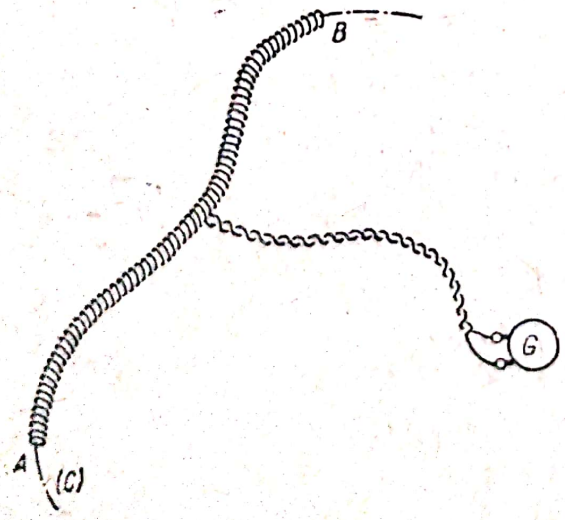


Fig. 22.7.

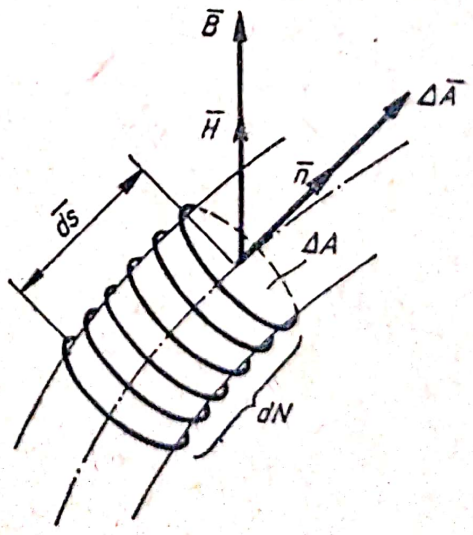


Fig. 22.8.

două sau în mai multe straturi, astfel încît capetele libere să se întîlnească în același loc pentru a evita formarea unei spire suplimentare cu conductoarele de legătură la instrumentul de măsură care e un galvanometru balistic G.

Dacă se notează cu ΔA secțiunea cordonului, cu N_s numărul de spire pe unitatea de lungime, cu $\overline{ds}$ un element de arc în lungul axei cordonului, se obține, pentru fluxul elementar ce revine elementului de cordon, expresia:

$$d\Phi = dN \cdot \overline{B}\,\overline{n}\,\Delta A, \tag{22.23}$$

în care: $dN = N_s \cdot ds$ este numărul de spire pe lungimea ds; $\overline{n}$ este normala pe secțiunea ΔA (fig. 22.8), deci și în sensul lui ds.

Deci:
$$d\Phi = \mu_0 N_s \cdot \Delta A\ \overline{H} \cdot \overline{n}\ ds = \mu_0\ N_s\ \Delta A\ \overline{H} \cdot \overline{ds}. \tag{22.24}$$

Se observă că fluxul pe o porțiune mică e proporțional cu tensiunea magnetică $\overline{H} \cdot \overline{ds}$ în lungul axei pe lungimea respectivă, μ_0, N_s și ΔA fiind constante pentru același cordon (structura acestuia este complet omogenă și are înfășurarea pe un suport din material neferomagnetic cu $\mu \approx \mu_0$). Fluxul total ce străbate toate spirele cordonului așezat între două puncte A și B, de-a lungul curbei C care coincide cu axa cordonului (fig. 22.7), este:

$$\Phi = \int_{A(C)}^{B} \mu_0 N_s\ \Delta A\, \overline{H} \cdot \overline{ds} = \mu_0 N_s\ \Delta A \int_{A(C)}^{B} \overline{H} \cdot \overline{ds} = \mu_0 N_s \Delta A\ u_{m_{AB}}. \tag{22.25}$$

Deci, pentru a măsura tensiunea magnetică între două puncte, de-a lungul curbei C este suficient să se măsoare fluxul magnetic prin bobinajul cordonului cu ajutorul unui galvanometru balistic (v. par. 22.5.1.).

De exemplu, variind fluxul de la Φ la 0, rezultă, conform relației (22.22):

$$\Delta\Phi = \Phi = R\, k_b\, \alpha_{max} \tag{22.26}$$

adică, cu relația (22.25):

$$u_{m_{AB}} = \frac{K_b\ R}{\mu_0 \Delta A\ N_s}\ \alpha_{max}. \tag{22.27}$$

22.5.3. **Principiul generatorului de curent alternativ. Calculul tensiunii electromotoare.** Se consideră o bobină dreptunghiulară (un cadru) cu N spire, ocupînd același contur Γ care se rotește în jurul unei axe de simetrie cu n rot/s într-un cîmp de inducție omogen $\overline{B}$, perpendicular pe axă, și se cere expresia t.e.m. induse în bobină.

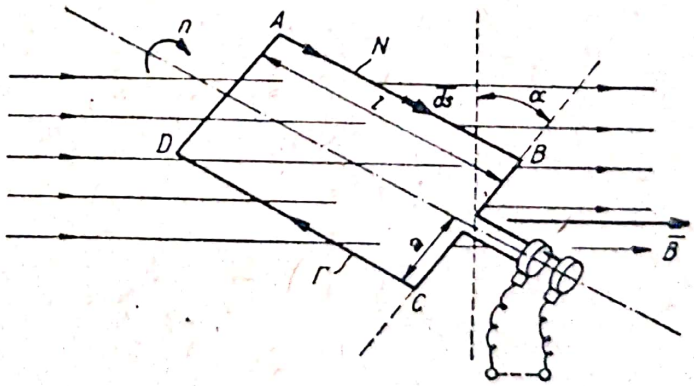


Fig. 22.9.

Prima metodă de calcul: Se aplică legea inducției sub formă nedezvoltată, relația (22.1), și se obține:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -N\ \frac{d\Phi_f}{dt}$$

în care:

$$\Phi_f = \int_{S_\Gamma} \overline{B}\ \overline{dA} = B\ A \cos\alpha = \Phi_{max} \cos\alpha \tag{22.28}$$

în care: $A = 2\ al$ este aria secțiunii bobinei cu laturile l și $2\ a$;

$\alpha = \omega\ t + \alpha_0 = 2\pi\ n\ t + \alpha_0$ este unghiul dintre $\overline{B}$ și normala la planul spirei, egal la un anumit moment cu unghiul format de planul spirei cu normala la liniile de inducție $\overline{B}$ (fig. 22.9). Deci t.e.m. indusă este:

$$e = N\Phi_{max} \sin\alpha\ \frac{d\alpha}{dt} = N\Phi_{max}\,\omega \sin(\omega t + \alpha_0)$$

$$e = 2\pi\ n\ N\Phi_{max} \sin(\omega t + \alpha_0). \tag{22.29}$$

Sub această formă valoarea t.e.m. de inducție nu depinde de forma secțiunei bobinei. Totuși, se va presupune bobina de formă dreptunghiulară pentru a calcula mai ușor aceeași tensiune electromotoare pe o a doua cale.

A doua metodă de calcul: Se aplică legea inducției electromagnetice sub formă dezvoltată, relația (22.12), în care este diferită de zero numai t.e.m. de mișcare:

$$e = \oint_{\text{(toate spirele)}} (\bar{v} \times \bar{B})\, \bar{ds} = N\Phi_{\Gamma} \quad (\bar{v} \times \bar{B})\, \bar{ds}. \tag{22.30}$$

T.e.m. se induce numai în laturile AB și CD, deoarece pentru laturile BC și DA produsul $(\bar{v} \times \bar{B})\, \bar{ds} = 0$, cei trei vectori fiind complanari. Rezultă:

$$e = N \int_A^B v\, B \sin \alpha\, ds + N \int_C^D v\, B \sin (\pi - \alpha)\, ds.$$

Deoarece

$$v = \omega a = 2\pi a n \text{ se obține că mai sus (22.29):}$$

$$e = NB\omega a\, 2l \sin\alpha = 2\pi n N\Phi_{max} \sin(\omega t + \alpha_0) \tag{22.31}$$

în care $\Phi_{max} = BA = B \cdot 2al$ e fluxul fascicular maxim (care străbate spira în poziția cînd aceasta este normală pe $\bar{B}$).

În practică se operează cu valoarea efectivă[1] E_f a tensiunii, a cărei valoare instantanee se scrie:

$$e = E_{max} \sin(\omega t + \alpha_0) = \sqrt{2}\, E_{ef} \sin(\omega t + \alpha_0), \tag{22.32}$$

în care

$$E_{ef} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} n N\Phi_{max} = 4{,}44\, n N\Phi_{max} \tag{22.33}$$

cu Φ_{max}, în weberi, pentru a obține E în volți. Adesea se lucrează cu Φ_{max} în maxwelli ($1M_x = 10^{-8}$Wb) și rezultă:

$$E_{ef} = 4{,}44\, n N\Phi_{max}^{(Mx)}\, 10^{-8} \text{ volți.} \tag{22.34}$$

22.5.4. **T.e.m. alternativă indusă în înfășurările transformatoarelor electrice.** Transformatoarele electrice sînt aparate de c.a., care servesc la transferul puterii electromagnetice prin inducție electromagnetică de la un circuit la un alt circuit. În acest scop, cele două circuite sînt conectate la cîte una dintre înfășurările transformatorului, care trebuie să fie astfel așezate (de obicei, pe un miez de fier — un circuit magnetic — v. par. 26), încît fluxul fascicular al curentului, care trece prin una dintre înfășurări, să străbată cît mai complet cealaltă înfășurare (v. fig. 22.10). O dată cu transferul de putere, transformatoarele transformă tensiunea într-un raport determinat.

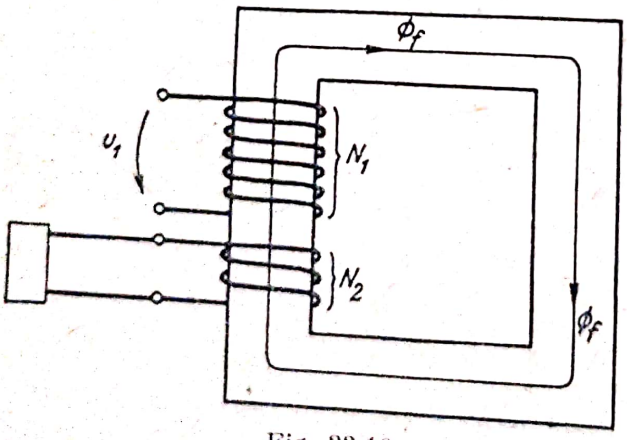


Fig. 22.10.

Aplicînd unei înfășurări (înfășurarea primară cu N_1 spire) o tensiune alternativă, se constată că ea este străbătută de un curent alternativ. În miezul transformatorului apare un flux magnetic alternativ. Acesta induce în înfășurarea secundară cu N_2 spire o tensiune electromotoare care determină apariția unui curent în circuitul (de sarcină) conectat la această înfășurare.

[1] Valoarea pătratică medie pe un număr întreg de perioade, egală cu citul prin $\sqrt{2}$ al valorii maxime, în cazul funcțiunilor sinusoidale de timp.

Fie Φ_f fluxul fascicular *rezultant* care străbate spirele ambelor înfășurări în aceste condiții:

$$\Phi_f = \Phi_{fmax} \cos(\omega t + \alpha_0), \tag{22.35}$$

în care $\omega = 2\pi f$ este pulsația, iar f — frecvența tensiunii alternative aplicate. Acest flux induce în înfășurarea primară t.e.m. primară:

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi_f}{dt} = N_1 \omega \Phi_{fmax} \sin(\omega t + \alpha_0), \tag{22.36}$$

iar în înfășurarea secundară, t.e.m. secundară:

$$e_2 = -N_2 \frac{d\Phi_f}{dt} = N_2 \omega \Phi_{fmax} \sin(\omega t + \alpha_0). \tag{22.37}$$

Raportul între t.e.m. primară și secundară rezultă egal cu raportul numărului de spire primar și secundar:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = k. \tag{22.38}$$

Acesta este raportul de transormare de înfășurare al transformatorului.
Valorile efective ale t.e.m. date de relațiile (22.36) și (22.37) sînt:

$$\left.\begin{aligned} E_{1ef} &= \frac{E_{1max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_1 f \Phi_{fmax}; \\ E_{2ef} &= \frac{E_{2max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} N_2 f \Phi_{fmax}, \end{aligned}\right\} \tag{22.39}$$

analoge cu relația (22.33), în locul numărului de rotații aparînd frecvența. Rezultă că și raportul acestor valori efective este egal cu raportul de transformare:

$$\frac{E_{1ef}}{E_{2ef}} = \frac{N_1}{N_2} = k. \tag{22.40}$$

Adesea, căderile de tensiune din primarul și secundarul transformatorului se pot neglija, și atunci raportul tensiunilor la borne, primară și secundară, este egal tot cu k.

23. Legea magnetizației temporare

23.1 Legea magnetizației temporare în medii lineare

În par. 18.5 s-a enunțat legea magnetizației temporare, valabilă pentru materialele izotrope și liniare fără magnetizație permanentă, conform căreia magnetizația temporară este proporțională cu intensitatea cîmpului magnetic care o determină:

$$\bar{M}_t = \chi_m \bar{H} \tag{18.28}$$

în care χ_m e o mărime de material numită *susceptivitate magnetică*.

În mod curent, legea nu se folosește sub această formă, ci combinată cu legea legăturii între $\bar{B}$, $\bar{H}$ și $\bar{M}$:

$$\bar{B}=\mu_0(\bar{H}+\bar{M}), \tag{19.7}$$

astfel că din relațiile (18.28) și (19.7) rezultă:

$$\bar{B}=\mu_0(\bar{H}+\chi_m\bar{H})=\mu_0(1+\chi_m)\bar{H}$$

sau

$$\bar{B}=\mu\bar{H}. \tag{23.1}$$

În această relație mărimea:

$$\mu=\mu_0(1+\chi_m)=\mu_0\mu_r=\frac{B}{H} \tag{23.2}$$

se numește *permeabilitatea (magnetică) absolută* a materialului, iar μ_r se numește *permeabilitatea (magnetică) relativă* a materialului.

Pentru materialele diamagnetice (v. par. 18.5) $\mu_r<1$, $\chi_m<0$, iar pentru materialele paramagnetice (v. par. 18.5) $\mu_r>1$, $\chi_m>0$ ($\mu_r\gg1$ pentru materialele feromagnetice, care formează o clasă specială de materiale magnetice neliniare).

Susceptivitatea magnetică χ_m și permeabilitatea μ sînt mărimi magnetice de material, dependente de natura acestuia, de starea lui de deformare (ceea ce determină proprietățile magnetostrictive ale materialului) și de temperatură (v. par. 18.5). În tabela 23.1 se dau valorile permeabilității relative μ_r pentru cîteva materiale dia- și paramagnetice.

Tabela 23.1

Materiale diamagnetice		Materiale paramagnetice	
Bismut	$\mu_r=1-170\cdot10^{-6}$	Aluminiu	$\mu_r=1+22\cdot10^{-6}$
Cupru	$\mu_r=1-10\cdot10^{-6}$	Aer (1 atm)	$\mu_r=1+0{,}4\cdot10^{-6}$
Argint	$\mu_r=1-19\cdot10^{-6}$	Platină	$\mu_r=1+330\cdot10^{-6}$
Mercur	$\mu_r=1-25\cdot10^{-6}$		
Apă	$\mu_r=1-9\cdot10^{-6}$		
Zinc	$\mu_r=1-12\cdot10^{-6}$		

După cum rezultă și din tabela 23.1 permeabilitatea relativă a materialelor neferomagnetice este foarte apropiată de unitate și se poate lua în mod practic $\mu_r\approx1$, adică permeabilitatea lor absolută se poate lua $\mu\approx\mu_0$.

Interpretarea microscopică a legii magnetizației temporare prezentată calitativ în par. 18.5 arată că diamagnetismul este o proprietate generală a corpurilor (condiționată de apariția unui moment magnetic indus al moleculelor, asociat mișcării orbitale a particulelor electrizate), iar paramagnetismul este o proprietate a substanțelor cu molecule polare (cari au un moment magnetic spontan), care — în opoziție cu acțiunea agitației termice — tind să se orienteze în direcția cîmpului exterior.

23.2. Feromagnetismul

23.2.1. Materialele feromagnetice. Fierul, cobaltul, nichelul, gadoliniul și unele aliaje se deosebesc de restul materialelor prin valorile extrem de mari ale permeabilității relative (de ordinul 10^2—10^5). Experimental se mai constată că relația $B=f(H)$ nu reprezintă, în acest caz, o dreaptă ca pentru celelalte materiale para- și diamagnetice, permeabilitatea μ fiind funcție de intensitatea cîmpului magnetic H. În afară de aceasta, un rol important îl are și succesiunea de stări prin care s-a ajuns la starea considerată.

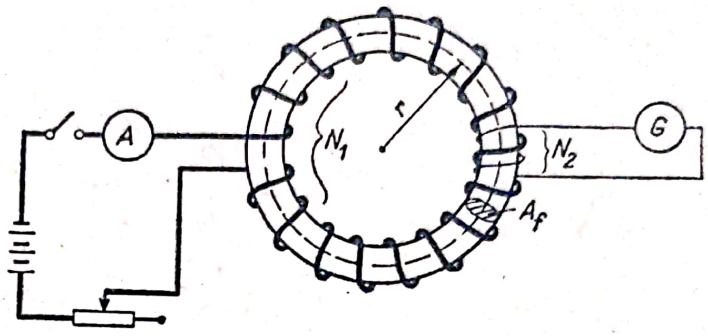


Fig. 23.1.

Ridicarea experimentală a curbei $B=f(H)$ se poate efectua, de exemplu, cu montajul indicat în figura 23.1. Din materialul feromagnetic de cercetat se execută un inel omogen (fără întrefieruri) care este bobinat cu două înfășurări din fir de cupru izolat ca în figura 23.1. Dacă se întrerupe (sau se stabilește) brusc curentul în una dintre înfășurări (de excitație), se obține prin inducție electromagnetică o deviație în galvanometrul balistic G corectat la a doua înfășurare (înfășurarea de măsură). Înfășurarea legată la galvanometrul balistic servește la măsurarea lui B (v. par. 22.5.1), calculabil cu relația:

$$B = \frac{\Phi_f}{A_f} = \frac{R}{A_f N_2}\,\Delta q \qquad (22.22)$$

în care: Φ_f este fluxul fascicular inițial (fluxul fascicular final fiind nul);

Δq — sarcina electrică indusă în mica bobină de N_2 spire, și măsurată de galvanometru;

R — rezistența circuitului bobină de măsură + galvanometru balistic;

A_f — secțiunea micrului feromagngetic al torului.

Cealaltă înfășurare de N_1 spire, repartizate cît mai uniform posibil pe inel, este parcursă de c.c. care poate fi măsurat cu ampermetrul A. Se obține astfel, conform relației (21.21), valoarea intensității cîmpului magnetic:

$$H = \frac{N_1 i}{l} = \frac{N_1 i}{2\pi r}, \qquad (23.3)$$

în care r este raza medie a inelului.

În regim staționar se poate trasa curba $B=f(H)$ mărind treptat pe H, prin mărirea curentului de excitație. Dacă măsurarea se începe cu materialul inelului demagnetizat, se obține *curba de primă magnetizare* (*a*, fig. 23.2). Curba atinge un maxim de înclinație (punct de inflexiune), după care creșterea lui B cu H este mai înceată și se ajunge la o valoare pentru care B rămîne aproape constant (*saturația magnetică*) (*b*, fig. 23.2). Fenomenul de saturație magnetică poate fi explicat prin cunoașterea completă a teoriei fero-

magnetismului[1]. O schimbare de stare magnetică are la bază orientarea spinilor electronilor din atomi. La materialele feromagnetice există atomi cu momente magnetice de spin ale electronilor necompensate, deci cu moment magnetic spontan. În porțiuni microscopice ale corpului, avînd încă un număr foarte mare de atomi și constituind așa-numitele „domenii", toți atomii au momentele îndreptate în același sens, astfel că domeniul e magnetizat permanent. Diferitele domenii sînt orientate, însă, haotic. La aplicarea unui cîmp magnetizant, domeniile tind să se orienteze în direcția cîmpului aplicat. În momentul orientării complete, magnetizația M atinge o valoare limită care se numește *magnetizație de saturație* M_s. Deci, la atingerea saturației:

$$B \approx \mu_0 (H + M_s), \text{ în care } M_s \gg H.$$

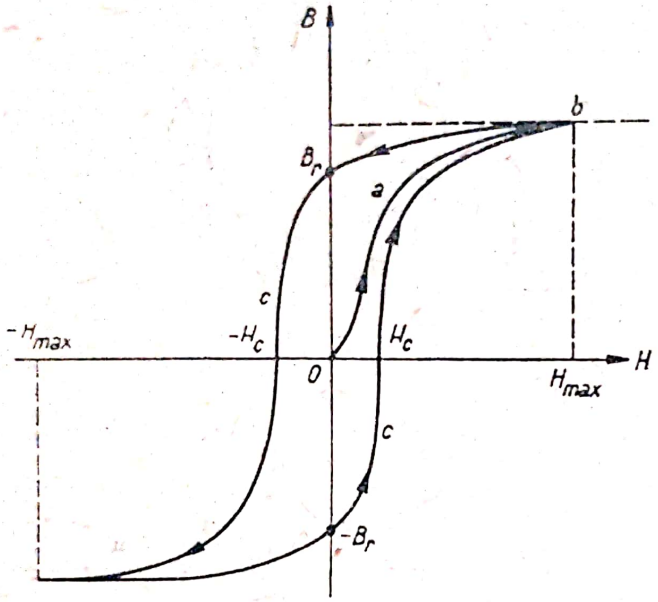


Fig. 23.2

Proprietățile feromagnetice dispar dacă temperatura a depășit o anumită limită (punctul Curie), care la fier este de 760°C, la nichel de 360°C etc. Încălzirea unui material feromagnetic poate constitui, deci, o metodă de demagnetizare.

Dacă după ce s-a parcurs o parte din curba de primă magnetizare se micșorează treptat curentul, adică H, se micșorează și B. Totuși, valorile pentru B sînt mai mari decît cele corespunzătoare curbei de primă magnetizare (fenomen de isterezis). Pentru $H=0$, B are o valoare care poartă numele de *inducție magnetică remanentă* B_r. Ca să se obțină anularea inducției, este necesar să se inverseze curentul de excitație, și deci intensitatea cîmpului H. Intensitatea cîmpului magnetic necesară pentru anularea inducției B se numește *cîmp magnetic coercitiv* H_c. Crescînd cîmpul H în sens contrar pînă la valoarea $-H_{max}$ și revenind cu valorile lui H pînă la $+H_{max}$ de la care s-a plecat se obține o curbă închisă numită *ciclu de isterezis magnetic* (c, fig. 23.2). Se pot trasa diverse cicluri de isterezis pentru diverse valori limită H_{max}. Există un *ciclu limită*, corespunzător valorii lui H_{max} la atingerea saturației, care le cuprinde pe toate. Acesta este ciclul care caracterizează materialul. Se mai observă, de asemenea, fenomenul de *stabilizare a ciclului*, care constă în faptul că numai după un număr de inversări succesive ale curentului (de la I_{max} la $-I_{max}$), și deci ale lui H, se obține un ciclu stabil care se regăsește mereu la repetarea inversării.

---

[1] V. Chr. Popescu, *Curs de materiale electrotehnice*, 1960, Ed. didactică și pedagogică, Buc.

23.2.2 **Permeabilități.** *Pentru caracterizarea materialului în jurul unei anumite stări* (definită pereche de valori B, H), se definesc:

— *Permeabilitatea magnetică relativă statică (totală)*:

$$\mu_r = \frac{B}{\mu_0 H} \qquad (23.4)$$

care variază cu H atingînd un maxim pentru a scădea și a tinde către 1 la $H \to \infty$.

— *Permeabilitate magnetică relativă diferențială (sau incrementală)*:

$$\mu_{dif} = \lim_{\Delta H \to 0} \left(\frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \right)_{\text{sens direct}} \qquad (23.5)$$

care este proporțională cu panta curbei de magnetizare față de axa absciselor (coeficientul unghiular al tangentei în punctul dat P), la variația lui H în sens direct.

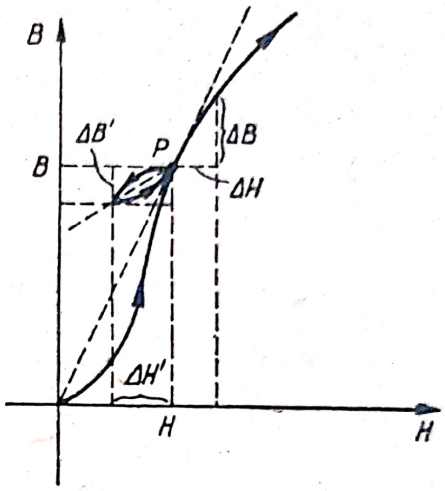


Fig. 23.3.

— *Permeabilitatea magnetică reversibilă:*

$$\mu_{rev} = \lim_{H' \to 0} \left(\frac{\Delta B'}{\mu_0 \Delta H'} \right)_{\text{revenire}} \qquad (23.6)$$

Dacă se scade cîmpul cu $\Delta H'$ în punctul P, înainte de a se atinge saturația, și apoi se mărește din nou cîmpul cu $\Delta H'$, se descrie un mic ciclu isterezis foarte turtit, care se poate confunda cu o dreaptă (numită dreaptă sau curbă de revenire), mai puțin înclinată față de abscisă decît tangenta în punctul P. Această transformare practic reversibilă este caracterizată de μ_{rev}. În general, μ_{rev} este mai mică decît μ_r și decît μ_{dif}. Această valoare atinge maximum pentru $B=0$, cînd coincide cu permeabilitatea în origine a curbei de primă magnetizare, care se numește *permeabilitate inițială*:

$$\mu_{in} = \lim_{\Delta H \to 0} \left(\frac{\Delta B}{\mu_0 \Delta H} \right)_{H=0, B=0} \qquad (23.7)$$

În *regim nestaționar*, se mai observă fenomenul de *viscozitate magnetică* (postefect magnetic), conform căruia ΔB nu ia instantaneu valoarea de regim staționar corespunzătoare unui anumit ΔH. Corespunzător acestui fenomen, permeabilitatea relativă în regim nestaționar, numită și *permeabilitate dinamică*, are valori mai mici decît cea din regim staționar, și anume cu atît mai mici cu cît frecvența este mai mare. De asemenea, în material se produc pierderi de energie, care — pe unitatea de volum și pentru un ciclu — sînt egale cu aria ciclului de isterezis în unități de $B \cdot H$.

23.2.3. **Clasificarea materialelor magnetice.** Materialele feromagnetice se împart în:

— *Materiale magnetic moi*[1], care sînt caracterizate (tabela 23.1) prin cîmpul coercitiv mic (de ordinul a 1 Oe = 80 A·sp/m sau mai mic) deci prin ciclul de isterezis îngust), și prin permeabilități foarte mari. Cel mai caracteristic material este fierul moale (sau cu adaos de cel mult 4% Si — în utilizările electrotehnice — cu scopul de a i se reduce pierderile de energie în cîmpuri alternative.)

Aliajele feromagnetice moi cu permeabilități foarte mari, au numiri industriale ca: permalloy (78,5% Ni; 21,5% Fe) etc. Materialele „moi" se utilizează la fabricarea circuitelor magnetice ale mașinilor, aparatelor și transformatoarelor electrice.

Tabela 23.1

Materialul (magnetic moale)	Permeabilitate relativă		Inducție remanentă B_r Wb/m²	Cîmp coercitiv H_c A·sp/m
	inițială	maximă		
Fier pur (tratat în hidrogen)	25 000	250 000	1,4	4
Tablă dinam (cu 4% Si)	500	7 000	0,8	40
Permalloy (78,5% Ni; 21,5% Fe)	10 000	50 000	0,6	4
Supermalloy (79% Ni; 15% Fe; 5% Mo; 0,5% Mn)	100 000	300 000	0,6	0,4
Ferită de mangan-zinc	2 000	3 000	0,15	10

— *Materiale magnetic dure* (tari), care sînt caracterizate (tabela 23.2) prin cîmpul coercitiv mare, de ordinul a 50 Oe≈4 000 As/m sau mai mare, prin inducția remanentă mare și prin permeabilități mici.

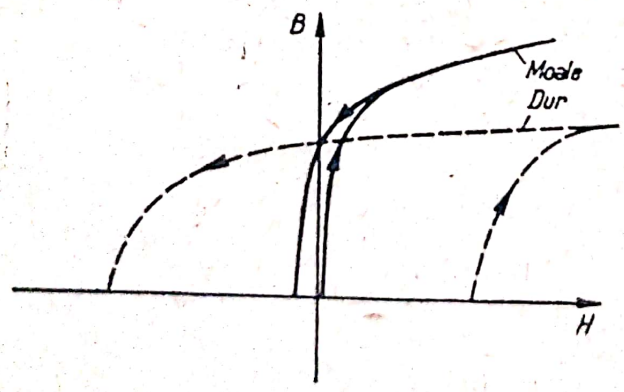


Fig. 23.4.

Cel mai obișnuit material dur este oțelul cu circa 1% C. Se utilizează și diverse alte aliaje cu H_c foarte mari, cu numiri industriale ca: alnico (12% Al; 20% Ni; 5% Co; 63% Fe), etc.

Aceste materiale dure sînt utilizate la executarea magneților permanenți. În figura 23.4 se indică comparativ porțiunile superioare ale ciclurilor de isterezis a două materiale feromagnetice — unul moale și unul dur — pentru a scoate în evidență faptul că diferența mare dintre ele consistă în valoarea cîmpului coercitiv și nu în valoarea inducției remanente (v. și par. 24.2).

[1] Materiale „moi" magnetic (care se magnetizează ușor) pot fi citeodată „dure" din punctul de vedere mecanic, după cum materialele „dure" magnetic pot fi „moi" din punctul de vedere mecanic. Terminologia adoptată se referă deci la proprietățile magnetice.

Tabela 23.2

Materialul (magnetic dur)	Permeabilitatea relativă inițială	Inducție remanentă B_r Wb/m²	Cîmp coercitiv H_c A·sp/m
Oțel (cu 1% C)	40	0,7	5 000
Oțel crom, Oțel wolfram	30	1,1	5 000
Alnico I (12% Al; 20% Ni; 5% Co; 63% Fe)	4	0,73	34 000
Oerstit 900 (25% Ni; 35% Co; 20% Ti; 35% Fe)	3	0,55	65 000
Aliaj platină-cobalt (77% Pt; 23% Co)	1	0,45	260 000
Ferită de bariu	1	0,2...0,4	100 000...250 000

24. Cîmpul magnetostatic al magneților permanenți

24.1. Relațiile fundamentale ale magnetostaticii

Magnetostatica este studiul stărilor magnetice staționare care nu însoțesc curenți electrici de conducție. Din legile generale și de material ale electromagnetismului se pot deduce relațiile fundamentale ale magnetostaticii punînd $\frac{d}{dt}=0$, $\bar{J}=0$ și $\bar{v}=0$ și considerînd numai legile în care intervin mărimi magnetice. La prezentarea acestor relații e utilă o comparație între relațiile magnetostaticii și relațiile electrostaticei.

24.1.1. **Legea fluxului magnetic:**

forma integrală $\Phi_\Sigma=\iint_\Sigma \bar{B}\cdot\overline{dA}=0,$ (20.1)

forma locală $\operatorname{div}\bar{B}=0.$ (20.3)

În electrostatică, legea fluxului electric este fundamental deosebită:

forma integrală $\Psi=\iint \bar{D}\cdot\overline{dA}=q_\Sigma$ (6.6)

forma locală $\operatorname{div}\bar{D}=\rho_v.$ (6.13)

24.1.2. **Teorema potențialului magnetostatic (consecință a legii circuitului magnetic).**

forma integrală $\oint_\Gamma \bar{H}\,\overline{ds}=0$ (deoarece $\bar{J}=0, \frac{d\Psi}{dt}=0$), (24.1)

forma locală $\operatorname{rot}\bar{H}=0.$ (24.2)

Circulația intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$ este nulă pe orice curbă închisă, în condițiile magnetostaticei (nu există curenți electrici) (v. 21.2).

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că se poate defini un potențial magnetostatic V_m, astfel încît:

$$\bar{H}=-\text{grad } V_m;\quad V_m(\bar{r})=V_m(\bar{r}_0)-\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}}\bar{H}\,\bar{ds}. \tag{24.3}$$

Cîmpul magnetostatic este, deci, un cîmp potențial.

Există analogie cu situația din electrostatică (teorema potențialului electrostatic):

forma integrală $$\oint_\Gamma \bar{E}\,\bar{ds}=0 \tag{6.23}$$

forma locală $$\text{rot}\,\bar{E}=0 \tag{6.36}$$

și

$$\bar{E}=-\text{grad V};\quad V(\bar{r})=V(\bar{r}_0)-\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}}\bar{E}\,\bar{ds} \tag{6.27}$$

24.1.3. **Legea legăturii între $\bar{B}$, $\bar{H}$, $\bar{M}$.**

$$\bar{B}=\mu_0(\bar{H}+\bar{M}). \tag{19.7}$$

24.1.4. **Legea magnetizației temporare.**

$$\bar{B}=\mu\bar{H} \tag{23.1}$$

sau curba de magnetizare $B=f(H)$ la materiale feromagnetice.

În aplicații se consideră ades $\mu\to\infty$ pentru feromagneticele moi, nesaturate.

În electrostatică au existat relațiile analoge:

$$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}+\bar{P} \tag{5.10}$$

$$\bar{D}=\varepsilon\bar{E}. \tag{6.2}$$

24.1.5. **Ecuațiile satisfăcute de cîmpurile de vectori $\bar{B}$ și $\bar{H}$.**

Ținînd seamă de relațiile (20.3), (24.2), (19.7), (18.16) se obține pentru cîmpul vectorial $\bar{B}(\bar{r})$ sistemul de ecuații:

$$\text{div}\,\bar{B}=0 \tag{20.3}$$

$$\text{rot}\,\bar{B}=\mu_0\text{rot}\,\bar{M}=\mu_0\,\bar{J}_m \tag{24.4}$$

în care $\bar{J}_m$ este densitatea curentului fictiv amperian echivalent stării de magnetizație a corpului (v. par. 18.4). Inducția magnetică $\bar{B}$ este deci un cîmp de vectori solenoidal (cu vîrtejuri).

Analog se poate studia cîmpul $\bar{H}$ obținut din relațiile (20.3) și (9.7) cu (24.2):

$$\text{div}\,\bar{H}=-\text{div}\,\bar{M}=\frac{1}{\mu_0}\rho_{mv} \tag{24.5}$$

$$\text{rot}\,\bar{H}=0 \tag{24.2}$$

Intensitatea cîmpului magnetostatic $\overline{H}$ este un cîmp de vectori potențial cu surse, cu proprietăți analoge cîmpului electrostatic[1]; rolul densității de sarcină îl are mărimea $-\mu_0 \operatorname{div} \overline{M} = \rho_{mv}$ (numită densitatea de volum a sarcinii de magnetizație).

Se observă din relațiile precedente, că numai magnetizația $\overline{M}$ produce cîmpul magnetostatic. Deoarece magnetizația temporară stabilită de cîmp este nulă, dacă acesta este nul, urmează că pentru a stabili un cîmp magnetostatic este nevoie de magnetizație permanentă, de magneți permanenți.

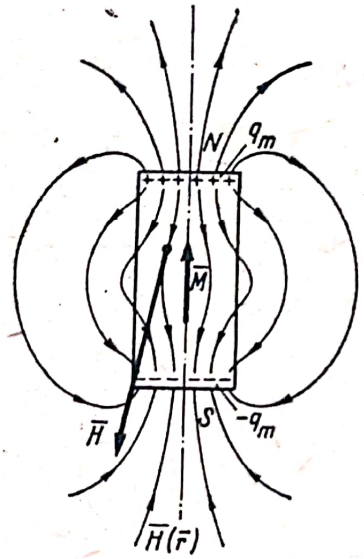


Fig. 24.1.

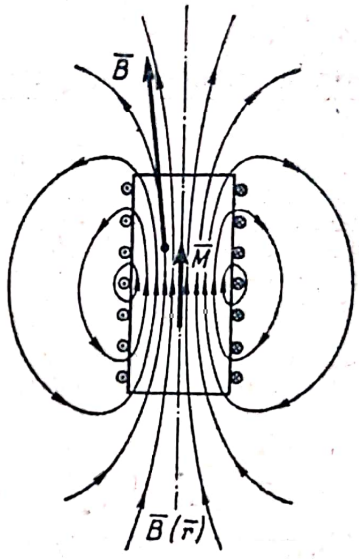


Fig. 24.2.

Dacă magnetul permanent are forma unei bare, din punctul de vedere al cîmpului $\overline{H}$, se poate considera o repartiție de sarcini fictive $\pm q_m$, echivalente magnetizării (conform cu relația 24.5), la cei doi poli ai magnetului.

Spectrul cîmpului $\overline{H}$ este dat în figura 24.1, prin analogie cu spectrul unui cîmp electric potențial.

Se observă că în exterior:

$$\overline{B}_{ext} = \mu_0 \overline{H}_{ext}$$

deci spectrul inducției $\overline{B}$ coincide cu al cîmpului $\overline{H}$. În interior, însă, liniile de cîmp și inducție vor *fi diferite* conform relației: $\overline{B} = \mu_0(\overline{H} + \overline{M})$ cu $\overline{M} = \overline{M}_p$ dat.

Deoarece $\operatorname{div} \overline{B} = 0$, liniile inducției $\overline{B}$ sînt închise (fig. 24.2); în general, ele au alura liniilor de inducție produse de un solenoid echivalent barei magnet.

Se numește *cîmp demagnetizant*, intensitatea $\overline{H}_d$ a cîmpului magnetic propriu al unui magnet permanent în punctele din interiorul magnetului.

---

[1] Comparația se face cu cîmpul electrostatic produs de corpuri polarizate electric pentru care $\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\rho_{vp}}{\varepsilon_0}$.

Dacă se scrie $\int \overline{H} d\overline{s} = 0$ pe o curbă care coincide cu o linie de cîmp în exteriorul magnetului, unde $\int \overline{H} d\overline{s} > 0$, rezultă că în interior $\int \overline{H} d\overline{s} < 0$. Cîmpul demagnetizant are deci sens opus magnetizării corpului în interiorul lui și tinde să-l demagnetizeze, punctul de funcționare pe ciclul de histerezis nefiind ($H = 0$, $B = B_r$), ci ($H = H_d < 0$, $B < B_r$), corespunzător cadranului al doilea din figura 23.2.

Acesta este efectul demagnetizant al polilor unui magnet. Se evită păstrînd magnetul în circuit magnetic închis (de exemplu cu o armătură de fier moale).

24.2. Circuit magnetic cu magnet permanent

Calculăm inducția magnetică în intrefierul *1* al circuitului magnetic din figura 24.3. Prin *3* s-a notat oțelul dur din care este executat magnetul permanent. Prin 2 și 4 s-au notat piesele polare din fier moale care completează circuitul magnetului. Dacă acest circuit magnetic a fost în prealabil magnetizat pînă la saturație, de exemplu, cu ajutorul unei bobine parcurse de curent, la întreruperea curentului se constată că inducția scade corespunzător unui punct de funcționare P pe ramura de demagnetizare a ciclului de histerezis (fig. 24.4).

Pentru un calcul practic al circuitului, se pot neglija la aplicarea legii circuitului magnetic porțiunile *2* și *4* de fier moale (unde $\mu \to \infty$, deci $H \to 0$, pentru ca $B = \mu H$ să fie finit).

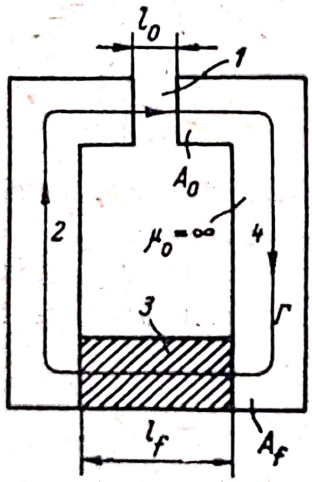


Fig. 24.3.

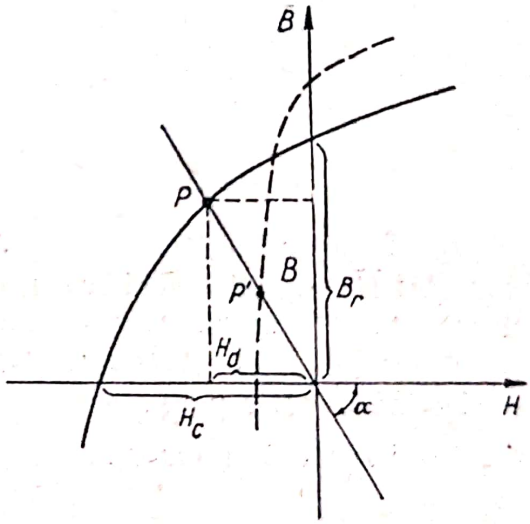


Fig. 24.4.

Aplicînd legea circuitului magnetic curbei se obține:

$$\int \overline{H} \cdot \overline{ds} = H\, l_f + H_0 l_0 = 0 \qquad (24.5)$$

în care H este intensitatea cîmpului magnetic în magnet (cîmpul demagnetizant); H_0 e intensitatea cîmpului magnetic în intrefier; l_f e lungimea magnetului; l_0 e lungimea intrefierului.

Fluxul în intrefier $B_0 A_0$ se obține din fluxul în magnet $B A$ multiplicat cu factorul k, care ține seamă de dispersia liniilor de cîmp (adică a liniilor care nu se închid prin intrefierul util ci direct, prin aer, între armături):

$$B_0 A_0 = k\, B\, A_f \quad (0 < k < 1) \qquad (24.7)$$

în care B este inducția în magnet; B_0 e inducția în aer (întrefier); A_f e secțiunea magnetului; A_0 e secțiunea întrefierului.

Factorul de dispersie k indică deci că o parte din fluxul produs de magnet se închide prin aer în mod direct (flux de dispersie sau flux de scăpări). Din relațiile (24.6) și (24.7) se obține:

$$H = H_d = -k \frac{l_0}{l_f} \cdot \frac{A_f}{A_0} \cdot \frac{B}{\mu_0} \tag{24.8}$$

ținînd seama că $B_0 = \mu_0 H_0$.

Relația (24.8) reprezintă ecuația unei drepte care se poate desena în diagrama curbei de magnetizare. Panta dreptei este dată de relația

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\mu_0}{k} \cdot \frac{l_f}{l_0} \cdot \frac{A_0}{A_f} \tag{24.8'}$$

și e determinată de configurația circuitului magnetului (fig. 24.4).

Punctul ei de întretăiere cu curba de magnetizare a materialului din care e confecționat magnetul permanent dă punctul de funcționare P (fig. 24.4).

Mărimea

$$\frac{1}{k} \frac{l_0}{l_f} \cdot \frac{A_f}{A_0}$$

se numește *factor de demagnetizare*, iar intensitatea cîmpului magnetic H, dată de relația (24.8), se notează și cu H_d și este cîmpul demagnetizant.

Găsindu-se punctul de funcționare P, rezultă grafic inducția B corespunzătoare cîmpului demagnetizant H_d. Din valoarea inducției B se poate calcula inducția B_0 în întrefier, conform relației (25.7):

$$B_0 = k \frac{A_f}{A_0} B. \tag{24.9}$$

Din figura 24.4 se constată că dacă materialul ar fi fost moale, cu un ciclu mai îngust (curba cu linii întrerupte), punctul de funcționare ar fi coborît la valori foarte mici ale inducției.

Un material se demagnetizează deci cu atît mai mult în cîmpul propriu, cu cît este mai moale din punct de vedere magnetic. De aceea, materialele dure (cu H_c mare) sînt indicate pentru magneții permanenți.

În mod practic, pentru caracterizarea eficacității unui magnet *de volum dat*, se consideră expresia energiei cîmpului magnetic din întrefier (v. par. 28)

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} l_0 A_0 = \frac{B_0 H_0}{2} l_0 A_0 = \frac{B_0 H_0}{2} V_0, \tag{24.10}$$

în care volumul întrefierului este

$$V_0 = l_0 A_0.$$

Se observă că din relațiile (24.6), (24.7) și (24.10) rezultă egalitatea:

$$\frac{B_0 H_0}{2} V_0 = k \frac{B |H_d|}{2} V_f \tag{24.11}$$

în care volumul magnetului este $V_f = l_f A_f$.

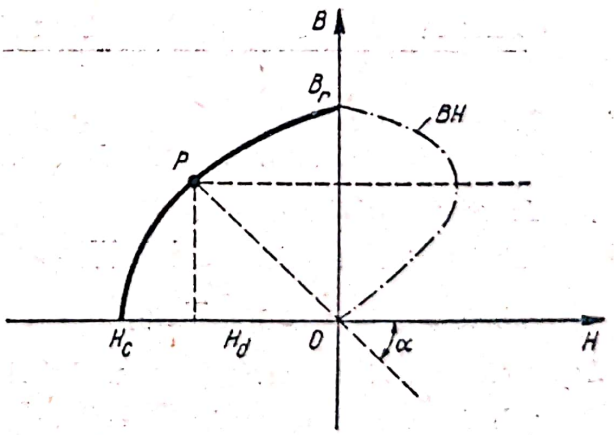


Fig. 24.5.

Pentru un întrefier dat, maximul energiei, adică a lui B_0, coincide produsul $(B|H|)_{max}$, care este numit *indice de calitate*. Deci magnetul trebuie să fie astfel dimensionat, încît punctul P să corespundă unor coordonate B și $|H_d| = H$ al căror produs să fie maxim. Această

determinare se efectuează grafic (fig. 24.6). Cu oarecare aproximație acest punct se găsește pe diagonala dreptunghiului $B_r H_c$.

Din valorile B și H corespunzătoare punctului P se dimensionează magnetul.

Cu cît materialul e mai dur din punct de vedere magnetic, cu atît punctul de funcționare P are abscise H_d mai mari, cu atît dreapta OP trebuie să fie mai înclinată, tgx mai mic și deci (din relația 24.8') lungimea l_f a magnetului mai mică, la cantitate dată de material magnetic ($V_f = l_f A_f$ dat). De aceea, dimensionarea economică a unui magnet permanent se face cu o lungime cu atît mai mică cu cît materialul are cîmpul coercitiv mai mare.

O utilizare importantă au magneții permanenți în domeniul executării aparatelor de măsură (magnetoelectrice, contoare electrice etc.).

25. Cîmpul magnetic produs de curenți electrici în regim cvasistaționar

Se numește *regim cvasistaționar* regimul în care variațiile în timp ale mărimilor de stare ale cîmpului electromagnetic sînt suficient de lente (respectiv frecvența este suficient de mică) pentru ca să se poată neglija curentul de deplasare, din punctul de vedere al producerii cîmpului magnetic, peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor. În aceste condiții, cîmpul magnetic cvasistaționar este produs de către conductoarele parcurse de curenți electrici variabili în timp după aceleași reguli ca și cîmpul magnetic staționar produs de către conductoarele parcurse de curenți continui.

25.1. Relații fundamentale. Unicitatea și superpoziția cîmpurilor magnetice

În regim cvasistaționar sînt, deci, aplicabile pentru calculul cîmpului magnetic următoarele relații fundamentale:

Legea fluxului magnetic —

sub formă integrală $\Phi = \oint_{\Sigma} \overline{B} \cdot \overline{dA} = 0$ (20.1)

sub formă locală $\operatorname{div} \overline{B} = 0$. (20.3)

Legea circuitului magnetic (*teorema lui Ampère*)

sub formă integrală $\oint_{\Gamma} \overline{H}\, \overline{ds} = \iint_{S_\Gamma} \overline{J} \cdot \overline{dA} = \theta_{S_\Gamma}$ (21.17')

sub formă locală $\operatorname{rot} \overline{H} = \overline{J}$. (21.18)

Legea polarizației temporare (*în medii liniare*)

$$\overline{B} = \mu \overline{H}. \qquad (23.1')$$

În medii liniare, cîmpul magnetic fiind produs numai de curenți (nu există magneți permanenți), se pot demonstra, datorită liniarității ecuațiilor, două teoreme importante:

Teorema unicității: Cîmpul magnetic produs de un sistem de n circuite filiforme în regim cvasistaționar, în medii cu proprietăți magnetice liniare (μ independent de intensitatea cîmpului magnetic), este univoc determinat dacă se cunosc:

a) configurația geometrică și permeabilitatea mediului $\mu(r)$;

b) pentru fiecare circuit filiform, fie curentul, fie fluxul total.

Rezultă, deci, că problema de determinare a cîmpului magnetic cvasistaționar, pentru un sistem dat de circuite, se poate rezolva dacă se cunosc: fie curenții tuturor circuitelor, fie fluxurile totale prin toate circuitele, fie curenții unora dintre circuite și fluxurile prin celelalte circuite.

Teorema superpoziției. Considerînd succesiv două distribuții de curent, care produc fiecare în parte cîte un cîmp magnetic, intensitatea cîmpului magnetic produs de o distribuție, rezultată din suprapunerea curenților celor două distribuții date, este în fiecare punct suma intensităților cîmpurilor produse de fiecare distribuție în parte. De asemenea, dacă în toate circuitele curenții se măresc de λ ori, intensitatea cîmpului magnetic crește de λ ori în fiecare punct din spațiu.

25.2. Ecuația lui Poisson pentru potențialul magnetic vector

25.2.1. Deducerea ecuației. În par. 20.4 s-a definit potențialul vector prin relația:

$$\overline{B} = \text{rot } \overline{A} \tag{25.1}$$

care este în fond o altă formă locală a legii fluxului magnetic, deoarece $\text{div } \overline{B} = \text{div rot } \overline{A} = 0$. Prin relația (20.5), vectorul $\overline{A}$ nu este însă univoc determinat deoarece un vector cîmp este univoc determinat în întregul spațiu numai dacă se cunoaște pe lîngă rotor și divergența sa. De aceea, în regim cvasistaționar se alege:

$$\text{div } \overline{A} = 0 \tag{25.2}$$

(convenția de etalonare a potențialului vector).

Într-un mediu omogen (μ=const.) ecuația pe care o satisface funcția de punct $\overline{A}(r)$ se deduce luînd rotorul ecuației (25.1) și folosind relația (23.1) Se obține:

$$\text{rot rot } \overline{A} = \text{rot } \overline{B} = \mu \text{ rot } \overline{H} \tag{25.3}$$

sau, ținînd seama și de forma locală a legii circuitului magnetic (21.17):

$$\mu \text{ rot } \overline{H} = \text{rot rot } \overline{A} - \mu \overline{J}. \tag{25.4}$$

Dacă conform relației (19.26):

$$\text{rot rot } \overline{A} = \text{grad div } \overline{A} = \Delta \overline{A}. \tag{25.5}$$

Prin relația (25.1) s-a convenit ca div $\overline{A}=0$; din relația (25.4) și (25.5) se obține deci *ecuația lui Poisson (vectorială) pentru cîmpul magnetic*:

$$\Delta\overline{A}=-\mu\overline{J}. \tag{25.6}$$

Deducerea explicită în coordonate carteziene a acestei ecuații se face astfel: din relația (25.4) rezultă:

$$\mu J_x=\text{rot}_x(\text{rot}\,\overline{A})=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right).$$

Adăugînd $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)$ și scăzînd termenul $\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$ se obține:

$$\mu J_x=-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right).$$

Cu (25.2) $\qquad \text{div}\,\overline{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=0$

și notînd cu Δ operatorul $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ =div grad, rezultă:

și în mod similar

$$\left.\begin{aligned}\Delta A_x&=-\mu J_x\\ \Delta A_y&=-\mu J_y\\ \Delta A_z&=-\mu J_z\end{aligned}\right\} \tag{25.7}$$

adică relația (25.6) scrisă pe componente. Acestea sînt ecuații cu derivate parțiale de tip Poisson, scalare.

25.2.2. **Proprietăți matematice ale acestor ecuații.** În general, în cazul unei distribuții continue de surse, se numește *ecuație Poisson* satisfăcută de o funcție scalară φ o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea, de forma:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\alpha\,(x,\,y,\,z) \tag{25.8}$$

sau

$$\text{div grad}\,\varphi=\alpha,\ \text{sau}\ \ \Delta\varphi=\alpha$$

în care $\alpha\,(x, y, z)$ este o funcție „sursă" cunoscută, care caracterizează această distribuție. Fie $\alpha\neq 0$ într-un domeniu finit D. În exteriorul domeniului, $\alpha=0$ și funcția φ satisface *ecuația lui Laplace*:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0\ \text{sau}\ \ \Delta\varphi=0 \tag{25.8'}$$

care reprezintă un caz particular al ecuației lui Poisson.

În acest caz, soluția [1] ecuației (25.8) este:

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\iiint_D\frac{\alpha(x;\,y;\,z')}{R}\,dv'=\frac{-1}{4\pi}\iiint_{v_\infty}\frac{\alpha(\overline{r'})}{R}\,dv' \tag{25.9}$$

[1] Pentru demonstrarea soluției se poate consulta: R. Rădulet, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, 1955, p. 445—462. Litografia Învățămîntului.

în care $dv' = dx'\,dy'\,dz'$ este un element de volum al spațiului cuprins în domeniul finit D (fig. 25.1), unde în fiecare punct $\alpha \neq 0$. Integrarea se poate extinde, în principiu, asupra întregului spațiu (V_∞) deoarece, în afara lui D, $\alpha = 0$

Să verifică în continuare, valabilitatea soluției într-un punct P de coordonate (x, y, z), în care $\alpha(x, y, z) = 0$ și în care trebuia ca φ să satisfacă ecuația lui Laplace (25.8′).

Dacă (fig. 25.1):

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

atunci:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{1/2 \cdot 2(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}} = \frac{x-x'}{R}$$

și rezultă, pentru verificarea valabilității soluției (25.9):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\alpha'\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) dv' = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \alpha' \frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial x}\,dv' = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \alpha' \frac{(x-x')}{R^3} dv' \qquad \text{cu notația:}$$

$\alpha' = \alpha(x', y', z')$, mărime constantă la derivarea în raport cu x, y, z. Derivînd a doua oară:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi}\iiint \alpha' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x'}{R^3}\right) dv' = \frac{1}{4\pi}\iiint \alpha' \frac{R^3 - (x-x')3\;R^2\frac{x-x'}{R}}{R^6} - dv' \qquad \text{sau}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \alpha' \frac{1 - 3\frac{(x-x')}{R^2}}{R^3} dv'.\\
&\text{În mod analog:}\\
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \alpha' \frac{1 - 3\frac{(y-y')}{R^2}}{R^3} dv'.\\
&\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \alpha' \frac{1 - 3\frac{(z-z')^2}{R^2}}{R^3} dv'.
\end{aligned}\right\} \quad (25.10)$$

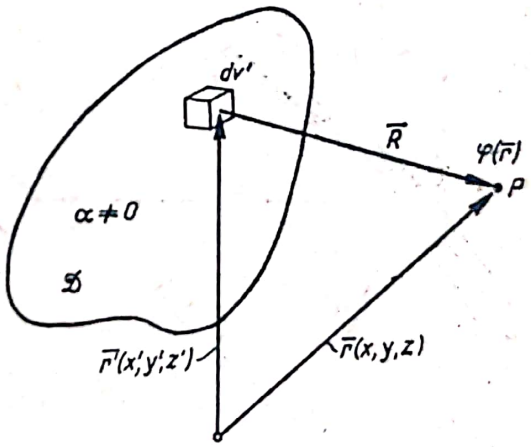


Fig. 25.1.

Adunînd aceste expresii se obține:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{4\pi}\iiint_D \alpha'\,dv' \frac{3 - 3\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{R^2}}{R^3} = 0. \qquad (25.11)$$

Prin urmare, în regiunea exterioară domeniului este satisfăcută ecuația lui Laplace.

Un prim exemplu de aplicare a ecuațiilor Poisson și Laplace s-a întîlnit în electrostatică (v. par. 9.4)

Funcțiunea de punct considerată în acel caz era potențialul electrostatic $V(\bar{r})$ al intensității cîmpului electric, pentru care — din legea fluxului electric și din relația dintre inducție și intensitate în medii liniare și omogene — se deducea ecuația lui Poisson:

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_v \qquad (9.15)$$

cu soluția, conform relației (25.9):

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V_\infty} \frac{\rho_v(\bar{r}')}{R} dv', \qquad (9.16)$$

care este chiar potențialul coulombian stabilit pe cale directă pornind de la cîmpul coulombian.

25.2.3. **Potențialul vector al unui circuit filiform.** În cazul cîmpului magnetic în regim cvasistaționar s-au obținut trei ecuații Poisson scalare pentru componentele A_x, A_y, A_z (relația 25.7), cu soluțiile:

$$A_x=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\frac{J'_x}{R}dv';\quad A_y=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\frac{J'_y dv'}{R}\quad A_z=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\frac{J'_z dv'}{R}.$$

Adunînd aceste expresii înmulțite respectiv cu versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, rezultă:

$$\boxed{\bar{A}=\frac{\mu}{4\pi}\iiint_{V_\infty}\frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R}dv'} \qquad (25.12)$$

care e soluția ecuației Poisson vectoriale (25.6) cînd $\bar{J}\neq 0$ în D finit.

Considerînd un circuit electric filiform de contur Γ, elementul de volum este:

$$dv'=\overline{\Delta A}'\overline{ds}',$$

iar curentul care trece prin el va fi $i=\bar{J}\cdot\overline{\Delta A}'$ și deoarece $\bar{J}\parallel\overline{\Delta A}'\parallel\overline{ds}'$ (fig. 25.2) rezultă[1]:

$$\bar{J}\,dv'=J\cdot\Delta A'\overline{ds}'=i\,\overline{ds}'$$

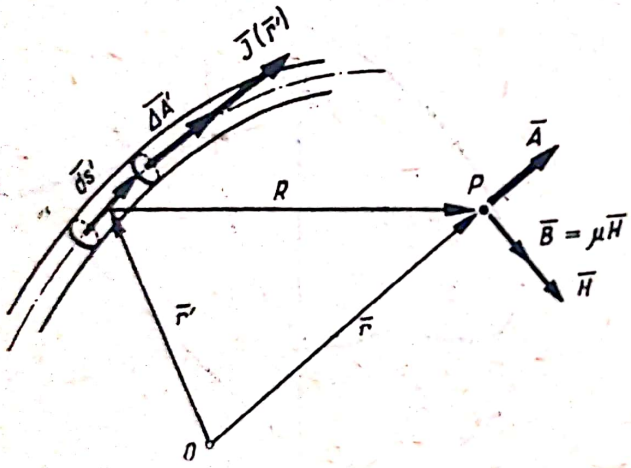


Fig. 25.2.

În consecință, expresia potențialului vector devine:

$$\boxed{\bar{A}=\frac{\mu}{4\pi}i\oint_\Gamma\frac{\overline{ds}'}{R}}. \qquad (25.13)$$

25.3. Teorema Biot-Savart-Laplace

Cu expresia (25.13) a potențialului vector se poate demonstra riguros formula Biot-Savart-Laplace pentru calculul intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$ într-un mediu liniar și omogen din punctul de vedere magnetic, de permeabilitate μ (formulă care a fost prezentată încă din par. 17.1 pentru vid). Cu relația (20.5):

$$\bar{B}=\text{rot}\,\bar{A}=\text{rot}\left[\frac{\mu i}{4\pi}\oint\frac{\overline{ds}'}{R}\right]. \qquad (25.14)$$

[1] Nu trebuie să se confunde în acest calcul simbolul potențialului vector $\bar{A}$ cu simbolul $\overline{dA}'$ sau $\overline{\Delta A}'$ al elementului de arie.

Efectuînd calculul pe componente[1] cu $\overline{ds'}=\bar{i}dx'+\bar{j}dy'+\bar{k}dz'$:

$$\overline{R}=(x-x')\,\bar{i}+(y-y')\bar{j}+(z-z')\bar{k} \quad \text{și} \quad R=|\overline{R}|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

rezultă:

$$B_x=\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\left[\operatorname{rot}\frac{\overline{ds'}}{R}\right]_x=\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dz'}{R}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dy'}{R}\right)\right]=$$

$$=\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\left[dz'\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{y-y'}{R}-dy'\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{z-z'}{R}\right]=$$

$$=\frac{\mu i}{4\pi}\oint_\Gamma\left[\frac{dy'(z-z')-dz'(y-y')}{R^3}\right]=\frac{\mu i}{4\pi}\oint\left[\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}\right]_x$$

Analog:

$$B_y=\frac{\mu i}{4\pi}\oint\left[\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}\right]_y \qquad B_z=\frac{\mu i}{4\pi}\oint\left[\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}\right]_z$$

de unde:

$$\overline{B}=\bar{i}B_x+\bar{j}B_y+\bar{k}B_z=\frac{\mu i}{4\pi}\oint\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3},\ \text{iar:}$$

$$\boxed{\overline{H}=\frac{\overline{B}}{\mu}=\frac{i}{4\pi}\oint_\Gamma\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}.} \qquad (25.15)$$

Într-un mediu magnetic liniar și omogen, intensitatea cîmpului magnetic are expresia dată de relația 25.15, independent de natura mediului, adică de μ, ca și cum fiecare element de circuit $i\overline{ds'}$ ar contribui cu „cîmpul elementar":

$$„d\overline{H}"=\frac{i}{4\pi}\cdot\frac{\overline{ds'}\times\overline{R}}{R^3}. \qquad (25.15')$$

Așa cum s-a menționat în par. 17.2, această ultimă interpretare nu este corectă și expresia (25.15′) poate fi utilizată numai pentru integrare pe contururi Γ închise.

25.4. Teorema refracției liniilor de cîmp

S-a demonstrat în paragrafele anterioare (20 și 21), că la suprafața de separație între două medii magnetice, în conformitate cu legea fluxului magnetic se conservă componenta normală a inducției magnetice:

$$(B_1)_n=(B_2)_n. \qquad (20.4)$$

[1] Calculul direct se poate face observînd că $\operatorname{rot}\frac{\overline{ds'}}{R}=\nabla\times\frac{\overline{ds'}}{R}=\nabla\frac{1}{R}\times\overline{ds'}=-\frac{\overline{R}}{R^3}\times ds'=$

$=\overline{ds'}\times\frac{\overline{R}}{R^3}$.

iar în conformitate cu legea circuitului magnetic se conservă componenta tangențială a intensității cîmpului magnetic:

$$(H_1)_t = (H_2)_t \tag{21.19}$$

(în ipoteza că nu există repartiție superficială de curenți).

Din aceste două condiții se obține, împărțindu-le și cu $\overline{B} = \mu\overline{H}$ (medii izotrope și liniare) relația:

$$\frac{\mu_1 (H_1)_n}{(H_1)_t} = \frac{\mu_2 (H_2)_n}{(H_2)_t}.$$

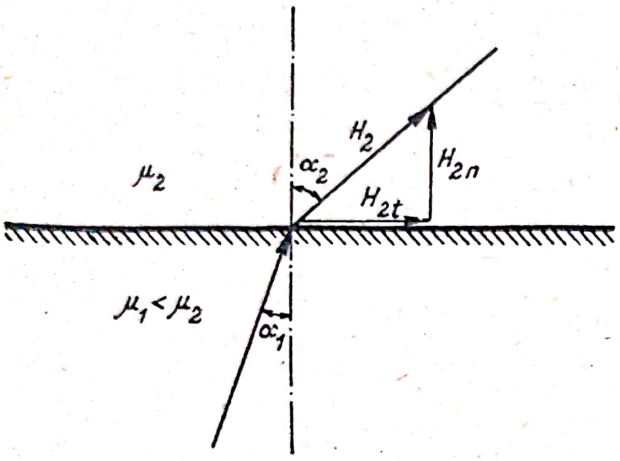


Fig. 25.3.

Dacă α_1 și α_2 sînt unghiurile făcute de liniile de cîmp în cele două medii cu normala la suprafața de separație (fig. 25.3) rezultă

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}} \tag{25.16}$$

deoarece

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = (H_1)_t/(H_1)_n \text{ și } \operatorname{tg}\alpha_2 = (H_2)_t/(H_2)_n$$

Relația par. (25.16) constituie teorema de refracție a liniilor de cîmp magnetic (v. și par. 6.7.3.) Ea prezintă importanță practică la stabilirea formei liniilor de cîmp în jurul pieselor din materiale feromagnetice ale mașinilor, transformatoarelor și aparatelor electrice. În acest caz, dacă $\mu_2 = \mu_0$ e permeabilitatea aerului, permeabilitatea μ_1 a mediului feromagnetic este mult mai mare. De exemplu, la $\mu_1 = 1\,000\ \mu_0$. rezultă $\operatorname{tg}\alpha_1 = 1\,000\ \operatorname{tg}\alpha_2$. Chiar dacă liniile din materialul feromagnetic formează unghiul $\alpha_1 = 89°$, înseamnă că $\alpha_2 = 3°20'$ în aer (fig; 25.4).

Practic deci se poate considera că liniile inducției magnetice în aer sînt normale pe suprafețele corpurilor feromagnetice. Pot surveni excepții la această regulă numai atunci cînd rezultă cu necesitate că $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ în materialul feromagnetic cu $\mu_1 \to \infty$, în care caz α_2 poate avea orice valoare.

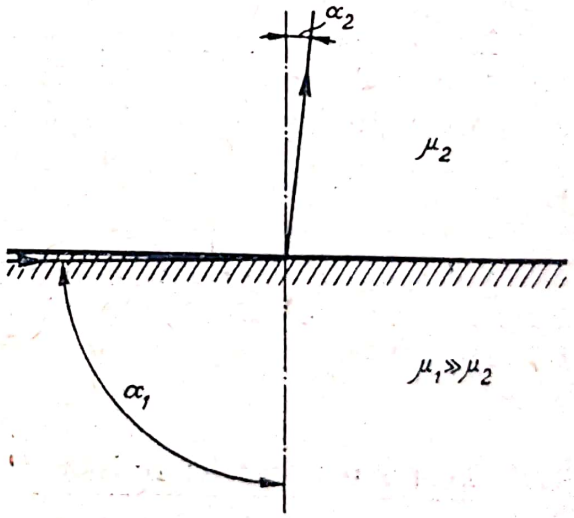


Fig. 25.4.

25.5. Aplicații la calculul cîmpurilor magnetice cu metoda elementară

Metoda elementară constă în aplicarea formei integrale a legilor, cunoscînd în prealabil (prin raționamente directe bazate în special pe considerente de simetrie) forma liniilor de cîmp.

25.5.1. **Cîmpul magnetic al unui fir infinit rectiliniu într-un mediu omogen.** Datorită simetriei cilindrice, liniile de cîmp pot fi numai circulare, cu intensitatea cîmpului constantă în modul în lungul liniei de cîmp[1]. Rezultă:

$$\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{dl} = H \oint_\Gamma ds = H \cdot 2\pi r = i$$

[1] Simetria cilindrică ar fi fost compatibilă și cu linii de cîmp radiale. Dar, în acest caz, ar fi existat flux magnetic prin suprafața închisă a unui cilindru coaxial cu firul, ceea ce ar fi fost incompatibil cu legea fluxului magnetic.

sau

$$H=\frac{i}{2\pi r} \tag{25.17}$$

identică cu expresia (17.3) referitoare la vid. Deci, conform relației (23.1)

$$\bar{B}=\mu\bar{H}=\frac{\mu i}{2\pi r}\bar{u}_t, \tag{25.18}$$

u_t este versorul tangent la cercul Γ de rază r (fig. 25.5), cu sensul asociat sensului curentului după regula burghiului drept.

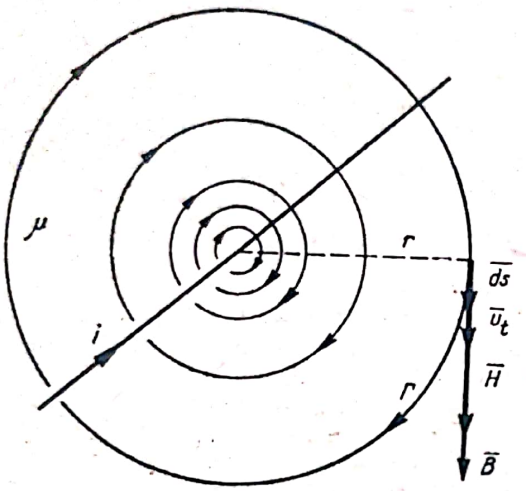


Fig. 25.5.

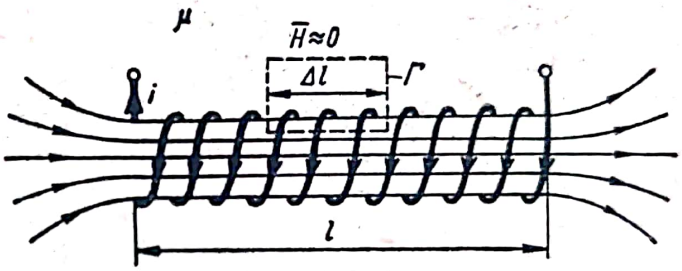


Fig. 25.6.

25.5.2. **Cîmpul magnetic al unui solenoid drept foarte lung uniform bobinat** (fig. 25.6). Prin aplicarea legii circuitului magnetic la curba Γ se obține relația:

$$\int_\Gamma \bar{H}\cdot\bar{ds}=H\Delta l=N_s\cdot\Delta l\cdot i$$

în care:

$N_s=\frac{N}{l}$ este numărul de spire pe unitatea de lungime.

Rezultă relația:

$$H=N_s i=\frac{N}{l}i,$$

identică cu relația (21.22), obținută pe altă cale în par. 21.5.

Exemplu numeric. Pentru $i=1$A, $N=5\,000$ spire, $l=50$ cm, rezultă:

$$H=\frac{5\,000\cdot 1}{50\cdot 10^{-2}}=10^4\frac{\text{A}\cdot\text{sp}}{\text{m}}=40\pi Oe$$

(deoarece: $1\frac{\text{A}\cdot\text{sp}}{\text{m}}=4\pi\cdot 10^{-3}$ (Oe).

Dacă solenoidul este în aer ($\mu\approx\mu_0$).

$$B=\mu_0 H=4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 10^4=4\pi\cdot 10^{-3}\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}=40\pi G$$

(deoarece 1 T = 1Wb/m^2 = 10^4Gs).

25.5.3. **Cîmpul magnetic al unui tor cu întrefier** (fig. 25.7). Se consideră bobinajul cu N spire, executat pe două jumătăți de inel de fier fiecare de lungime $\frac{l_f}{2}$, între care există cîte un întrefier de lungime $\frac{l_0}{2}$, și avînd spirele parcurse de curentul i.

Aplicînd legea circuitului magnetic pe o linie de cîmp, practic circulară și coincizînd cu o fibră mediană a torului se obține:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = 2H_f \frac{l_f}{2} + 2H_0 \frac{l_0}{2} = Ni, \tag{25.19}$$

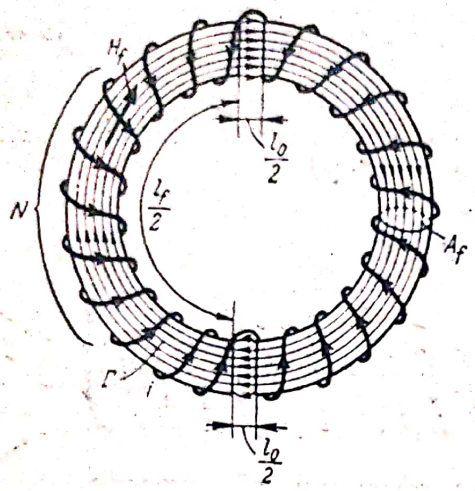


Fig. 25 7.

în care H_f este intensitatea cîmpului magnetic în fier, iar H_0 — intensitatea cîmpului magnetic în întrefier ($\mu \approx \mu_0$).

Din legea fluxului magnetic relația (20·1), se deduce că fluxul este conservativ, și considerînd fluxul repartizat uniform pe secțiune, deoarece inelul e subțire — rezultă:

$$\Phi = B_f A = B_0 A_0 \tag{25.20}$$

în care: B_f e inducția în fier, B_0 e inducția în aer, A e aria secțiunii fierului, iar A_0 e aria utilă a secțiunii întrefierului.

Totdeauna aria utilă a secțiunii întrefierului trebuie luată mai mare decît cea a fierului, deoarece fasciculul de linii de inducție se lărgește puțin în dreptul întrefierului. De obicei, $A_0 = 1 \ldots 1{,}2\ A$, după grosimea întrefierului.

De asemenea:

$$\left.\begin{aligned} B_f &= \mu H_f \\ B_0 &= \mu_0 H_0 \end{aligned}\right\} \tag{25.21}$$

Din relațiile (25.19), (25.20) și (25.21) se obține:

$$H_0 = \frac{Ni}{l_0 + l_f \dfrac{\mu_0 A_0}{\mu A}} \tag{25.22}$$

$$B_0 = \frac{\mu_0 Ni}{l_0 + l_f \dfrac{\mu_0 A_0}{\mu A}} \tag{25.23}$$

Din cauză că $\mu/\mu_0 = \mu_r$ este de ordinul sutelor sau miilor, contribuția termenului cu l_f de la numitorul acestor expresii e adesea neglijabilă, deși $l_f \gg l_0$.

Mărimea $l_f \dfrac{\mu_0 A_0}{\mu A} = l_0'$ se numește *lungimea echivalentă de întrefier* a porțiunii feromagnetice a circuitului magnetic.

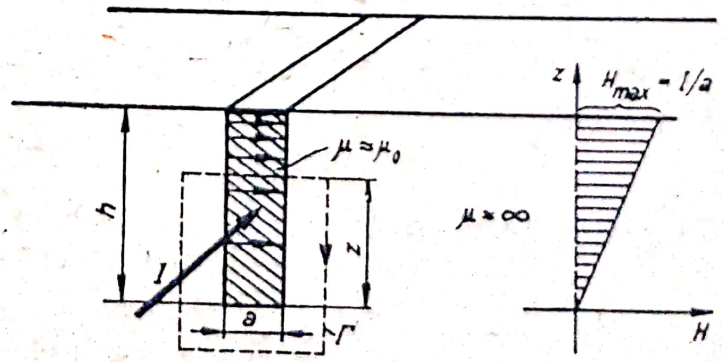


Fig. 25.8.

25.5.4. **Cîmpul magnetic într-o crestătură dreptunghiulară a unei mașini electrice.** Se consideră o crestătură dreptunghiulară la marginea unui corp feromagnetic de foarte mare permeabilitate ($\mu \approx \infty$ v. fig. 25.8), umplută complet la o bară dreptunghiulară conducătoare, străbătută de curentul continuu I.

Aplicînd legea circuitului magnetic conturului Γ și observînd că în fier $H=\frac{B}{\mu}\approx 0$, rezultă (presupunînd linii de cîmp practic drepte în crestătură):

$$\oint_{\Gamma}\overline{H}\cdot\overline{ds}=Ha=\frac{I}{ah}\cdot az=\frac{I}{h}\,z \text{ sau}$$

$$H=\frac{I}{ah}z\ (0\leqslant z\leqslant h)$$

adică un cîmp care variază liniar cu distanța de la adîncimea crestăturii.

La marginea de sus a crestăturii liniile de cîmp nu mai pot fi considerate drepte și de aceea calculul de mai sus rămîne doar o primă aproximație.

26. Circuite magnetice

Conform teoremei refracției liniilor de cîmp magnetic, aceste linii sînt practic tangențiale pe fața interioară a suprafeței corpurilor feromagnetice cu $\mu>>\mu_0$ (v. par. 25.4). De asemenea, deoarece la suprafața acestor corpuri se conservă componenta tangențială a vectorului $\overline{H}$ rezultă că în interiorul materialelor feromagnetice, componenta tangențială a inducției $\overline{B}=\mu\overline{H}$ este mare în comparație cu cea din exterior. Liniile inducției magnetice sînt deci conduse prin corpurile feromagnetice, aproximativ cum este condus curentul electric prin conductorii metalici. Deoarece liniile de inducție magnetică sînt închise sau practic închise, se numește *circuit magnetic* un dispozitiv în care aceste linii trec printr-o succesiune de corpuri feromagnetice, separate eventual prin întrefieruri.

Partea unui circuit magnetic înfășurată de bobine se numește *miez* sau *coloană*; partea neînfășurată se numește *jug* sau, eventual, *armătură*, dacă este mobilă; fețele care mărginesc întrefierul se numesc poli: polul nord (N) dacă prin fața respectivă liniile de cîmp ies din corpul feromagnetic și sud (S) în caz contrar.

Liniile de inducție magnetică se închid, în majoritate, prin fier și întrefier. Cele care nu se închid prin fier și întrefier se numesc linii de dispersiune.

Calculul circuitelor magnetice se face cu ajutorul legii circuitului magnetic și al legii fluxului magnetic. Calculul consistă în determinarea solenației necesare pentru a stabili un anumit flux fascicular util sau invers. Calculul aproximativ se face neglijînd dispersia magnetică, considerînd fluxul uniform repartizat pe secțiuni și aplicînd legea circuitului magnetic unei linii care se închide prin fier și întrefier. În acest mod s-a efectuat rezolvarea exemplului de la par. 25.5.3. În practică, calculul se sistematizează cum se arată în cele ce urmează.

26.1. Reluctanța. Permeanța

Legea magnetizației temporare (2.31) se poate pune și sub o formă integrală practică, folosită curent în calculul circuitelor magnetice.

Dacă $\overline{ds}$ este elementul de lungime al unei porțiuni neramificate de circuit magnetic — care constituie deci un tub de flux magnetic — suficient de subțire pentru a se considera fluxul repartizat uniform pe secțiunea lui — tensiunea magnetică între două puncte 1 și 2, dealungul curbei C (pe axa tubului), este conform relației (19.4):

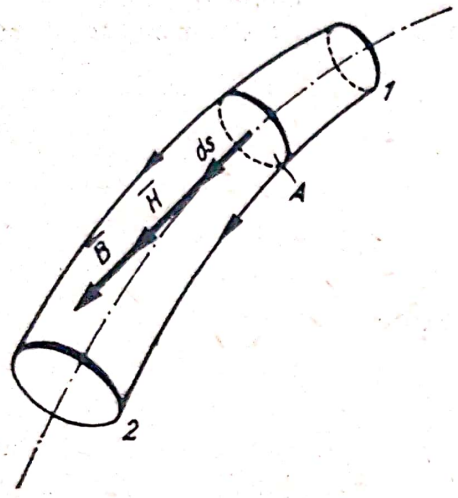


Fig. 26.1.

$$U_m=\int_{1\,(C)}^{2}\overline{H}\cdot\overline{ds}=\int_{1\,(C)}^{2}Hds=\int_{1\,(C)}^{2}\frac{B}{\mu}ds \qquad (26.1)$$

deoarece $\overline{B}\parallel\overline{H}\parallel\overline{ds}$ (curba C este o linie de cîmp), iar

$$\overline{B}=\mu\overline{H}, \qquad (26.2)$$

Se obține

$$U_m=\int_{1\,(C)}^{2}\frac{\Phi_f}{A\mu}ds=\Phi_f\int_{1\,(C)}^{2}\frac{ds}{A\mu} \qquad (26.3)$$

în care Φ_f este fluxul magnetic fascicular constant prin toate secțiunile tubului de flux (adică prin toate secțiunile porțiunii de circuit magnetic neramificat și fără dispersie).

Mărimea pozitivă definită de raportul dintre tensiunea magnetică și fluxul fascicular se numește *reluctanță* sau *rezistență magnetică* a porțiunii de circuit magnetic și se notează:

$$\boxed{R_m=\frac{U_m}{\Phi_f}}>0. \qquad (26.4)$$

Din relația 26.3 rezultă că reluctanța unui tub de flux magnetic are expresia:

$$R_m=\int_{1}^{2}\frac{ds}{\mu A} \qquad (26.5)$$

În cazul particular a porțiunilor de circuit omogen (de lungime l, de secțiune A constantă și permeabilitate μ (constantă), reluctanța este:

$$R_m=\frac{l}{\mu A} \qquad (26.5')$$

Scanned with OKEN Scanner

Unitatea de reluctanță (afectată de operația de raționalizare), este rezultată din raportul unităților tensiunii magnetice și fluxului magnetic. În sistemul MKSA raționalizat este amperspira pe weber $\left(\frac{A \cdot sp}{Wb}\right)$:

$1 \frac{A \cdot sp}{Wb} = 4\pi$ unități MKSA neraționalizat (4π decigilbert pe weber)

$= 4\pi \cdot 10^{-9}$ u CGS em $= 4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}$ u·CGS es.

Inversul reluctanței se numește *permeanță* și se notează:

$$\Lambda = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi_f}{U_m} = \mu \frac{A}{l} . \qquad (26.6)$$

Deoarece reluctanța este definită prin relația (26.4) se poate scrie:

$$\boxed{U_m = R_m \Phi_f} . \qquad (26.4')$$

Se observă o analogie formală între relațiile (26.4) și (12.31) aplicată circuitelor electrice, analogie care a făcut ca relația (26.4') să fie numită *„legea" lui Ohm pentru circuite magnetice*. În această analogie, tensiunea magnetică din lungul circuitului magnetic corespunde tensiunii electrice în lungul circuitului electric; fluxul magnetic fascicular corespunde intensității curentului electric; reluctanța corespunde rezistenței electrice.

Aceasta permite să se stabilească o analogie și între teoremele folosite în calculul circuitelor magnetice și cele folosite în calculul circuitelor electrice.

26.2. Teoremele lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice

26.2.1. Prima teoremă Kirchhoff. Din legea fluxului magnetic

$$\Phi_\Sigma = \iint \overline{B} . \overline{dA} = 0 \qquad (20.1)$$

rezultă că fluxul magnetic prin orice suprafață închisă Σ este nul (fig. 26.2). Aplicînd această lege unei suprafețe Σ ce conține un nod (punct de ramificație) al unui circuit magnetic, se obține relația

$$\Phi_\Sigma = \Phi_{f1} + \Phi_{f2} + \Phi_{f3} + \cdots = 0. \qquad (26.7)$$

Fluxurile sînt considerate pozitive cînd sînt îndreptate după normalele exterioare la suprafață (adică „ies" din nod), și negative în caz contrar (cînd „intră" în nod).

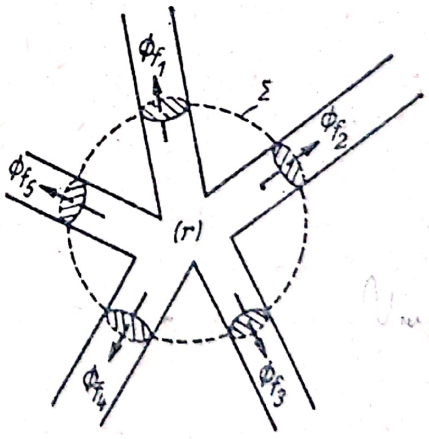


Fig. 26.2.

În notație strînsă, prima teoremă Kirchhoff pentru nodul r(r=1, 2, 3···N—1) se scrie analog cu teorema corespunzătoare (13.5') din electrocinetică:

$$\Sigma \Phi_{fk} = 0 \qquad (26.8)$$

și se enunță: *suma algebrică a fluxurilor magnetice, care trec prin laturile unui circuit magnetic ce concură într-un nod al acestui circuit, considerate negative cînd sînt îndreptate spre nod și pozitive în caz contrar, este nulă.*

26.2.2. **A doua teoremă Kirchhoff.** Se consideră ochiul p (fig. 26.3); se alege un sens pozitiv de circulație de-a lungul laturilor ochiului, adică sensul în care ar trebui să fie îndreptat $\overline{B}$ (sau $\overline{H}$) pentruca fluxul să rezulte pozitiv în sensul în care se efectuează integrala de linie a vectorului $\overline{H}$ și invers.

Se notează cu R_{m1}, R_{m2}, ··· reluctanțele laturilor, cu θ_1, θ_2, ··· solenațiile bobinelor ce înfășoară laturile; cu Φ_{f1}, Φ_{f2} ··· fluxurile fasciculare ce trec prin aceste porțiuni de circuit.

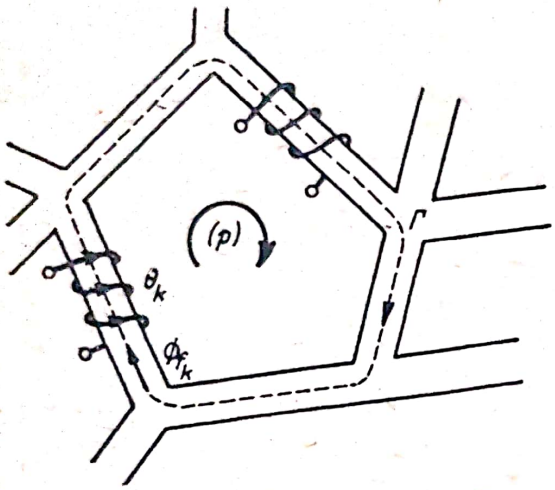


Fig. 26.3.

Conform legii circuitului magnetic aplicată în regim staționar sau cvasistaționar, relația (21.1):

$$U_{mm_\Gamma} = \theta_{s_\Gamma} = \sum_{(p)} \theta_k. \qquad (26.9)$$

Pe de altă parte, conform definiției, descompunînd integrala pe porțiuni:

$$U_{mm_\Gamma} = \oint_\Gamma \overline{H}\cdot\overline{ds} = \sum_{(p)} U_{mk} = \sum_{(p)} R_{mk}\Phi_{fk} \qquad (26.10)$$

în care U_{mk} este definit conform relației (19.4) și dat de (26.4′). Din relațiile (26.9) și (26.10) rezultă pentru fiecare ochi $p=1, 2, \cdots O$, a doua teoremă Kirchhoff

$$\sum_{(p)} \theta_k = \sum_{(p)} R_{m_k}\Phi_{fk} \qquad (26.11)$$

analogă relației (13.9) din electrocinetică și care se enunță: *În regim staționar și cvasistaționar, suma algebrică a solenațiilor care înlănțuie laturile fără dispersie magnetică ale oricărui ochi de circuit magnetic este egală cu suma algebrică a produselor reluctanțelor magnetice ale laturilor prin fluxurile magnetice fasciculare care trec prin ele (adică cu suma căderilor de tensiune magnetică).*

Cînd anumite laturi prezintă dispersie, se poate considera fluxul fascicular de dispersie ca fluxul unei noi laturi a circuitului magnetic legată în derivație între punctele extreme ale liniilor de inducție ale fluxului de dispersie. Reluctanța de dispersie corespunzătoare se evaluează aproximativ sau se măsoară.

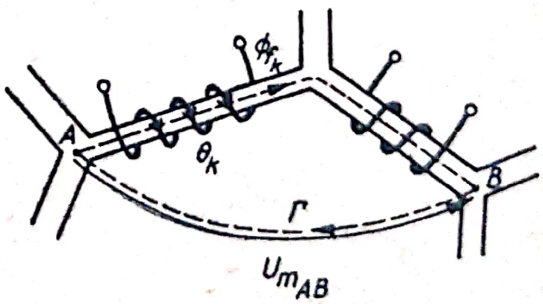


Fig. 26.4.

26.2.3. **Tensiunea magnetică între două puncte** (calculată prin aer). Se aplică a doua teoremă Kirchhoff unui ochi Γ format din laturile rețelei între două noduri A și B (fig. 26.4) care se închide prin aer. Dacă se parcurge ochiul de la A spre B prin laturi și de la B la A prin aer se obține:

$$\sum_{A\to B} \theta_k = \sum_{A\to B} R_{m_k}\Phi_{fk} - U_{m_{AB}} \qquad (26.12)$$

sau

$$U_{m_{AB}} = \sum_{A \to B} (R_{m_k} \Phi_{fk} - \theta_k) \qquad (26.12')$$

analogă relației (13.13) din electrocinetică.

26.2.4. Aplicație. Un circuit magnetic, cu întrefieruri neglijabile, are forma și dimensiunile din figura 26.5. Să se determine fluxurile din laturi, cînd curenții electrici i_1, i_2, i_3 ce pargurg înfășurările sînt dați. Se dau: $l = 30$ cm; $h = 40$cm; $A = 12$ cm^2; $\mu_r = 400$; $N_1 = N_2 = N_3 = N = 150$ sp; $i_1 = i_3 = 2A$, $i_2 = 4A$.

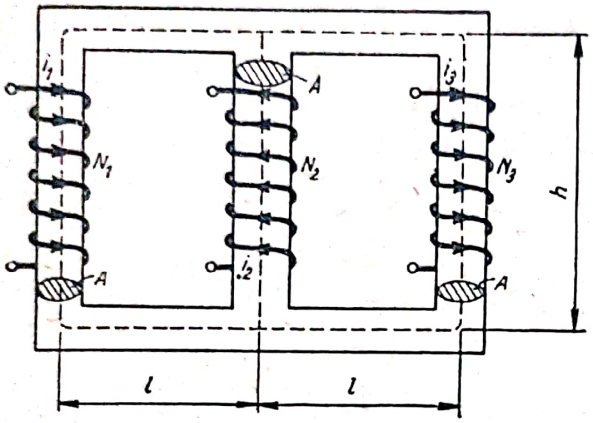


Fig. 26.5.

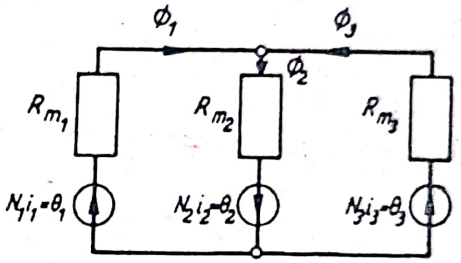


Fig. 26.6.

Pentru simplificarea calculului se desenează schema electrică echivalentă schemei magnetice (fig. 26.6). Se cunosc valorile și semnele solenațiilor θ_1, θ_2. θ_3 (luate ca sens în schema echivalentă conform regulii burghiului drept). Pentru fluxurile Φ_1, Φ_2, Φ_3 se iau sensuri arbitrare, care permit aplicarea teoremelor Kirchhoff (în cazul ales din fig. 26.6 sensurile fluxurilor corespund celor reale).

Aplicînd teoremele Kirchhoff, ca în cazul circuitelor electrice, se obține:

$$R_{m1} \Phi_{f1} + R_{m2} \Phi_{f2} = \theta_1 + \theta_2 \qquad (26.13)$$

$$R_{m2} \Phi_{f2} + R_{m3} \Phi_{f3} = \theta_2 + \theta_3 \qquad (26.13')$$

$$\Phi_1 + \Phi_3 = \Phi_2. \qquad (26.15)$$

Ținînd seama că prin datele problemei:

$$\theta_1 = \theta_3 = N i_1; \quad \theta_2 = N i_2 = 2\,\theta_1 \quad (i_2 = 2\, i_1)$$

$$R_{m1} = R_{m3} = \frac{2l+h}{A\mu}; \quad R_{m2} = \frac{h}{A\mu} (\text{cu } \mu = \mu_0 \mu_r)$$

se obține:

$$\Phi_1 = \Phi_3 = \frac{1}{2} \Phi_2 \text{ cu}$$

$$\Phi_1 = \frac{3\theta_1}{R_{m1} + 2R_{m2}} = \frac{3Ni_1}{\frac{2l+h}{A\mu} + 2\frac{h}{A\mu}}.$$

$$\Phi_1 = \frac{3.150.2}{\frac{2.0{,}3 + 0{,}4 + 2.0{,}4}{12.10^{-4}.4\pi 10^{-7}.400}} = \frac{9.10^2}{\frac{10^9}{192\pi}} 1{,}8 = 3.10^{-4} \text{Wb}$$

Deci:

$$\Phi_3 = 3.10^{-4} \text{Wb}$$

și

$$\Phi_2 = 6.10^{-4} \text{Wb}.$$

26.3. Teoremele reluctanțelor echivalente

Reluctanța echivalentă a unei porțiuni de circuit magnetic cu două „borne" de acces (două extremități de circuit) și fără solenații pe laturi este egală cu raportul între tensiunea magnetică aplicată între cele două „borne" și fluxul fascicular care intră printr-o „bornă" și iese prin cealaltă:

$$R_{me}=\frac{U_m}{\Phi_f}. \tag{26.15}$$

26.3.1. **Circuitul magnetic are n laturi în serie** (fig. 26.7). Din aplicarea teoremelor Kirchhoff, rezultă (fluxul fiind același):

$$U_m=\sum_{k=1}^{n}U_{mk}=\sum_{k=1}^{n}R_{mk}\Phi_f=\Phi_f\sum_{k=1}^{n}R_{mk}, \tag{26.16}$$

deci conform relațiilor (26.15) și (26.16):

$$\boxed{R_{me}=\sum_{k=1}^{n}R_{mk}.} \tag{26.17}$$

Reluctanța echivalentă a mai multor laturi conectate în serie (străbătute de același flux) este egală cu suma reluctanțelor laturilor (aceeași relație ca la rezistențe în serie).

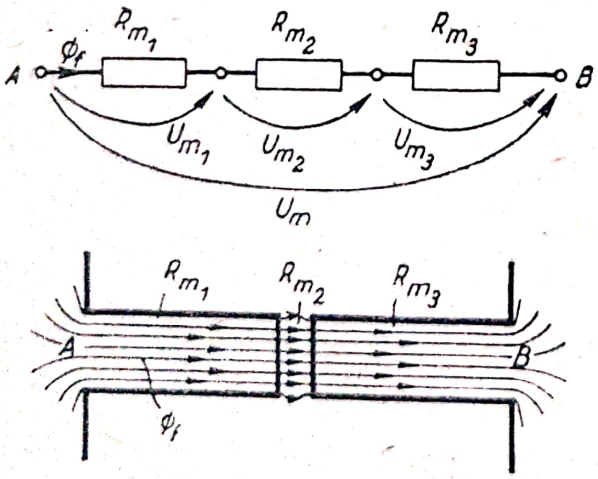


Fig. 26.7.

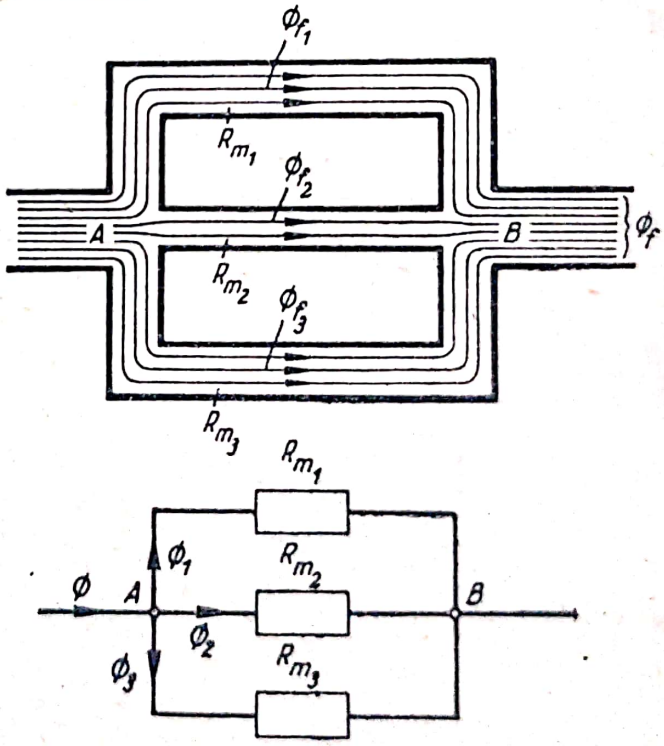


Fig. 26.8.

26.3.2. **Circuitul magnetic are n laturi în paralel** (fig. 26.8). Din aplicarea teoremelor Kirchhoff rezultă (tensiunea magnetică fiind aceeași la bornele tuturor laturilor):

$$\Phi_f=\sum_{k=1}^{n}\Phi_{fk}=\sum_{k=1}^{n}\frac{U_m}{R_{mk}}=U_m\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_{mk}}. \tag{26.18}$$

Din relaţiile (26.15) şi (26.18) se obţine:

$$\frac{1}{R_{me}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_{mk}}. \tag{26.19}$$

Inversul reluctanţei echivalente a mai multor laturi corectate în paralel (cărora li se aplică aceeaşi tensiune magnetică) este egală cu suma inverselor reluctanţelor acestor laturi (aceeaşi relaţie ca la rezistenţele în paralel).

Relaţia (26.19) se poate scrie şi utilizînd permeanţele definite prin relaţia (26.6):

$$\Lambda_e=\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k. \tag{26.20}$$

26.3.3. **Circuitul magnetic al unui electromagnet.** Se consideră electromagnetul din figura 26.9 cu dimensiunile şi permeabilităţile indicate în figură (cu fierul nesaturat şi permeabilitatea practic constantă). Se cere să se determine solenaţia $0=Ni$ (adică numărul de amperspire) necesară pentru producerea unui anumit flux Φ.

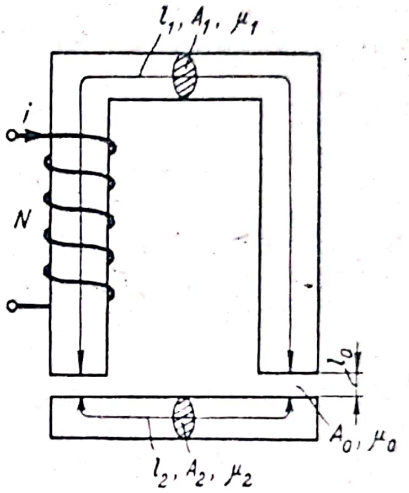


Fig. 26.9.

Circuitul magnetic fiind format din laturi în serie, rezultă:

$$Ni=\Phi_f\sum\frac{l}{\mu A}=\Phi_f\left[\frac{1}{\mu_1}\cdot\frac{l_1}{Al}+\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{l_1}{A_0}+\frac{1}{\mu_2}\cdot\frac{l_2}{A_2}+\frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{l_0}{A_0}\right]. \tag{26.21}$$

Problema poate fi pusă şi invers fiind cunoscut numărul de spire N al bobinei şi curentul i, se cere fluxul fascicular. Se obţine:

$$\Phi_f=\frac{Ni}{\sum\frac{l}{\mu A}}. \tag{26.22}$$

26.4. Teoremele generale ale teoriei reţelelor magnetice

Analogia dintre cele două teoreme ale lui Kirchhoff pentru circuitele magnetice şi cele două teoreme ale lui Kirchhoff pentru circuite electrice permite să se stabilească, în teoria reţelelor magnetice, teoreme corespunzătoare teoremelor teoriei reţelelor electrice de c.c. Bineînţeles aceste teoreme sînt valabile numai în cazul circuitelor magnetice liniare ($\mu=$ct.), adică pentru circuitele magnetice nesaturate şi ale căror laturi nu prezintă dispersie.

Se pot folosi, astfel, la rezolvarea circuitelor magnetice liniare: teorema superpoziţiei, teorema reciprocităţii, teorema Helmholtz-Thévenin etc.

Scanned with OKEN Scanner

26.5. Circuite magnetice neliniare

Practic, materialele feromagnetice din care sînt executate circuitele magnetice au permeabilitatea dependentă de intensitatea cîmpului magnetice adică sînt *materiale neliniare*, iar circuitele magnetice respective sînt circuit, neliniare. Această neliniaritate trebuie luată în considerație în special atunci cînd punctul de funcționare P, pe caracteristica magnetică a materialului, se apropie de regiunea de saturație. Calculul circuitelor magnetice neliniare se asemănă cu calculul circuitelor electrice neliniare de curent continuu (v. par. 14.3 și 14.4). Ecuațiile lui Kirchhoff pentru circuite magnetice își păstrează forma:

(I) $$\sum_{(r)}\Phi_{fk}=0 \text{ pentru } r=1, 2, \cdots, N-1; \tag{26.23}$$

(II) $$\sum_{(p)}\theta_k=\sum_{(p)}U_{mk} \text{ pentru } p=1, 2, \cdots, 0, \tag{26.24}$$

cu deosebirea că în acest caz, căderea de tensiune magnetică U_{mk} nu se expiră sub forma $R_{mk}\,\Phi_{fk}$, ci trebuie dată în funcție pe fluxul respectiv prin relația:

$$U_{mk}=f(\Phi_k), \tag{26.25}$$

care în general nu mai este liniară și reprezintă *caracteristica magnetică a laturii de circuit considerată*. Pentru a stabili alura caracteristicii magnetice, este necesar să se folosească curba de magnetizare a materialului (fig. 26.10), din care se construiește curba reprezentată de relația (26.25) pentru fiecare porțiune omogenă de lungime l și secțiune constantă A, considerînd fluxul reprezentat uniform pe secțiune. Se obține:

$$U_m=\int_1^2 \overline{H}\cdot\overline{ds}=H\cdot l$$
$$\text{și } \Phi_f=\iint\overline{B}\cdot\overline{dA}=BA, \tag{26.26}$$

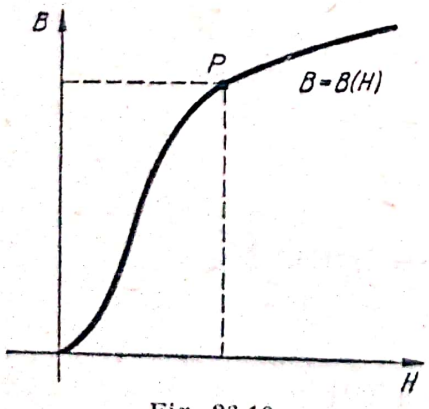


Fig. 26.10.

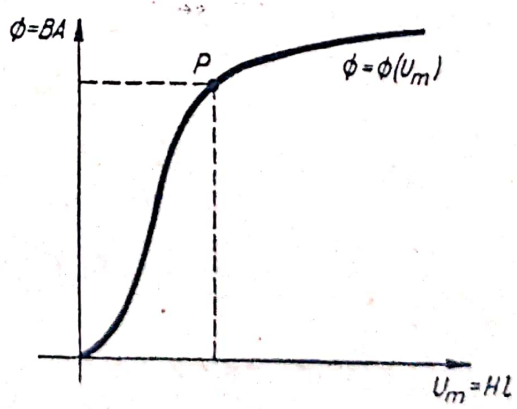


Fig. 26.11.

deoarece vectorii H, B, ds, dA coincid ca direcție, în această aproximație care consideră latura omogenă ca un tub de flux magnetic.

Prin urmare, pentru a construi curbele $U_m=f(\Phi_f)$, pentru diferite porțiuni de circuit este suficient ca ordonatele curbei de magnetizare să fie înmul-

ţite cu ariile secţiunilor, iar abscisele cu lungimile porţiunilor de circuit magnetic (fig. 26.11). La rezolvarea circuitelor magnetice se pot deosebi două cazuri (presupunînd cunoscute dimensiunile geometrice ale circuitului, numerele de spire ale înfăşurărilor şi curbele de magnetizare):

a. *Se cunosc fluxurile magnetice în diverse laturi ale circuitului şi trebuie determinată valoarea curenţilor din înfăşurări.*

În acest caz, se deduc valorile inducţiilor B pe diverse porţiuni ale circuitului din valorile fluxurilor şi se determină valorile H corespunzătoare din curbele de magnetizare sau se determină valorile U_m din diferitele caracteristici. Apoi prin scrierea legii circuitului magnetic pe drumuri închise — sau a teoremei a doua a lui Kirchhoff — se deduc valorile necesare pentru solenaţii şi deci curenţii de excitaţie.

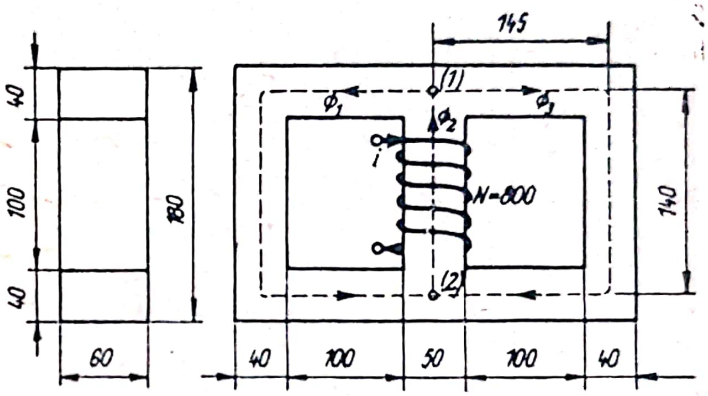


Fig. 26.12.

b. *Se cunosc curenţii din înfăşurări (deci solenaţiile) şi trebuie determinate valorile fluxurilor magnetice în diversele laturi ale circuitului.*

Se folosesc procedee analoge celor folosite pentru rezolvarea reţelelor electrice neliniare, aplicînd teoremele lui Kirchhoff şi curbele $U_{mk}=f(\Phi_k)$ cu metode grafice.

26.6. Aplicaţii

a) *Se consideră un circuit magnetic cu trei coloane*, executat din tolă silicioasă, cu întrefieruri neglijabile. Dimensiunile din figura 26.12 sînt în mm. Miezul central poartă o înfăşurare cu $N = 800$ spire. Să se calculeze curentul i necesar pentru a produce în coloanele extreme un flux $\Phi_1 = \Phi_3 = 2{,}4.10^{-3}$ Wb (se neglijează dispersia).

Soluţie: Aplicînd teorema întîi a lui Kirchhoff în nodul (1), se obţine:

$$\Phi_2=\Phi_1+\Phi_3=2.2{,}4.10^{-3}=4{,}8.10^{-3}\text{Wb}.$$

Lungimea medie a fiecărei coloane este:

$$l_1=l_3=2.\cdot 145+140=430 \text{ mm}=0{,}43 \text{ m}$$
$$l_2=140 \text{ mm}=0{,}14 \text{ m}.$$

Aria secţiunii fiecărei coloane este:

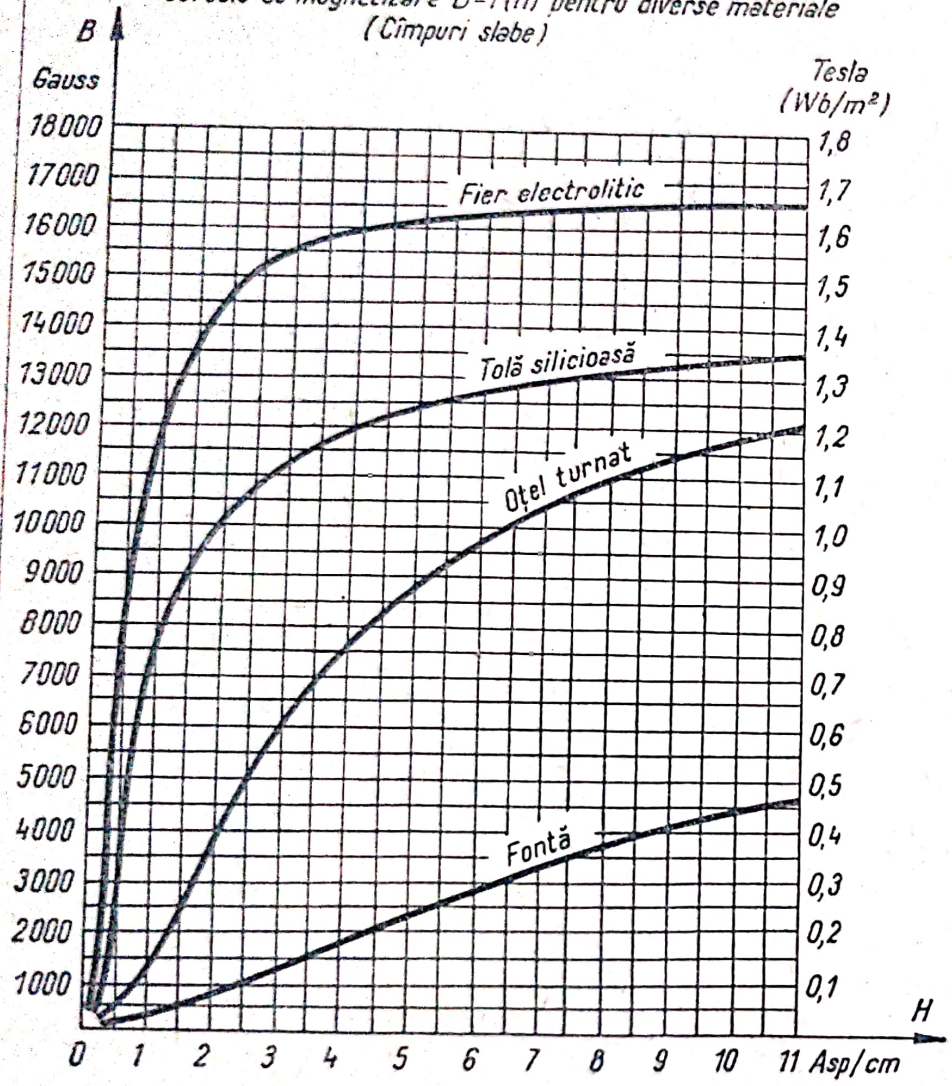
$$A_1=A_3=40\cdot 60=2\,400 \text{ mm}^2=2{,}4\cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$
$$A_2=50\cdot 60=3\,000 \text{ mm}^2=3\cdot 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Inducţiile magnetice în fiecare coloană:

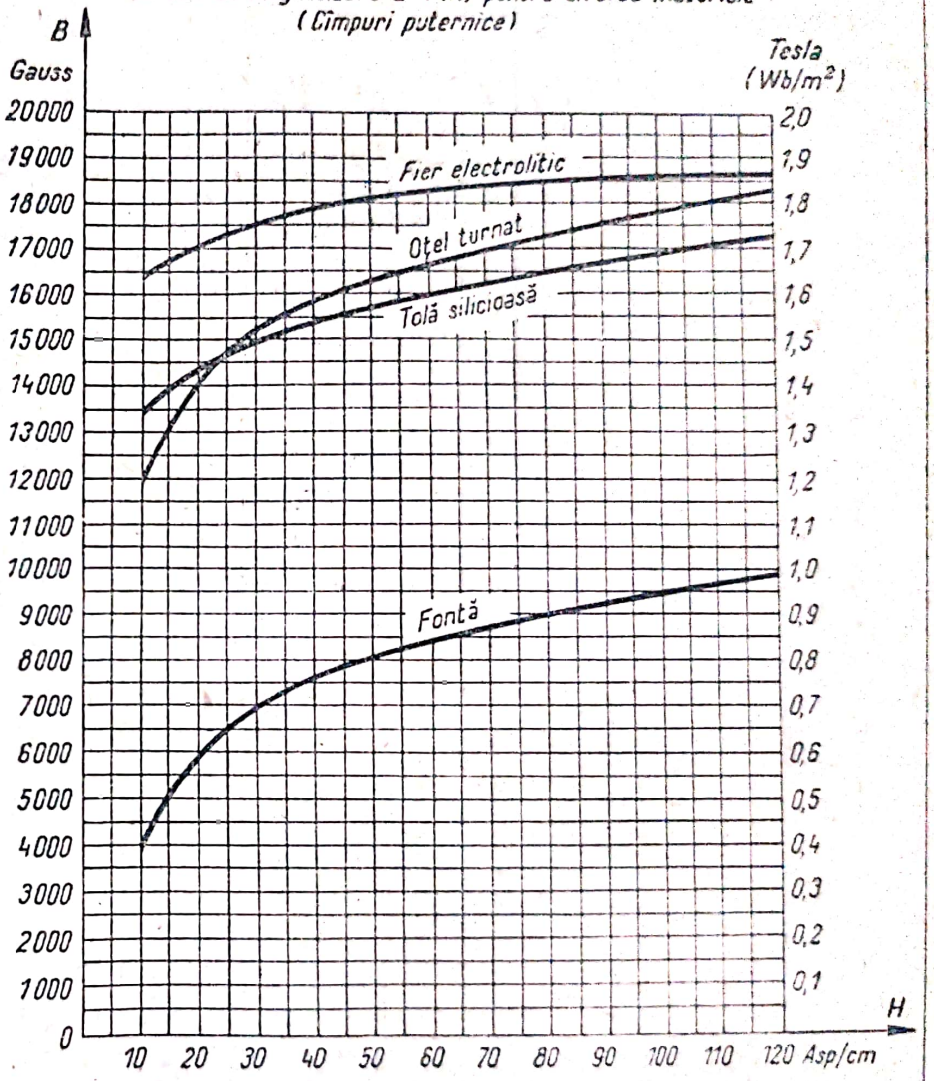
$$B_1=B_3=\frac{\Phi_1}{A_1}=\frac{2{,}4\cdot 10^{-3}}{2{,}4\cdot 10^{-3}}=1 \text{ Wb/m}^2$$

$$B_2=\frac{\Phi^2}{A_2}=\frac{4{,}8\cdot 10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}}=1{,}6\text{Wb/m}^2.$$

Curbele de magnetizare B=f(H) pentru diverse materiale
(Cîmpuri slabe)



Curbele de magnetizare B=f(H) pentru diverse materiale
(Cîmpuri puternice)



Scanned with OKEN Scanner

Valorile intensităților cîmpurilor magnetice rezultate din curba de magnetizare a tolei silicioase (v. Diagramele anexate):

$$H_1 = H_3 = 1{,}83\ \frac{\text{A.sp}}{\text{cm}} = 183\ \text{A·sp/m};\quad H_2 = 60\frac{\text{A.sp}}{\text{cm}} = 6\,000\ \frac{\text{A.sp}}{m}$$

În consecință:

$$\theta = \Sigma\, U_{m_k} = H_1\, l_1 + H_2\, l_2 = 183 \cdot 0{,}53 + 6\,000 \cdot 0{,}14 = 919\ \text{A·sp}$$

și deci:

$$i = \frac{\theta}{N} = \frac{919}{800} = 1{,}15\ \text{A}.$$

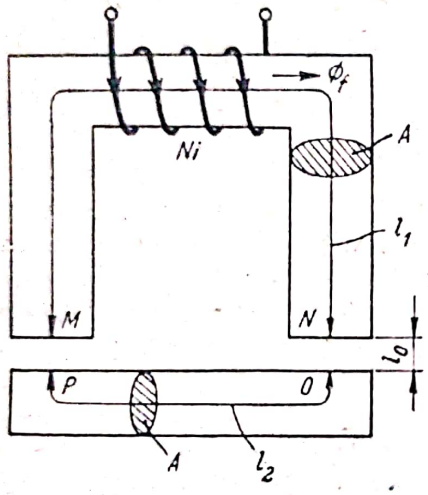


Fig. 26.13.

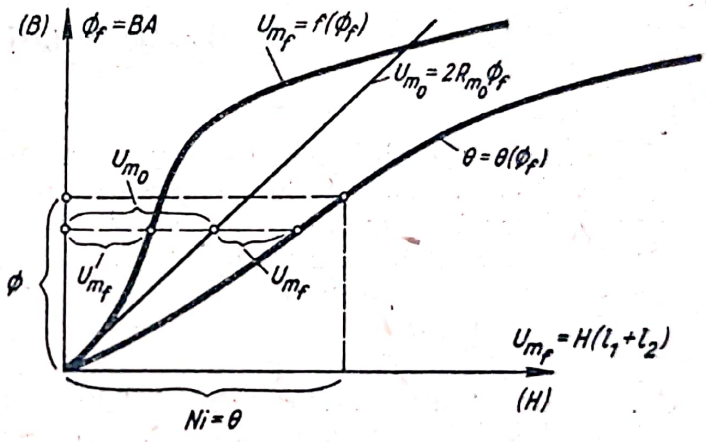


Fig. 26.14.

b) Magnetizarea circuitului din figura 26.13 *se face sub acțiunea unei t.m.m. datorite unei solenații* $\theta = Ni$ A.sp. Să se determine valoarea fluxului magnetic din circuit (se neglijează fluxul de dispersie).

Circuitul este realizat din același material feromagnetic, are aria secțiunii constante, A, și două întrefieruri.

Soluție. Se deduce caracteristica magnetică $U_{m_f} = f(\Phi_f)$ a porțiunii de fier a circuitului de lungime (însumată) $l_1 + l_2$ din curba de magnetizare a materialului cu $U_{mf} = H(l_1 + l_2)$ și $\Phi_f = BA$.

Alura curbei rămîne aceeași ca a curbei de magnetizare și este necesară doar o nouă gradare a axelor de coordonate (fig. 26.14).

Teorema a doua a lui Kirchhoff aplicată acestui circuit magnetic se scrie:

$$\theta = \Sigma U_{m_k} = U_{m_{MN}} + U_{m_{NO}} + U_{m_{OP}} + U_{m_{PM}}$$

Deoarece:

$$U_{m_{MN}} + U_{m_{OP}} = U_{m_f} = f(\Phi_f);\quad \theta = Ni$$

$$U_{m_{NO}} = U_{m_{PM}} = R_{m_{MO}}\quad \Phi_f = \frac{l_0}{\mu_0 A}\Phi_f$$

(întrefierul fiind o porțiune liniară de reluctanță cunoscută), se ajunge la forma:

$$\theta = U_{m_f} + \frac{2l_0}{\mu_0 A}\Phi_f = U_{m_f} + U_{m_0}\ \text{cu}\ U_{m_0} = \frac{2l_0}{\mu_0 A}\Phi_f. \qquad (26.27)$$

Al doilea termen din membrul al doilea U_{m_0} este căderea de tensiune din cele două întrefieruri însumate și se reprezintă printr-o dreaptă în diagrama Φ_f, U_m (fig. 26.14), care se construiește fără dificultăți.

Ecuația (26.27) se rezolvă grafic însumînd punct cu punct, la Φ_f dat, abscisele celor două curbe U_{mf} și U_{m_0}. Se obține astfel caracteristica rezultantă a circuitului magnetic $\theta=\theta$ (Φ_f) construită prin puncte. La un $\theta=Ni$ dat se deduce grafic, fără dificultăți, fluxul Φ_f care corespunde.

27. Inductivități

Calculul fluxului care trece printr-un circuit, produs de curentul ce trece prin acel circuit sau produs de curentul din alt circuit, duce la introducerea unei noi mărimi, numită *inductivitate* sau *inductanță*. Această mărime este definită de *raportul dintre fluxul magnetic care străbate o suprafață limitată de conturul unui circuit și curentul care îl produce* (oricare alți curenți fiind considerați nuli).

Dacă în apropierea circuitelor există numai materiale liniare de permeabilitate constantă), inductivitatea depinde numai de dimensiunile și forma circuitului și de permeabilitatea magnetică a mediului. În cazul materialelor feromagnetice (μ dependent de H), inductivitatea nu este constantă, ci este funcție de curent.

27.1. Inductivități proprii și mutuale

În expunerea care urmează, *mediile magnetice se consideră liniare* (μ nedependent de H). Se consideră două circuite cu N_1 și N_2 spire de conture Γ_1 și Γ_2 și se presupune (fig. 27.1) că numai primul circuit este străbătut de curent (curentul i). Se notează cu $\Phi_{f_{11}}$ fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce trece printr-o spiră a circuitului 1 și cu $\Phi_{f_{21}}$ fluxul fascicular produs de circuitul 1, ce trece printr-o spiră a circuitului 2.

Se convine ca notația acestor fluxuri să fie afectată de doi indici: primul indică circuitul prin a cărui suprafață trece fluxul, iar al doilea — curentul care produce fluxul respectiv. Se notează de asemenea cu $\Phi_{d_{21}}$ fluxul de dispersie al circuitului 1 față de 2, adică fluxul fascicular produs de circuitul 1 ce nu trece prin circuitul 2. Rezultă evident:

$$\Phi_{f_{11}}=\Phi_{f_{21}}+\Phi_{d_{21}} \tag{27.1}$$

Se numește *inductivitate proprie* L_{11} a circuitului 1, raportul pozitiv dintre fluxul total (Φ_{11}) prin circuitul 1, produs de curentul acelui circuit (în sensul

asociat după regula burghiului drept sensului curentului) și curentul (i_1) care îl produce:

$$L_{11}=\frac{\Phi_{11}}{i_1}=\frac{N_1\Phi_{f11}}{i_1}>0 \tag{27.2}$$

Inductivitatea (inductanța) proprie se mai numește autoinductanță sau coeficient de inducție proprie (uneori: de selfinducție); cînd nu există ambiguitate se notează fără indici, cu simbolul L sau cu un singur indice, L_1. Mediul fiind liniar din punctul de vedere magnetic, rezultă din teorema superpoziției cîmpurilor magnetice că fluxurile sînt proporționale cu curenții care le produc. Raportul lor este, deci, constant, adică inductivitatea proprie L_{11} este o mărime de material, care depinde de natura materialului magnetic, de dimensiunile și forma circuitului și de numărul său de spire, dar nu depinde de mărimea curentului, sau a fluxului (teorema inductivității). Deoarece cîmpul $\overline{H}_1$ produs de primul circuit e proporțional cu N_1, rezultă că Φ_{f11} e proporțional cu N_1, iar inductivitatea proprie e proporțională *cu pătratul* N_1^2 al numărului de spire.

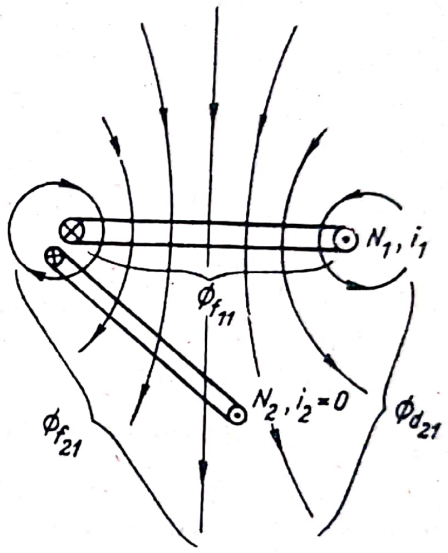


Fig. 27.1.

Se numește *inductivitate mutuală* L_{21}, între circuitele 1 și 2, raportul dintre fluxul total (Φ_{21}) produs de circuitul 1, care trece prin circuitul 2, și curentul (i_1) care îl produce:

$$L_{21}=\frac{\Phi_{21}}{i_1}=\frac{N_2\Phi_{f21}}{i_1}\gtrless 0 \tag{27.3}$$

Inductivitatea (inductanța) mutuală se mai numește coeficient de inducție mutuală. Ca și inductivitatea proprie într-un mediu magnetic liniar, inductivitatea mutuală depinde numai de natura materialului, de dimensiunile și forma circuitelor, de poziția lor relativă. Ea scade cu creșterea distanței dintre circuite și e proporțională cu produsul N_1N_2 între numerele de spire ale celor două bobine.

Deoarece sensul de referință al curentului i_2 din al doilea circuit e arbitrar și deoarece fluxul se consideră pozitiv în sensul asociat după regula burghiului drept sensului curentului i_2, L_{21} poate rezulta pozitivă sau negativă, după sensurile de referință alese în cele două circuite.

Inductivitatea mutuală (și uneori modulul ei) se mai notează cu simbolul M.

În mod analog se definesc:

— inductivitatea proprie a circuitului 2:

$$L_{22}=\frac{\Phi_{22}}{i_2}=N_2\frac{\Phi_{f22}}{i_2}\,; \tag{27.4}$$

— inductivitatea mutuală între circuitul 2 și 1:

$$L_{12}=\frac{\Phi_{12}}{i_2}=N_1\frac{\Phi f_{12}}{i_2} \tag{27.4'}$$

Se poate demonstra că inductivitățile mutuale satisfac relațiilor de reciprocitate: $L_{12}=L_{21}$. (27.5)

Se mai constată că *dacă nu există dispersiune* ($\Phi_{21}=\frac{N_2}{N_1}\Phi_{11}$ și $\Phi_{12}=\frac{N_1}{N_2}\Phi_{22}$) există relația

$$L_{12}^2=L_{11}L_{22}. \tag{27.6}$$

Cunoscînd inductivitățile proprii și mutuale ale unui sistem de circuite, se poate calcula fluxul prin orice circuit, dacă se dau curenții din toate circuitele.

Dacă se ține seama de definiția dată pentru inductivitate, fluxul total prin circuitul j, produs de curentul k, este $\Phi_{jk}=L_{jk}\,i_k$, iar fluxul total prin circuitul j, produs de *toți* curenții, se poate calcula prin superpoziție (mediul fiind liniar) ca sumă a fluxurilor produse de fiecare curent în parte, adică $\Phi_j=\sum_{k=1}^{n}\Phi_{jk}$, unde n e numărul circuitelor. Explicit rezultă dacă i_1, i_2, ..., i_n sînt curenții prin n circuite electrice, fluxurile Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n ce trec prin cele n circuite au expresiile liniare și omogene:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=L_{11}i_1+L_{12}i_2+\cdots+L_{1n}i_n\\ \Phi_2&=L_{21}i_1+L_{22}i_2+\cdots+L_{2n}i_n\\ \Phi_n&=L_{n1}i_1+L_{n2}i_2+\cdots+L_{nn}i_n\end{aligned}\right\}\quad\text{sau}\quad \Phi_j=\sum_{k=1}^{n}L_{jk}i_k,\ j=1,2,\ldots,n \tag{27.7}$$

numite *relațiile lui Maxwell privitoare la inductivități.*

27.2. Calculul inductivităților. Unități de măsură

27.2.1. Calculul direct al inductivităților. Se procedează în felul următor:

— se presupune circuitul (bobina) parcurs de curent;

— se calculează inducția magnetică $\overline{B}$, în diferite puncte din spațiu (ceea ce se face simplu numai în cazuri particulare);

— se calculează fluxul $\Phi=\iint \overline{B}\,\overline{dA}=N\Phi_f$ prin circuitul considerat;

— se calculează inductivitatea $L=\frac{\Phi}{i}$ (27.2').

Exemplu. *Calculul inductivității proprii a unei bobine toroidale* (fig. 21.4). Cu ajutorul relației (21.21) se deduce expresia inducției B:

$$B=\mu H=\mu\frac{Ni}{l}. \tag{27.8}$$

Fluxul magnetic fascicular prin secțiunea A a torului este:

$$\Phi_f = BA = \mu \frac{Ni}{l} A. \tag{27.9}$$

Deci:

$$L = N \frac{\Phi_f}{i} = \mu \frac{N^2}{l} A. \tag{27.10}$$

Considerînd o bobină cilindrică foarte lungă (neglijînd cîmpul magnetic din exteriorul ei), cu relația (21.22) se obține o expresie analogă:

$$L = \mu N \cdot N_s \cdot A = \mu \frac{N^2}{l} A = \mu N_s^2 Al, \tag{27.10'}$$

în care: N_s este numărul de spire pe unitatea de lungime.

Acest exemplu pune în evidență faptul că inductivitatea este proporțională cu permeabilitatea mediului și cu secțiunea bobinei și invers proporțională cu lungimea ei (la N dat).

Dacă bobina nu este suficient de lungă, în expresia inductivității apare un coeficient de corecție, $k = f\left(\frac{l}{A}\right) < 1$,:

$$L = \mu \frac{N^2}{l} Ak. \tag{27.11}$$

27.2.2. **Calculul inductivității cu ajutorul reluctanței (sau permeanței).** Se consideră o bobină cu circuit magnetic fără dispersie, a cărui reluctanță totală este R_m (suma reluctanțelor în serie la un circuit neramificat, respectiv reluctanța echivalentă în raport cu latura bobinată în cazul general).

Avem:

$$L = N \frac{\Phi_f}{i} = N \frac{1}{i} \frac{\theta}{R_m} = \frac{N^2}{R_m}$$

sau

$$\boxed{L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \Lambda.} \tag{27.12}$$

Inductivitatea proprie este egală cu raportul între pătratul numărului de spire al bobinei și reluctanța totală (echivalentă) a circuitului magnetic respectiv.

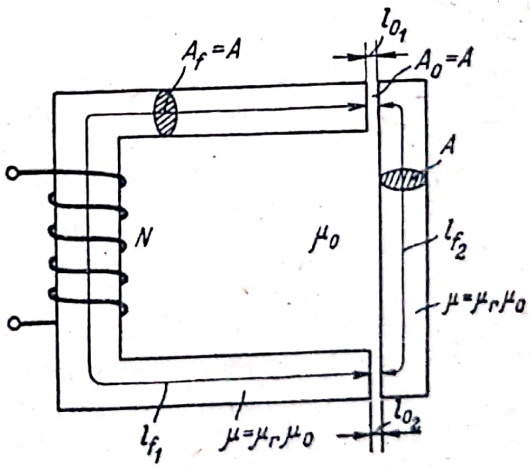


Fig. 27.2.

Exemplu. Expresia inductanței înfășurării electromagnetului din figura 27.2 este (cu $l_{f_1} + l_{f_2} = l_f$ și $l_{01} + l_{02} = l_0$):

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\Sigma \frac{l}{\mu A}} = \frac{N^2}{\frac{l_f}{\mu A_f} + \frac{l_0}{\mu_0 A_0}} = \frac{N^2 \mu_0 A}{\frac{l_f}{\mu_r} + l_0}$$

sau

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l_f + \mu_r l_0}. \tag{27.13}$$

27.2.3. **Unități de măsură pentru inductivități.** Unitatea de inductivitate în sistemul MKSA (raționalizat și neraționalizat) se numește *henry* (H)

$$1\text{H}=\frac{1\text{ Wb}}{1\text{ A}}=10^9\text{ u.CGS em („centimetri")}=\frac{1}{9.10^{11}}\text{ u.CGS es.}$$

Sînt foarte utilizați submultiplii: 1 mH$=10^{-3}$ H și 1 μH$=10^{-6}$H.

Din orice expresie a unei inductivități, de exemplu din relația 27.10 se deduce unitatea de permeabilitate magnetică: henry/metru (H/m).

27.3. Compunerea inductivităților în serie

Pentru orice circuit electric inductivitatea proprie este pozitivă ($L_{jj}>0$), deoarece curentul din circuit și fluxul pe care îl produce sînt asociate după regula burghiului drept, aceeași care a fost folosită în definiția inductivității.

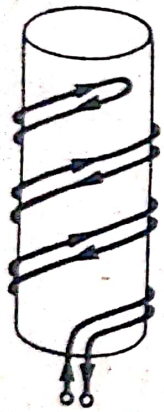


Fig. 27.3.

Pentru a micșora inductivitatea la executarea rezistențelor pure, pentru aparate electrice de măsură, se înfășoară două fire pe o carcasă (fig. 27.3) străbătute de curenți în sens contrar (înfășurare antiinductivă). Totuș, rămîn încă linii de inducție magnetică necompensate, care străbat chiar conductorii bobinei bifilare, și al căror flux determină existența inductivității foarte reduse a circuitului.

Spre deosebire de inductivitatea proprie, inductivitatea mutuală poate fi pozitivă, negativă sau nulă. Inductivitatea mutuală este pozitivă cînd, pentru anumite sensuri de referință ale curenților, fluxul produs de un circuit străbate celălalt circuit în sensul fluxului său propriu, și negativă în caz contrar.

Dacă circuitul electric neramificat conține mai multe bobine, deci mai multe inductivități, acestea sînt în serie din punctul de vedere electric. Se pune problema determinării inductivității totale a circuitului în funcție de inductivitățile proprii și mutuale ale bobinelor componente.

Se consideră cazul a două bobine parcurse de curenții i_1 și i_2. Conform relației lui Maxwell (27.7), fluxul ce trece prin fiecare bobină este:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1&=L_{11}i_1+L_{12}i_2\\ \Phi_2&=L_{21}i_1+L_{22}i_2.\end{aligned}\right\}\qquad(27.14)$$

Dacă cele două bobine sînt în serie din punct de vedere electric, $i_1=i_2=i$, și relațiile (27.14) devin:

$$\Phi_1=(L_{11}+L_{12})i$$

$$\Phi_2=(L_{22}+L_{21})i$$

$$L_{21}=L_{12}.$$

Inductivitatea totală a circuitului este:

$$L_t = \frac{\Phi_t}{i} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{i} = L_{11} + L_{22} + 2L_{12}. \qquad (27.15)$$

În relația (27.15) trebuie luat în considerare semnul lui L_{12}. Fluxul unei bobine prin cealaltă poate avea același sens cu fluxul propriu al celeilalte (bobinele sînt în concordanță din punctul de vedere magnetic) sau poate avea sens contrar cu acest flux (bobinele sînt în opoziție din punct de vedere magnetic). De exemplu în figura 27.4 bobinele sînt montate „în concordanță". Rezultă pentru L_{12} o valoare pozitivă:

$$L_{12} = M.$$

În figura 27.5, bobinele sînt montate în opoziție. Rezultă pentru L_{12}, o valoare negativă:

$$L_{12} = -M \text{ cu } M = |L_{12}|.$$

Dacă se notează pentru simplificarea scrierii:

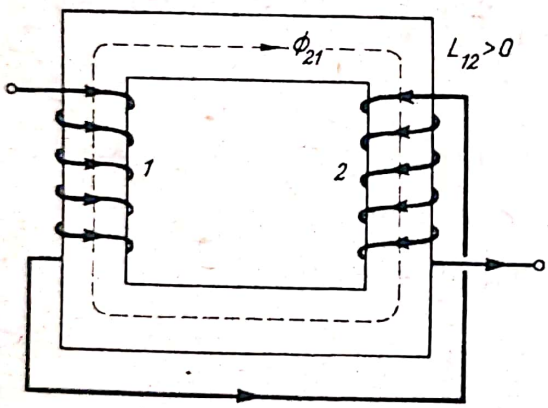


Fig. 27.4.

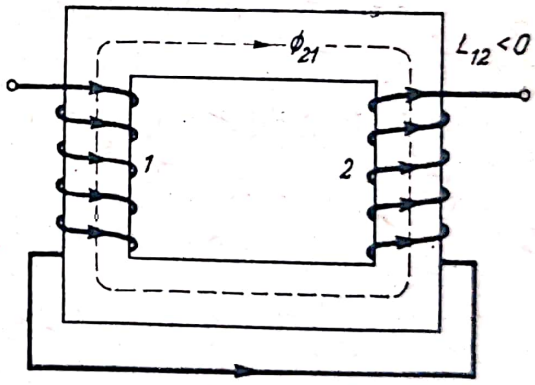


Fig. 27.5.

$$L_{11} = L_1 \text{ și } L_{22} = L_2$$

se obține din relația (27.15):

$$\boxed{L_t = L_1 + L_2 \pm 2M.} \qquad (27.16)$$

după cum bobinele sînt în concordanță (+) sau în opoziție (—) din punctul de vedere magnetic.

În mod obișnuit, nu se figurează explicit structura circuitului magnetic al bobinelor, ca în figurile 27.4 și 27.5. Pentru a evita confuziile cu privire la semnul inductivității mutuale, se adoptă următoarea convenție: Orice indicare a valorii (algebrice) unei inductivități mutuale L_{12} e însoțită de însemnarea cu un asterisc a uneia dintre bornele fiecărei bobine. Dacă sensurile curenților prin cele două bobine cuplate magnetic sînt orientate în același

mod față de bornele „marcate" cu asterisc, inductivitatea mutuală corespunzătoare are valoarea indicată L_{12} (fig. 27.6, *a*); dacă sensurile curenților nu sînt orientate în același mod față de bornele marcate (unul iese și altul intră), inductivitatea mutuală corespunzătoare acestor sensuri are valoarea $-L_{12}$ (fig. 27.6, *b*). Bornele marcate cu asterisc se mai numesc borne polarizate.

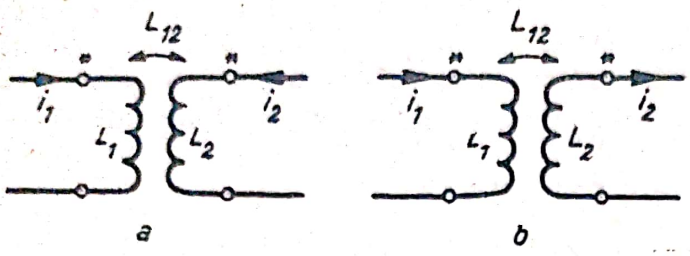


Fig. 27.6.

27.4. Inductivități de dispersie

În mod normal, numai o parte din fluxul fascicular propriu produs de un circuit electric trece prin alt circuit electric. Această parte din fluxul fascicular propriu se numește *flux fascicular util*. Cealaltă parte, care se închide direct prin aer, se numește *flux de dispersie* (fig. 27.1) sau flux de scăpări. Așa cum s-a indicat în par. 27.1, fluxul de dispersie este diferența între fluxul fascicular propriu și fluxul fascicular util:

$$\Phi_{fd_{21}}=\Phi_{f_{11}}-|\Phi_{f_{21}}|>0 \qquad (27.1)$$

(S-a luat modulul, pentru că $\Phi_{f_{21}}$ poate fi și negativ față de sensul adoptat la circuitul *2*).

Se numește *inductivitate de dispersie* a circuitului *1* față de *2*, partea din inductivitatea proprie a circuitului *1* corespunzătoare fluxului de dispersiune față de *2*:

$$L_{d21}=N_1\frac{\Phi_{fd_{21}}}{i_1}=N_1\frac{\Phi_{f_{11}}}{i_1}-N_1\frac{\Phi_{f_{21}}}{i_1}$$

Ținînd seama de relațiile (27.2) și (27.3) se obține:

$$\boxed{L_{d21}=L_{11}-\frac{N_1}{N_2}|L_{21}|>0} \qquad (27.17)$$

În mod analog, inductivitatea de dispersie a circuitului *2* față de *1* este:

$$\boxed{L_{d12}=L_{22}-\frac{N_2}{N_1}|L_{12}|>0} \qquad (27.18)$$

Se observă că, în general, $L_{d12}\neq L_{d\,21}$.

Prin urmare, inductivitatea proprie a unui circuit se poate scrie sub forma:

$$L_{11}=L_{d21}+\frac{N_1}{N_2}|L_{21}|=L_{d21}+L_{u21} \qquad (27.19)$$

în care

$$L_{u21}=\frac{N_1}{N_2}|L_{21}|>0 \qquad (27.20)$$

se numește *inductivitate utilă a circuitului* 1 *față de* 2 și este partea din inductivitatea proprie a circuitului 1 corespunzătoare fluxului util față de 2.

În mod similar:

$$L_{u_{12}}=\frac{N_2}{N_1}|L_{12}|. \tag{27.21}$$

În tehnică se operează cu anumiți coeficienți care definesc gradul de dispersie al circuitelor. Se definește astfel *coeficientul de cuplaj magnetic* a două bobine:

$$k=\sqrt{\frac{L_{21}L_{12}}{L_{11}L_{22}}}=\frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}=\frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}. \tag{27.22}$$

Bobinele necuplate magnetic au $L_{12}=0$, deci $k=0$.

Bobinele cuplate perfect au $L^2_{12}=L_{11}L_{22}$, deci $k=1$.

În general $0\leqslant k\leqslant 1$.

Se mai definește și un *coeficient de dispersie*:

$$\sigma=1-k^2=\frac{L_{11}L_{22}-L_{12}L_{21}}{L_{11}L_{22}}=\frac{L_1L_2-M^2}{L_1L_2}. \tag{27.23}$$

Cînd $k=0$, $\sigma=1$ (dispersie maximă): circuitele sînt necuplate.

Cînd $k=1$, $\sigma=0$ (dispersie nulă): circuitele sînt cuplate perfect.

Aplicație (fig. 27.7). Se consideră doi solenoizi cilindrici drepți foarte lungi, coaxiali, de raze a_1 și $a_2>a_1$ și de aceeași lungime l, situați în aer ($\mu\approx\mu_0$). Inductivitățile proprii ale celor doi solenoizi sînt (cu 27.10'):

$$L_{11}=\mu_0N_1^2\frac{\pi a_1^2}{l} \quad \text{și} \quad L_{22}=\mu_0N_2^2\frac{\pi a_2^2}{l}.$$

Inductivitatea mutuală $L_{12}=L_{21}$ se calculează considerînd solenoidul interior parcurs de curentul i_1 și calculînd succesiv:

— cîmpul propriu (v. rel. 21.21):

$$\begin{cases} H_1\approx\dfrac{N_1i_1}{l} & \text{în interiorul solenoidului} \\ H_1\approx 0 & \text{în exteriorul solenoidului;} \end{cases}$$

— fluxul fascicular printr-o spiră a solenoidului exterior (egal în modul cu fluxul fascicular propriu, deoarece între cei doi solenoizi nu există cîmp):

$$\Phi_{f21}=-\pi a_1^2\mu_0H_1=-\mu_0\frac{N_1i_1}{l}\pi a_1^2$$

(semnul minus corespunde sensurilor de referință indicate în figură). Inductivitatea mutuală rezultă

$$L_{21}=\frac{N_2\Phi_{f21}}{i_1}=-\mu_0\frac{N_1N_2\pi a_1^2}{l}=L_{21}<0.$$

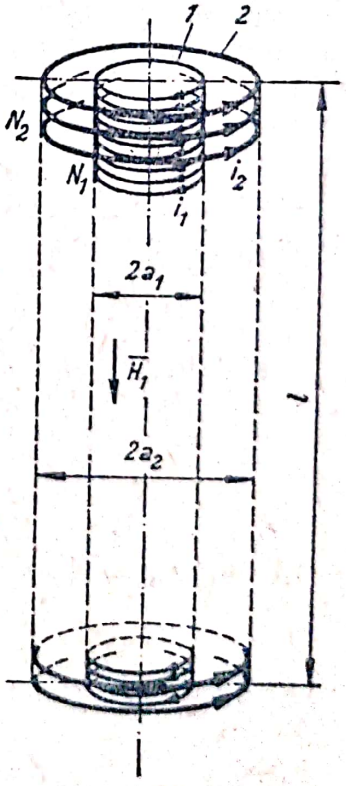


Fig. 27.7.

Cu valorile inductivităților calculate mai înainte, se pot calcula:
— inductivitatea de dispersie a lui (1) față de (2):

$$L_{d_{21}} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2}|L_{12}| = 0 \quad \text{[toate liniile de cîmp ale lui (1) trec prin (2)]};$$

— inductivitatea de dispersiune a lui (2) față de (1):

$$L_{d_{12}} = L_{22} - \frac{N_2}{N_1}|L_{12}| = \frac{\mu_0 N_2^2}{l}\pi(a_2^2 - a_1^2);$$

— inductivitatea utilă a lui (1) față de (2): $L_{u_{21}} = \frac{N_1}{N_2}|L_{12}| = L_{11}$;

— inductivitatea utilă a lui (2) față de (1): $L_{u_{12}} = \frac{N_2}{N_1}|L_{12}| = \frac{N_2^2}{N_1^2}L_{11}$;

— coeficientul de cuplaj magnetic: $k = |L_{12}|/\sqrt{L_{11}L_{22}} = a_1/a_2 < 1$;

— coeficientul de dispersie: $\sigma = 1 - k^2 = (a_2^2 - a_1^2)/a_2^2 < 1$.

27.5. Exprimarea t.e.m. induse cu ajutorul inductivităților

Expresia fluxului total care trece prin circuitul 1 este, conform relației lui Maxwell (27.7):

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2.$$

Presupunînd inductivitățile invariabile (circuite rigide, fără piese mobile), t.e.m. indusă prin variația în timp a acestui flux în circuitul (1) este:

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_{11}\frac{di_1}{dt} - L_{12}\frac{di_2}{dt}. \tag{27.24}$$

Primul termen se numește *tensiune electromotoare de inducție proprie* (sau de autoinducție):

$$e_{11} = -L_{11}\cdot\frac{di_1}{dt}. \tag{27.25}$$

Al doilea termen se numește *tensiune electromotoare de inducție mutuală*, de la circuitul (2) la circuitul (1):

$$e_{12} = -L_{12}\frac{di_2}{dt}. \tag{27.26}$$

În cazul unui singur circuit, care *nu este rigid*, astfel că inductivitatea poate varia în timp, tensiunea electromotoare indusă se poate scrie:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} - i\frac{dL}{dt}$$

în care:

$$\left(-L\frac{di}{dt}\right) \tag{27.28}$$

este t.e.m. indusă prin transformare (prin pulsație, static),

iar

$$\left(-i\frac{dL}{dt}\right) \tag{27.29}$$

este t.e.m indusă prin mișcare.

27.6. Calculul inductivităților unor circuite aeriene

27.6.1. Calculul inductivității unei linii aeriene duble formată din două fire rectilinii paralele. Lungimea liniei este l, distanța între axele conductorilor este $d \ll l$, raza conductorului este $a \ll d$.

Inductivitatea liniei datorită fluxului din aer. Intensitatea cîmpului magnetic dat de *unul* dintre conductori la distanța r de conductor este, conform relației (25.17):

$$H=\frac{i}{2\pi r},$$

dacă i este curentul care străbate fiecare fir al liniei.

Fluxul prin suprafața S (fig. 27.8) dat de unul dintre conductoare este

$$\Phi_{ext}=\iint_S \bar{B}\cdot d\bar{A}=\mu_0\int H\cdot ldr=$$

$$=\frac{\mu_0 il}{2\pi}\int_a^{d-a}\frac{dr}{r}=\frac{\mu_0 il}{2\pi}\ln\frac{d-a}{a}\approx\frac{\mu_0 il}{2}\ln\frac{d}{a} \tag{27.30}$$

deoarece $d \gg a$.

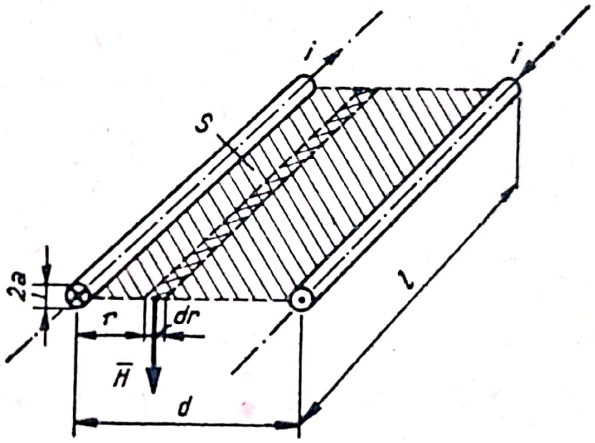


Fig. 27.8.

Fluxul dat de ambele conductoare este:

$$\Phi_{t\cdot ext}=2\Phi_{ext}=\frac{\mu_0 li}{\pi}\ln\frac{d}{a}, \tag{27.31}$$

ținînd seama de faptul că cele două conductoare sînt parcurse de aceiași curenți în sensuri contrarii și dau prin S fluxuri de același sens.

Rezultă inductivitatea L_{ext} a liniei duble:

$$L_{ext}=\frac{\Phi_{t\cdot ext}}{i}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d}{a}. \tag{27.32}$$

Inductivitatea liniei duble datorită cîmpului magnetic din interiorul conductoarelor, definită cu ajutorul energiei magnetice, se calculează în exemplul de la paragraful 28.2 și este dată de expresia (28.24):

$$L_{int}=\frac{\mu l}{4\pi}=\mu_r\frac{\mu_0 l}{4\pi}. \tag{28.24}$$

Inductivitatea totală a liniei, care corespunde întregului cîmp magnetic exterior și interior, este suma acestor inductivități:

$$\boxed{L_l=L_{int}+L_{ext}=\frac{\mu_0 l}{2\pi}\left[\frac{\mu_r}{2}+2\ln\frac{d}{a}\right]}. \tag{27.33}$$

Uzual, inductivitatea liniilor se exprimă pe unitatea de lungime în H/km.

Ținînd seama că:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}; \quad l = 1 \text{ km} = 10^3 \text{m},$$

rezultă:

$$L_{ts} = 2\left[\frac{1}{2}\mu_r + 2 \ln \frac{d}{a}\right] 10^{-4} \text{ H/km}. \tag{27.34}$$

27.6.2. **Calculul inductivității mutuale între două circuite aeriene.** Se consideră două circuite 1 și 2 de conture Γ_1 respectiv Γ_2. Fluxul produs de circuitul 1, care străbate circuitul 2, are expresia:

$$\Phi_{21} = \iint_{S_{\Gamma_2}} \overline{B}_1 \, \overline{dA} = \iint_{S_{\Gamma_2}} \text{rot } \overline{A}_1 \, \overline{dA} = \oint_{\Gamma_2} \overline{A}_1 \, \overline{ds}_2.$$

În cazul circuitelor filiforme, conform relației (20.11), potențialul magnetic vector datorit circuitului 1 este:

$$\overline{A}_1 = \frac{\mu}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \frac{\overline{ds}_1}{R_{12}},$$

deci fluxul este:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu}{4\pi} i_1 \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{\overline{ds}_1 \, \overline{ds}_2}{R_{12}}, \tag{27.35}$$

în care R_{12} este distanța între cele două elemente $\overline{ds}_1$ și $\overline{ds}_2$ (fig. 27.9).

Inductivitatea mutuală devine:

$$\boxed{L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{\overline{ds}_1 \, \overline{ds}_2}{R_{12}}}. \tag{27.36}$$

Această relație reprezintă *teorema lui Neumann* referitoare la inductivitățile mutuale.

Pentru calculul inductivităților mutuale a circuitelor compuse din diferite porțiuni (de exemplu, rectilinii), se introduce noțiunea convențională de *inductivitate de calcul între porțiuni deschise de circuite* [1]. Relația (27.36) se poate pune sub forma

$$L_{21} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_{1k}} \int_{C_{2p}} \frac{\overline{ds}_1 \, \overline{ds}_2}{R_{12}}. \tag{27.36'}$$

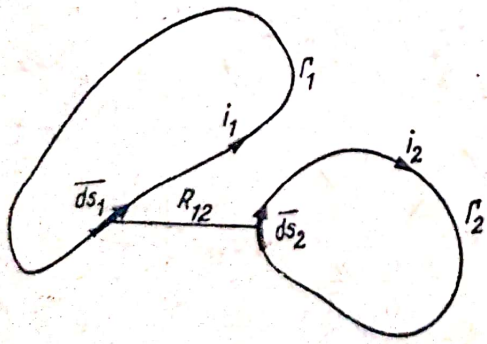


Fig. 27.9.

în care C_{1k} ($k = 1, \ldots m$), sînt porțiunile deschise, care însumate compun circuitul închis (1), iar C_{2p} ($p = 1, \ldots n$) sînt porțiunile deschise, care însumate compun circuitul închis (2). În calcul interesează deci expresii de forma:

$$L_{1k,2p} = L'_{kp} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_{1k}} \int_{C_{2p}} \frac{\overline{ds}_1 \, \overline{ds}_2}{R_{12}}, \tag{27.37}$$

care se numesc *inductivități mutuale de calcul* între C_{1k} și C_{2p} și nu trebuie confundate cu inductivitățile propriu-zise, referitoare totdeauna la circuite închise (nu are sens să se vorbească de fluxul unei porțiuni deschise de circuit).

---

[1] L. R. Neiman și P. L. Kalantarov, *Bazele teoretice ale electrotehnicii* trad. din l. rusă, vol. III, p. 169—170.

Aplicînd relația (27.37) în cazul a *două fire paralele* în aer $\mu \approx \mu_0$ (fig. 27.10) se obține rezultatul:

$$L'_{12} = M'_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right). \tag{27.38}$$

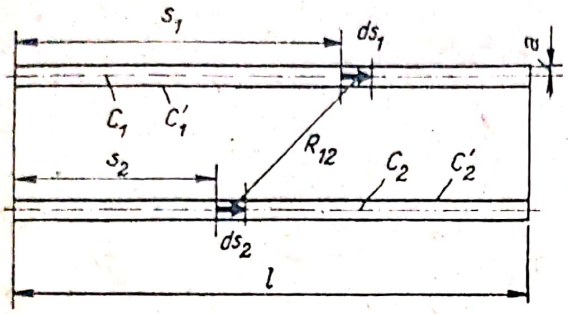


Fig. 27.10.

Rezultatul este valabil numai pentru $d \ll l$.

Ținînd seama că:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \quad \text{și} \quad l = 10^3 \text{ m},$$

se obține inductivitatea mutuală de calcul pe unitatea de lungime, în H/km:

$$M'_s = 2\left(\ln \frac{2l}{d} - 1 \right) 10^{-4} \text{ [H/km]}. \tag{27.39}$$

27.6.3. **Calculul inductivității proprii exterioare de calcul a unui fir izolat.** Formula lui Neumann (27.36), respectiv (27.36′), se poate utiliza cu bună aproximație și pentru calculul inductivității proprii exterioare (corespunzătoare cîmpului magnetic din exteriorul conductorului) a unui circuit, dacă Γ_1 este axa conductorului circuitului, iar Γ_2 este o curbă marginală „paralelă" cu axa și conținută în suprafața exterioară a conductorului (fig. 27.11). Se poate astfel calcula o *inductivitate proprie de calcul* a unei porțiuni deschise de circuit, fig.27.10, definită de relația analogă relației (27.37):

$$L'_{11} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C'_1} \frac{\overline{ds_1}\,\overline{ds_2}}{R_{12}}. \tag{27.40}$$

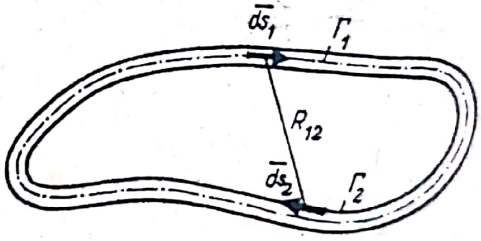


Fig 27.11

Inductivitățile de calcul mutuale și proprii definite de relația (27.37) sau (27.40) (și *nu* de raportul unor fluxuri prin anumiți curenți) *nu au o semnificație fizică imediată și prezintă utilitate numai dacă sînt folosite prin însumare în relații de forma* (27.36′) *pentru calculul unei inductivități propriu-zise, referitoare la circuite închise.* Un asemenea mod de calcul se aplică, uneori, la liniile aeriene. De exemplu, în cazul liniei bifilare (fig. 27.10) *inductivitatea proprie exterioară* se poate calcula cu o formă particulară a relației (27.36′):

$$L_{ext} = L'_{11'} - L'_{12} - L'_{21} + L'_{22'} = 2\,(L'_{11'} - L'_{12}). \tag{27.41}$$

Este ușor de văzut că L'_{11} se poate obține din L'_{12} dat de relația (27.38), înlocuind distanța dintre fire d cu raza a a firului ($l \gg d \gg a$):

$$L'_{11'} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left[\ln \frac{2l}{a} - 1 \right]. \tag{27.42}$$

Cu relațiile (27.38) și (27.42) aplicate în relația (27.41) se obține:

$$L_{ext} = \frac{\mu_0}{\pi} l \left[\ln \frac{2l}{a} - \ln \frac{2l}{d} \right] = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d}{a} \tag{27.43}$$

adică exact expresia (27.32).

28. Energie magnetică și forțe magnetice

28.1. Energia magnetică a unui sistem de circuite

28.1.1. Bilanțul energetic al unui sistem de circuite. Se consideră un sistem de n circuite, parcurse de curenții electrici de conducție $i_1, i_2, \ldots, i_n$ și legate la surse de energie cu t.e.m. $e_{g1}, e_{g2}, \ldots, e_{gn}$ (fig. 28.1). Circuitele pot fi mobile, iar t.e.m. și curenții pot fi variabili în timp. De la timpul t la $t+dt$, energia totală dată de generatoare este $\sum_{k=1}^{n} e_{gk}\, i_k dt$ și ea trebuie să acopere: pierderile de energie prin efect Joule — Lenz în rezistențele $R_{11}, R_{21}, \ldots, R_n$ ale circuitelor, lucrul mecanic efectuat de forțele magnetice și creșterea energiei magnetice localizate în cîmpul magnetic al circuitelor.

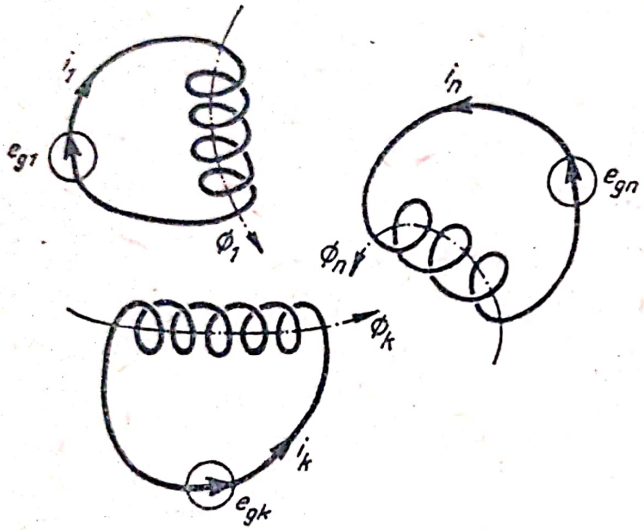


Fig. 28.1.

Bilanțul energetic al sistemului celor n circuite în timpul elementar dt se scrie, deci:

$$\sum_{k=1}^{n} e_{gk}\, i_k\, dt = \sum_{k=1}^{n} = R_k\, i_k^2\, dt + \delta\mathcal{L} + d\, W_m, \tag{28.1}$$

în care: *a)* $\sum_{k=1}^{n} R_k\, i_k^2\, dt$ reprezintă energia disipată în conductoarele circuitului datorită procesului ireversibil de dezvoltare de căldură, în timpul dt;

b)
$$\delta\mathcal{L} = X dx \tag{28.2}$$

este lucrul mecanic elementar efectuat de forțele magnetice, la variația coordonatei generale x, forța magnetică generalizată corespunzătoare (v. par. 8.3.1) fiind X;

c) $d\, W_m$ este variația energiei magnetice localizate în cîmpul celor n circuite, de la timpul t la timpul $t+dt$.

În timpul dt, fluxurile prin circuite pot varia și — în afara t.e.m. ale generatoarelor — se pot deci induce în circuite tensiunile electromotoare $-d\Phi_k/dt$. În conformitate cu legea lui Ohm aplicată fiecărui circuit închis:

$$e_{gk} - \frac{d\Phi_k}{dt} = R_k i_k,$$

adică:

$$e_{gk} = R_k i_k + \frac{d\Phi_k}{dt}. \tag{28.3}$$

Înlocuind relațiile (28.3) și (28.2) în relația (28.1) rezultă:

$$\boxed{d\,W_m=\sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Phi_k-X\,dx.} \tag{28.4}$$

Această relație exprimă variația energiei magnetice cînd variază fluxurile magnetice și se deplasează corpurile în cîmpul magnetic, și permite atît calculul energiei magnetice W_m cît și determinarea forțelor generalizate X.

28.1.2. **Calculul energiei magnetice.** În ipoteza unui mediu liniar din punctul de vedere magnetic (cu μ independent de $\bar{H}$), se folosește expresia precedentă în cazul cînd corpurile se mențin imobile ($dx=0$). Variația energiei magnetice este dată numai de variația fluxurilor (și deci a curenților care le produc) și are expresia:

$$d\,W_m=\sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Phi_k. \tag{28.5}$$

În cazul unei variații suficient de lente a curenților (regim cvasistaționar), fluxurile care străbat suprafețele limitate de contururile circuitelor sînt legate de curenți prin inductivitățile proprii și mutuale, conform relațiilor lui Maxwell (27.7):

$$\Phi_k=\sum_{j=1}^{n} L_{kj}i_j. \tag{28.6}$$

Se notează cu λ cîtul dintre intensitatea curentului în starea finală și intensitatea curentului într-o stare intermediară, pentru care se calculează dW_m:

$$i_j=\lambda\,i_{j\ final}. \tag{28.7}$$

În conformitate cu relația (28.6) și fluxurile produse de acești curenți vor fi:

$$\Phi_k=\lambda\Phi_{k\ final} \tag{28.7'}$$

în care λ este presupus același pentru toate circuitele și are valorile 0 în starea inițială și 1 în starea finală.

În consecință, pentru o situație intermediară:

$$\begin{aligned} d\Phi_k&=d\lambda\cdot\Phi_{k\ final}\\ i_k&=\lambda i_{k\,final}\end{aligned} \tag{28.8}$$

și variația de energie devine:

$$d\,W_m=\sum_{k=1}^{n}(i_k\Phi_k)_{final}\cdot\lambda\,d\lambda. \tag{28.9}$$

Suma variațiilor de energie din momentul inițial, în care încă nu există cîmp magnetic, pînă în momentul final, este energia W_m a cîmpului magnetic în starea finală considerată. Ea se obține integrînd expresia (28.9) de la $\lambda=0$ la $\lambda=1$.

$$W_m=\sum_{k=1}^{n}(i_k\Phi_{k\ final})\int_0^1\lambda\,d\lambda$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$\boxed{W_m=\sum_{k=1}^{n}\frac{i_k\Phi_k}{2}} \tag{28.10}$$

(relație în care precizarea „*final*" a fost suprimată).

Această expresie prezintă o analogie de formă cu relația (8.7) care reprezintă energia electrică a unui sistem de n conductori cu sarcinile adevărate q_k și potențialele electrice V_k în regim electrostatic.

Energia magnetică se poate exprima și numai în funcție de curenți, cu ajutorul inductivităților, dacă se folosesc relațiile lui Maxwell (28.6):

$$W_m=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{L_{kj}\,i_j\,i_k}{2} \tag{28.11}$$

28.1.3. **Două bobine cuplate.** Energia magnetică are, conform relației (28.11), expresia explicită:

$$W_m=\frac{L_{11}i_1^2}{2}+\frac{L_{12}i_2i_1}{2}+\frac{L_{21}i_1i_2}{2}+\frac{L_{22}i_2^2}{2} \tag{28.12}$$

sau

$$W_m=\frac{1}{2}L_{11}i_1^2+\frac{1}{2}L_{22}i_2^2+L_{21}i_1i_2$$

în care:

$W_{m_1}=\frac{L_{11}i_1^2}{2}$ reprezintă *energia magnetică proprie* a bobinei 1;

$W_{m_2}=\frac{L_{22}i_2^2}{2}$ reprezintă *energia magnetică proprie* a bobinei 2;

$W_{12}=L_{12}i_1i_2$ reprezintă *energia magnetică de interacțiune* între bobinele 1 și 2. Această energie se poate exprima sub formele:

$$W_{12}=i_1\Phi_{12}=i_2\Phi_{21}=i_1i_2L_{\cdot 21} \tag{28.13}$$

În general, pentru un circuit oarecare de curent i, situat într-un cîmp exterior, energia de interacțiune este:

$$W_{int}=i\Phi_{ex}. \tag{28.13'}$$

28.2. Densitatea de volum a energiei magnetice

Se consideră un solenoid drept foarte lung înfășurat uniform, într-un mediu omogen de permeabilitatea $\mu=$ct. Aria secțiunii solenoidului A este presupusă suficient de mică pentru a considera cîmpul magnetic omogen în interior. Curentul care trece prin înfășurarea cu N spire este i, iar lungimea l. Intensitatea cîmpului magnetic este (cu rel. 21.21) $H=Ni/l$, iar fluxul total $\Phi=N\Phi_f=B.A.N$.

Conform relației (28.10), energia magnetică proprie a unei bobine este:

$$\boxed{W_m = \frac{\Phi i}{2} = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.} \tag{28.14}$$

Înlocuind i și Φ din formulele precedente și observînd că produsul $Al = V$ e volumul ocupat de cîmp al solenoidului, se obține:

$$W_m = \frac{BH}{2} Al = \frac{\bar{B}\bar{H}}{2} V \quad (\text{căci } \bar{B} \| \bar{H}). \tag{28.15}$$

În consecință, densitatea de volum a energiei magnetice este:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{\bar{B}\bar{H}}{2} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu}. \tag{28.16}$$

Deși această expresie a fost obținută într-un caz particular, se poate arăta că *valabilitatea ei este generală pentru medii liniare* și în cîmpuri neomogene, unde densitatea de volum a energiei magnetice este definită, în general, de relația:

$$w_m = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{W_m}{\Delta V} = \frac{dW_m}{dV}, \tag{28.17}$$

în funcțiune de energia magnetică ΔW_m *localizată* în cîmpul magnetic din domeniul elementar de volum ΔV, și are expresia:

$$\boxed{w_m = \frac{\bar{B}\bar{H}}{2}.} \tag{28.18}$$

Dacă se consideră cazul general al unei repartiții neomogene a cîmpului magnetic (fig. 28.2), energia cîmpului magnetic localizată în volumul V_Σ se calculează cu relația:

$$\boxed{W_m = \iiint_{V_\Sigma} \frac{\bar{B}\bar{H}}{2} dv.} \tag{28.19}$$

Această expresie este mai generală decît (28.10), deoarece se referă la un domeniu mărginit oarecare din spațiu, exprimă localizarea energiei în cîmp și este valabilă și în regim variabil. Expresia (28.10) este valabilă numai în regim staționar sau cvasistaționar și reprezintă energia întregului cîmp, adică:

$$W_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k \Phi_k}{2} = \iiint_{V\infty} \frac{\bar{B}\bar{H}}{2} dv.$$

Aplicație. *Calculul energiei magnetice înmagazinată în cîmpul magnetic din interiorul unui conductor cilindric drept de lungime foarte mare l și rază $a \ll l$, străbătut de curentul continuu i.*

Energia magnetică pe unitatea de volum este:

$$W_m = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{H} = \frac{1}{2}\mu H^2. \tag{28.19'}$$

Intensitatea H se calculează aplicînd legea circuitului magnetic unei linii de cîmp circulare Γ de rază r, suprafața S_Γ fiind străbătută de curentul (total) $i\,r^2/a^2$:

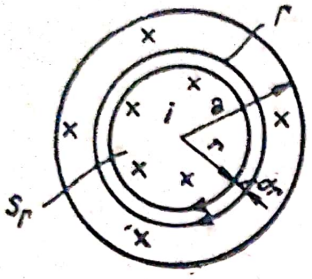


Fig. 28.2.

$$2\pi r H = ir^2/a^2$$

și rezultă:

$$H = \frac{i}{2\pi}\frac{r}{a^2}. \tag{28.20}$$

Considerînd un volum elementar de forma unei coji cilindrice în interiorul conductorului (fig. 28.2).

$$dv = l \cdot dr \cdot 2\pi r,$$

energia elementară rezultă:

$$dW_m = w_m \cdot dv = \frac{1}{2}\mu H^2 \cdot l\,dr \cdot 2\pi r = i^2 \frac{\mu l}{4\pi a^4} \cdot r^3 dr. \tag{28.21}$$

Energia magnetică totală localizată în interiorul conductorului rezultă:

$$W_{m_{int}} = i^2 \frac{\mu l}{4\pi a^4}\int_0^a r^3 dr = i^2 \frac{\mu l}{16}. \tag{28.22}$$

Din această valoare, se poate obține valoarea inductivității, corespunzătoare cîmpului magnetic din interiroul conductorului, folosind relația (28.14) *ca relație de definiție pentru inductivitatea conductorului masiv*:

$$L'_{int} = \frac{2W_{m_{int}}}{i^2} = \frac{\mu l}{8\pi}. \tag{28.23}$$

Pentru o linie cu doi conductori paraleli, identici, la distanță suficient de mare față de raza lor:

$$L_{int} = 2\,L'_{int} = \frac{\mu l}{4\pi}. \tag{28.24}$$

Această expresie a fost utilizată în paragraful 27.6.1.

28.3. Teoremele forțelor generalizate în cîmpul magnetic

Lucrul mecanic $dL_m = X dx$, care se efectuează la o deplasare elementară a unui corp din cîmpul magnetic, caracterizată de variația dx, sub acțiunea forței magnetice generalizate X, se poate calcula din relația (28.4):

$$dW_m = \sum_{k=1}^{n} i_k d\Phi_k - X dx. \tag{28.4}$$

28.3.1. Prima teoremă a forțelor generalizate în cîmpul magnetic. Relația precedentă poate fi interpretată ca dezvoltarea diferențialei totale a energiei magnetice, exprimată ca funcție de fluxuri și coordonate.

Dacă fluxurile se mențin constante, rezultă:

$$(d\,W_m)_\Phi = -X\,dx. \tag{28.25}$$

Forța magnetică generalizată, care corespunde coordonatei generalizate x, este deci:

$$\boxed{X = -\left[\frac{d\,W_m}{dx}\right]_{\Phi_k=\text{ct.}} = -\left[\frac{\partial W_m}{\partial x}\right]_{\Phi_k=\text{ct.}}} \tag{28.26}$$

Forța generalizată X, corespunzătoare coordonatei generalizate x, este egală cu derivata parțială a energiei magnetice (exprimată ca funcție de fluxuri și de coordonata generalizată) în raport cu coordonanta generalizată, luată cu semn schimbat, la fluxuri magnetice constante prin circuite (prima teoremă a forțelor generalizate în cîmpul magnetic).

Se poate da următoarea interpretare relației (28.25). Deoarece nu există fenomene de inducție electromagnetică (Φ_k=ct.), nu există schimb de energie între surse și cîmp. În consecință, energia scade, deoarece se efectuează lucru mecanic.

28.3.2. **A doua teoremă a forțelor generalizate în cîmpul magnetic.** O altă teoremă se obține dacă se presupune că rămîn invariabili curenții din circuite. În acest caz, în relația (28.4) i_k fiind constanți, se poate scrie:

$$(d\,W_m)_{i_k} = \sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Phi_k - X\,dx = d\left[\sum_{k=1}^{n} i_k\,\Phi_k\right]_{i_k} - X\,dx. \tag{28.27}$$

Conform relației (28.10), energia magnetică are însă valoarea:

$$W_m = \sum_{k=1}^{n} \frac{i_k\,\Phi_k}{2},$$

astfel că

$$\left(\sum_{k=1}^{n} i_k\,d\Phi_k\right)_{i_k} = d\left(\sum_{k=1}^{n} i_k\,\Phi_k\right)_{i_k} = 2\,(dW_m)_{i_k}$$

și rezultă:

$$(d\,W_m)_{i_k} = X\,dx. \tag{28.28}$$

Se poate da următoarea interpretare acestei relații: în cazul curenților invariabili, există un aport de energie de la surse, care se împarte în mod egal între creșterea energiei magnetice a cîmpului și efectuarea de lucru mecanic de către forțele exercitate de cîmp.

Astfel, în cazul curenților constanți, obținerea de lucru mecanic se produce concomitent cu creșterea energiei magnetice acumulate în cîmp cu o cantitate egală cu valoarea lucrului mecanic efectuat de forțele magnetice. Din relația (28.28), forța magnetică generalizată rezultă:

$$\boxed{X = \left[\frac{d\,W_m}{dx}\right]_{i_k=\text{ct.}} = \left[\frac{\partial W_m}{\partial x}\right]_{i_k=\text{ct.}}} \tag{28.29}$$

Forța generalizată X corespunzătoare coordonatei generalizate x, este egală cu derivata parțială a energiei magnetice (exprimată ca funcție de curenți și coordonata generalizată), în raport cu coordonata generalizată corespunzătoare, la curenți constanți în circuite (a doua teoremă a forțelor generalizate în cîmpul magnetic).

Este necesar de subliniat că ambele relații (28.26 și 28.27) permit calculul aceleași forțe X, a cărei valoare, evident, nu depinde de modul cum este calculată.

28.4. Aplicații. Forța portantă a unui electromagnet

Se consideră electromagnetul studiat și în paragraful 27.2.2. (fig. 28.3). Forța portantă este forța necesară pentru a desprinde armătura de polii electromagnetului, x fiind grosimea întrefierului ($l_{01} = l_{02} = x = l_0/2$).

Se consideră expresia energiei magnetice dată de relația (28.14):

$$W_m = \frac{\Phi^2}{2L} = \frac{L i^2}{2}.$$

În consecință:

$$X = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{\Phi=\text{ct.}} = -\frac{\Phi^2}{2}\left(-\frac{1}{L^2}\right)\frac{\partial L}{\partial x} = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_{i=\text{ct.}} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L}{\partial x}. \quad (28.30)$$

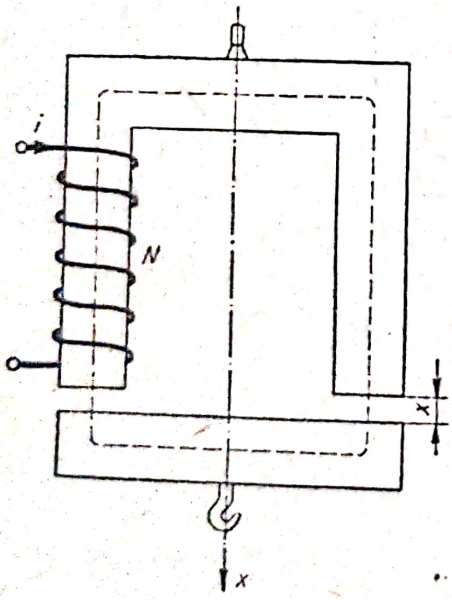


Fig. 28.3.

Inductivitatea bobinei electromagnetului s-a calculat la paragraful 27.2.2. relația (27.13):

$$L = \frac{N^2}{\sum \frac{l}{\mu A}} = \frac{N^2 \mu_0 A}{\frac{lf}{\mu r} + l_0} \approx \frac{N^2 \mu_0 A}{2x} \quad (28.31)$$

cu $\mu_{r\,\text{Fe}} \gg 1$ sau $R_{m\text{Fe}} \approx 0$ și $l_0 = 2x$.

Se obține din relația (28.31):

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2}\mu_0 A N^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right). \quad (28.32)$$

Din relațiile (28.30), (28.31) și (28.32) rezultă:

$$X = -\frac{i^2 \mu_0 A N^2}{4 x^2} = -\frac{i^2}{2}\frac{L}{x} = -\frac{\Phi^2}{2Lx}. \quad (28.33)$$

Semnul forței portante arată că X este de fapt o forță de atracție (îndreptată în sens opus sensului creșterii lui x).

Forța raportată la unitatea de arie a secțiunii transversale (tensiunea) este:

$$T = \frac{|X|}{2A} = \frac{i^2 \mu_0 N^2}{8 x^2} = \frac{\mu_0 H_0^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{\bar{H}_0 \bar{B}_0}{2} \quad (28.34)$$

deoarece intensitatea H_0 a cîmpului în întrefier este (cu $\mu_{rFe} \approx \infty$):

$$H = \frac{Ni}{2x} \quad (28.35)$$

28.5 Forţe electrodinamice între circuite parcurse de curenţi

Se consideră un *electrodinamometru* compus din două bobine (fig. 28.4). Bobina *1* foarte lungă, cu N_s spire parcurse de curentul i_1, produce un cîmp magnetic a cărui inducţie în axă este (cu rel. 21.21):

$$B_1=\mu_0 \frac{N_1 i_1}{l}. \quad (28.36)$$

În interiorul bobinei *1* (fixe) se poate roti bobina mobilă *2*. Forţele pe care le exercită cîmpul magnetic al curentului i_1 asupra bobinei *2*, parcursă de curentul i_2, tind să o rotească astfel, încît spirele ei să îmbrăţişeze maximum de flux al bobinei *1*.

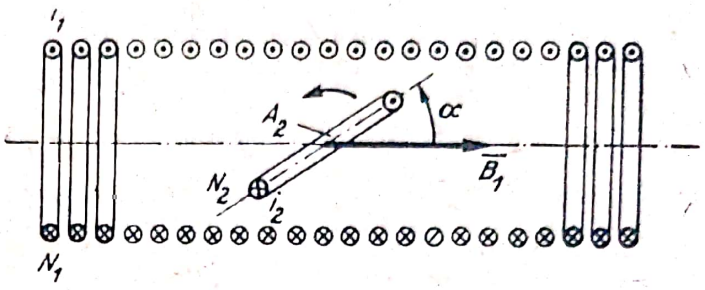


Fig. 28.4.

Momentul cuplului activ dat de aceste forţe, conform relaţiei (28.31), este (cu $X = C_a$, $x = \alpha$):

$$C_a=\left(\frac{\partial W_m}{\partial \alpha}\right)_{i=\text{ct}}=i_1 i_2 \frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha}, \quad (28.37)$$

deoarece energia magnetică, care variază la rotirea bobinei *2*, este numai energia de interacţiune $W_{12} = i_1 i_2 L_{12}$ (v. rel. 28.13) (energiile proprii ale bobinelor nedeformabile fiind constante cînd se modifică unghiul α).

Dar

$$L_{21}=\frac{\Phi_{21}}{i_1}=\frac{N_2 B_1 A_2 \sin\alpha}{i_1}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 A_2 \sin\alpha}{l}, \quad (28.38)$$

iar

$$\frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 A_2}{l}\cos\alpha, \quad (28.39)$$

şi rezultă:

$$C_a=\frac{\mu_0 A_2}{l} i_1 N_1 i_2 N_2 \cos\alpha.$$

Asupra bobinei mobile se mai exercită un cuplu rezistent, mecanic, de exemplu produs de arcuri spirale elastice fixate pe axa ei:

$$C_r=k\alpha. \quad (28.40)$$

La echilibru

$$C_a=C_r, \quad (28.41)$$

şi deci:

$$\alpha=\frac{i_1 i_2}{k}\mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l}\cos\alpha. \quad (28.42)$$

Pe exercitarea de forţe asupra conductoarelor parcurse de curent se bazează numeroase mecanisme de măsură ale aparatelor electrice.

28.6. Tensiuni maxwelliene în cîmpul magnetic

Rezultanta forţelor magnetice, care se exercită asupra corpurilor sau porţiunilor de corpuri cuprinse în interiorul unui volum V_Σ, mărginit de o suprafaţă (închisă) Σ de normală exterioară $\bar{n}$, se poate pune în regim cvasistaţionar sub forma (datorită lui Maxwell, v. şi cazul electric analog par. 8.5):

$$\bar{F}=\iint_\Sigma \bar{T}_n \cdot dA, \quad (28.43)$$

în care $\overline{T}_n$ este mărimea numită *tensiune maxwelliană* în cîmpul magnetic, interpretabilă ca o densitate de suprafață a forței, și avînd expresia (care se dă aici fără demonstrație):

$$\overline{T}_n = (\overline{B}\,\overline{n})\,\overline{H} - \overline{n}\left(\frac{\overline{B}\,\overline{H}}{2}\right). \tag{28.44}$$

Se consideră două cazuri particulare:

a) Dacă suprafața Σ este local normală pe liniile de inducție (fig. 28.5), rezultă:

$$\overline{T}_n = \overline{n}\left(\frac{\overline{B}\,\overline{H}}{2}\right) = \overline{n} w_m, \tag{28.45}$$

deoarece vectorii $\overline{B}$, $\overline{H}$ și $\overline{n}$ sînt paraleli. Așadar, liniile de inducție perpendiculare pe o suprafață exercită asupra ei o *tracțiune* numeric egală cu densitatea de energie magnetică (pentru unitatea de suprafață).

b) Dacă suprafața Σ este local paralelă cu liniile de inducție (fig. 28.6), rezultă din relația (28.44):

$$\overline{T}_n = -\overline{n} w_m. \tag{28.46}$$

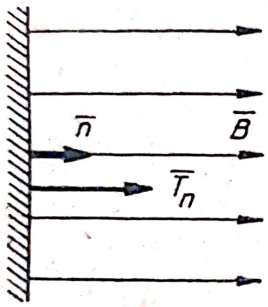


Fig. 28.5.

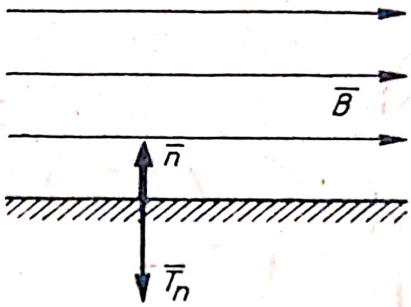


Fig. 28.6.

Prin urmare, în acest caz, se creează o *compresiune* numeric egală cu densitatea de energie magnetică.

În timp ce forțele electrostatice au valori relativ mici, forțele magnetice pot ajunge la valori foarte importante, avînd numeroase aplicații tehnice: motoare electrice, electromagneți, relee etc.

Tensiunile maxwelliene pot constitui o metodă de calcul a forțelor magnetice, de exemplu a forței portante a electromagneților (v. par. 28.4).

29. Ecuațiile lui Maxwell pentru cîmpul electromagnetic. Undele electromagnetice. Fluxul de energie electromagnetică

29.1 Recapitularea legilor generale și a principalelor legi de material ale electromagnetismului

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice, expusă pînă acum, utilizează pentru caracterizarea acestor fenomene și a stărilor corespunzătoare opt specii de mărimi primitive, adică opt specii de mărimi a căror intro-

ducere nu este posibilă fără a face apel la experiență, și un număr mare de mărimi derivate, care completează și ușurează caracterizarea acestor stări. Mărimile primitive și principalele mărimi derivate sînt arătate în continuare.

a) *Mărimi de stare electrică și magnetică ale corpurilor* (v. și par. 2, 4, 11, 18).

— Sarcina electrică q — caracterizează starea de încărcarea electrică a corpurilor.

— Momentul electric $\bar{p}$ — caracterizează starea de polarizare electrică a corpurilor.

— Intensitatea curentului electric i — caracterizează starea electrocinetică a corpurilor.

— Momentul magnetic $\bar{m}$ — caracterizează starea de magnetizație a corpurilor

Aceleași stări se caracterizează local prin mărimile derivate (mai importante): densitatea de volum a sarcinii $\rho_v=\delta q/dv$; polarizația electrică $\bar{P}=d\bar{p}/dv$; densitatea de curent $\bar{J}=\bar{u}_j di/dA$; magnetizația $\bar{M}=d\bar{m}/dv$, definite astfel încît:

$$q=\iiint \rho_v\, dv;\quad \bar{p}=\iiint \bar{P}\, dv;\quad i=\iint j\, \bar{dA};\quad \bar{m}=\iiint \bar{M}\, dv.$$

Alte mărimi derivate importante sînt: densitatea de suprafață a sarcinii ρ_s, sarcina de polarizație q_p, intensitatea curentului amperian i_m, solenația $\theta=\Sigma i$ etc.

b) *Mărimi de stare locală ale cîmpului electromagnetic* (v. și par. 2, 5, 16, 19).

— Intensitatea cîmpului electric $\bar{\bar{E}}$
— Inducția electric $\bar{D}$
} — caracterizează local aspectul electric al cîmpului electromagnetic (cîmpul electric).

— Intensitatea cîmpului magnetic $\bar{H}$
— Inducția magnetică $\bar{B}$
} — caracterizează local aspectul magnetic al cîmpului electromagnetic (cîmpul magnetic).

Mărimile derivate mai importante corespunzătoare sînt:

— tensiunea electrică (în lungul unei curbe C) $u=\int_c \bar{E}\bar{ds}$;

— fluxul electric (printr-o suprafață S) $\Psi=\iint_s \bar{D}\bar{dA}$;

— tensiunea magnetică (în lungul unei curbe C) $u_m=\int_c \bar{H}\,\bar{ds}$;

— fluxul magnetic (printr-o suprafață S) $\Phi=\iint_s \bar{B}\,\bar{dA}$.

Legile generale și principalele legi de material ale teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice au fost prezentate în diferitele părți ale cursului și sînt următoarele (cu scrierea în sistemul de unități MKSA rațională):

(I) Legea inducției electromagnetice $\oint_\Gamma \bar{E}\,\bar{ds} = -\frac{d\Phi}{dt}$. (par. 22)

(II) Legea fluxului electric $\iint_\Sigma \bar{D}\,\bar{dA} = q_\Sigma$. (par. 6)

(III) Legea legăturii dintre $\bar{D}$, $\bar{E}$ și $\bar{P}$ $\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E} + \bar{P}$. (par. 6)

(IV) Legea polarizației electrice temporare (lege de material pentru dielectrici liniari) $\bar{P}_t = \varepsilon_0\chi_e\bar{E}$ (par. 7)
În dielectrici liniari și fără polarizație permanentă, legile (III)+(IV) duc la relația $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$.

(V) Legea circuitului magnetic $\oint_\Gamma \bar{H}\bar{ds} = 0 + \frac{d\Psi}{dt}$. (par. 21)

(VI) Legea fluxului magnetic $\iint_\Sigma \bar{B}\bar{dA} = 0$ (par. 20)

(VII) Legea legăturii dintre $\bar{B}$, $\bar{H}$ și $\bar{M}$ $\bar{B} = \mu_0\bar{H} + \mu_0\bar{M}$. (par. 19)

(VIII) Legea magnetizației temporare $\bar{M}_t = \chi_m\bar{H}$ (par. 23)
(lege de material pentru materiale magnetice liniare).
În materiale liniare și fără magnetizație permanentă, legile (VII)+(VIII) duc la relația $\bar{B} = \mu\bar{H}$.

(IX) Legea conservării sarcinii electrice $i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt}$. (par. 12)

(X) Legea conducției electrice (Ohm) $\sigma(\bar{E} + \bar{E}_i) = \bar{J}$ (par. 12)
(lege de material pentru conductori liniari).

(XI) Legea transformării de energie în conductori (Joule-Lenz)
$\bar{p}_j = \bar{E}\bar{J}$. (par. 12)

Legile I, II, III, V, VI, VII, IX, XI sînt legile generale ale teoriei macroscopice a electromagnetismului; legile IV, VIII, X sînt principalele legi de material și în ele intervin, în afara mărimilor reamintite, anumite mărimi de material (dependente local de natura acestuia, de temperatură, de starea lui de deformare locală etc.): susceptivitatea electrică $\chi_e = \frac{|\bar{P}|}{\varepsilon_0|\bar{E}|}$; permitivitatea $\varepsilon = \frac{|\bar{D}|}{|\bar{E}|} = \varepsilon_0\varepsilon_r$; susceptivitatea magnetică $\chi_m = \frac{|\bar{M}|}{|\bar{H}|}$; permeabilitatea $\mu = \frac{|\bar{B}|}{|\bar{H}|}$; conductivitatea $\sigma = \left(\frac{|\bar{J}|}{|\bar{E}|}\right)_{\bar{E}_i=0} = \frac{1}{\rho}$; intensitatea cîmpului electric imprimat $\bar{E}_i = (-\bar{E})_{\bar{J}=0}$. Există *și alte* legi de material de aplicativitate mai restrînsă în determinarea cîmpului electromagnetic: legea electrolizei, legea cîmpurilor imprimate voltaice, legile emisiunii electronice din metale etc.

Legile I, II, III, IV stabilesc toate condițiile producerii cîmpului electric (prin faptul că permit precizarea circulației în lungul oricărei curbe închise și a fluxului prin orice suprafață închisă a fiecăruia dintre vectorii cîmp $\bar{E}$

Scanned with OKEN Scanner

sau $\bar{D}$); legile V, VI, VII și VIII stabilesc toate condițiile producerii cîmpului magnetic (prin faptul că permit precizarea circulației în lungul oricărei curbe închise și a fluxului prin orice suprafață închisă a fiecăruia dintre vectorii cîmp $\bar{H}$ sau $\bar{B}$); legile IX, X stabilesc proprietăți ale curentului electric de conducție și permit determinarea vectorului cîmp $\bar{J}$, iar legea XI stabilește efectul energetic al procesului de conducție a curentului electric.

Principalele legături cauzale pe care le implică sistemul de legi I—X de mai înainte, în condițiile obișnuite întîlnite în aplicații tehnice, pot fi reprezentate schematic ca mai jos, săgețile cu linii întrerupte indicînd legăturile care există numai în regim nestaționar (în stări variabile în timp). În această reprezentare, simbolurile mărimilor de stare electrică și magnetică sînt utilizate pentru a indica stările corespunzătoare. Cifrele romane din dreptul săgeților precizează legea care determină legătura cauzală respectivă, legile de material mai avînd indicele suplementar (m). Săgețile cu ambele sensuri indicate corespund unei interdependențe, a cărei interpretare cauzală depinde de condiții concrete suplementare.

Principalele idei exprimate în reprezentarea din figura 29.1, (al cărei caracter *schematic* nu trebuie pierdut din vedere), sînt următoarele:

a) În regim staționar nu există practic influență reciprocă între fenomenele electrice și magnetice, singura legătură între aceste categorii de fenomene fiind exprimată de legea lui Ohm (X) conform căreia repartiția cîmpului imprimat ($\bar{E}_i$—adică a surselor de curent) determină atît curenții din conductoare (și deci cîmpul magnetic produs de acești curenți), cît și repartiția cîmpului electric din conductoare (și deci a sarcinilor la suprafața acestora, respectiv a cîmpului electric al acestor sarcini). Cîmpul electric și cîmpul magnetic sînt în legătură exclusiv prin intermediul corpurilor conductoare parcurse de curent electric de conducție. În lipsa curenților electrici, această legătură dispare și rezultă două cîmpuri de vectori complet independente: cîmpul electrostatic și cîmpul magnetostatic.

b) În regim staționar cîmpul electric este determinat în izolanți de repartiția sarcinilor electrice și a momentelor electrice (legile II și III); totodată cîmpul electric influențează repartiția momentelor electrice (partea lor temporară) prin legea de material a polarizației electrice temporare (IV), iar în conductori el impune repartiția de sarcină (de obicei, superficială), fiind determinat de repartiția cîmpurilor imprimate (prin condiția de echilibru electrostatic care rezultă din X). Cîmpul electric staționar este produs de corpuri încărcate electric sau polarizate electric.

c) În regim staționar (și cvasistaționar) cîmpul magnetic este determinat de repartiția curenților electrici și a momentelor magnetice (legile V, VI, VII); totodată cîmpul

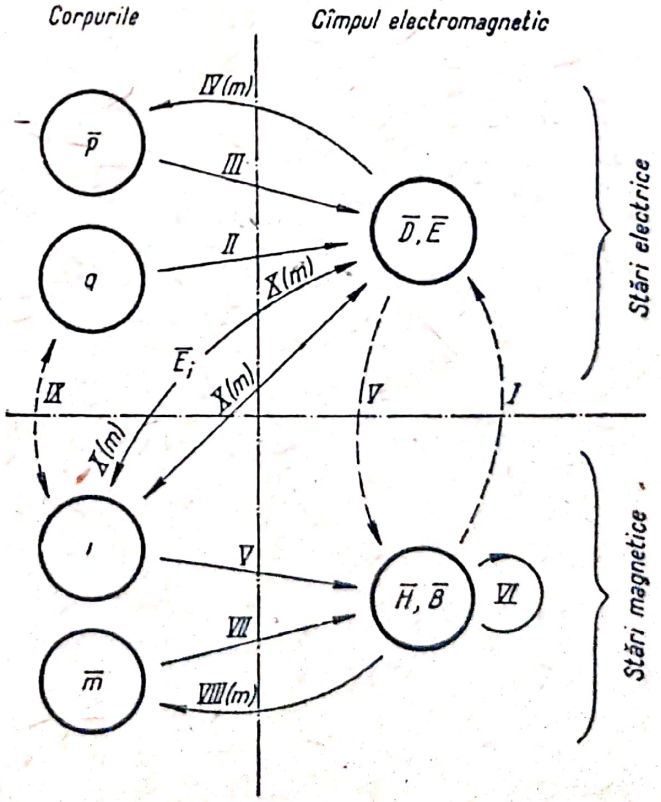


Fig. 29.1.

magnetic influențează repartiția momentelor magnetice (partea lor temporară) prin legea de material a magnetizației temporare (VIII). Cîmpul magnetic staționar este produs de corpuri magnetizate sau parcurse de curent electric.

d) *În regim variabil în timp* apare o condiționare reciprocă între repartiția de sarcină și cea de curent prin legea conservării sarcinii (IX)[1]; totodată mai apare o dublă legătură *directă* (nu prin intermediul corpurilor) între cîmpul electric și cîmpul magnetic: cîmpul magnetic variabil în timp determină apariția unui cîmp electric solenoidal (indus) prin legea inducției electromagnetice (I); cîmpul electric variabil în timp determină apariția unui cîmp magnetic solenoidal produs de curentul de deplasare, care intervine prin legea circuitului magnetic (V). Această dublă legătură condiționează existența cîmpului electromagnetic „desprins" de corpuri sub formă de *unde electromagnetice* care se propagă cu o viteză finită.

29.2. Ecuațiile lui Maxwell

Studiul general și sistematic al cîmpului electromagnetic se poate face numai cu ajutorul formelor locale ale legilor, care exprimă în modul cel mai adecvat (corespunzător concepției de localizare a tuturor acțiunilor și proprietăților fizice) structura acestui sistem fizic.

Se numesc *ecuațiile lui Maxwell* ecuațiile cu derivate parțiale care reprezintă formele locale ale legilor generale ale cîmpului electromagnetic în medii imobile (viteza locală $\bar{v}=0$) și în domenii de continuitate (și netezime) a proprietăților fizice locale. În scriere vectorială aceste ecuații sînt:

$$\operatorname{rot} \bar{H}=\bar{J}+\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \text{(legea V)} \tag{29.1}$$

$$\operatorname{rot} \bar{E}=-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \qquad \text{(legea I)} \tag{29.2}$$

$$\operatorname{div} \bar{D}=\rho_v \qquad \text{(legea II)} \tag{29.3}$$

$$\operatorname{div} \bar{B}=0 \qquad \text{(legea VI)} \tag{29.4}$$

Prima ecuație vectorială a lui Maxwell (29.1) este forma locală a legii circuitului magnetic (v. par. 21) în medii imobile:

$\oint_\Gamma \bar{H} d\bar{s}=\iint_{S_\Gamma} \bar{J}\, d\bar{A}+\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \bar{D}\, d\bar{A}$, obținută transformînd primul membru cu teorema lui Stokes, într-o integrală referitoare la suprafața S_Γ sprijinită pe curba Γ

$$\iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \bar{H}\, d\bar{A}=\iint_{S_\Gamma}\left(\bar{J}+\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{A}$$

și observînd că aceste integrale pot fi egale, oricare ar fi suprafața S_Γ și orientarea lui $d\bar{A}$, numai dacă integranzii respectivi sînt egali în fiecare punct din spațiu.

[1] Din punct de vedere strict axiomatic, legea (IX) nu e independentă de (II) (în forma dată în acest curs) și de (V), ci rezultă din ele. De aceea, în schema legăturilor cauzale *principle* ea ar putea să nu apară.

A doua ecuație vectorială a lui Maxwell (29.2) este forma locală a legii inducției electromagnetice (v. par. 22) în medii imobile:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E}\,\overline{ds} = -\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma} \overline{B}\,\overline{dA},$$

obținută transformînd primul membru cu teorema lui Stokes:

$$\iint_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \overline{E}\,\overline{dA} = \iint_{S_\Gamma}\left[-\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\right]\overline{dA}$$

și observînd (ca mai înainte) că aceste integrale pot fi egale, *oricare* ar fi suprafața S_Γ și orientarea lui $\overline{dA}$, numai dacă intergranzii respectivi sînt egali în fiecare punct din spațiu.

A treia ecuație (29.3) este forma locală a legii fluxului electric (v. par. 6):

$$\iint_{\Sigma} \overline{D}\,\overline{dA} = \iiint_{V_\Sigma} \rho_v dv$$

obținută transformînd primul membru cu teorema lui Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_{V_\Sigma} \operatorname{div} \overline{D}\,dv = \iiint_{V_\Sigma} \rho_v dv$$

și observînd că aceste integrale pot fi egale, *oricare* ar fi volumul V_Σ, numai dacă integranzii respectivi sînt egali în fiecare punct din spațiu.

A patra ecuație (29.4) este forma locală a legii fluxului magnetic (v. par. 20)

$$\iint_{\Sigma} \overline{B}\,\overline{dA} = 0$$

obținută transformînd primul membru cu teorema lui Gauss-Ostrogradski

$$\iiint_{V_\Sigma} \operatorname{div} \overline{B}\,\overline{dv} = 0$$

și observînd că integrala poate fi nulă, *oricare* ar fi volumul V_Σ, numai dacă integrandul este nul în fiecare punct din spațiu.

Ecuațiile lui Maxwell (29.1, 29.2, 29.3, 29.4) se completează cu relațiile dintre $\overline{D}$ și $\overline{E}$, dintre $\overline{B}$ și $\overline{H}$ și eventual dintre $\overline{E}$ și $\overline{J}$ (legile III, IV, VII, VIII și X), care în medii liniare sînt relațiile de material:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \tag{29.5}$$

$$\overline{B} = \mu \overline{H} \tag{29.6}$$

$$\overline{J} = \sigma(\overline{E} + \overline{E}_i), \text{ sau } \overline{J} = \sigma \overline{E} \text{ (dacă } \overline{E}_i = 0). \tag{29.7}$$

Sistemul de ecuații ale lui Maxwell reprezintă, din punctul de vedere matematic, un sistem de opt ecuații scalare simultane cu derivate parțiale cu șase funcții necunoscute, de exemplu (dacă se elimină $\overline{D}$ și $\overline{B}$ cu 29.5 și

Scanned with OKEN Scanner

29.6) componentele vectorilor-cîmp $\bar{E}(\bar{r}, t)$ și $\bar{H}(\bar{r}, t)$. În coordonate carteziene ecuațiile sînt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}&=J_x+\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t}\\ \frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}&=J_y+\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t};\\ \frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}&=J_z+\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (29.1')$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}&=-\mu\frac{\partial H_x}{\partial t}\\ \frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}&=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t}\\ \frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}&=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (29.2')$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{1}{\varepsilon}\rho_v \qquad (29.3')$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0. \qquad (29.4')$$

În teoria sistemelor de ecuații cu derivate parțiale se arată că soluțiile $\bar{H}$ și $\bar{E}$ ale unui asemenea sistem sînt univoc determinate dacă se dau ε și μ, sursele ρ_v și J_x, J_y, J_z[1], condițiile de frontieră pe frontiera domeniului în care se determină cîmpul (componenta tangențială a lui $\bar{H}$ sau a lui $\bar{E}$) și condițiile inițiale (teorema unicității cîmpului electromagnetic).

29.3. Unda electromagnetică plană

Așa cum s-a arătat mai înainte, din analiza sistemului de legi ale cîmpului electromagnetic, respectiv din analiza sistemului de ecuații ale lui Maxwell, rezultă că în cîmpuri variabile în timp apare o dublă legătură cauzală între

[1] Funcțiile $\rho_v(\bar{r}, t)$ și $\bar{J}(\bar{r}, t)$ nu sînt complet independente, fiind legate prin forma locală a legii conservării sarcinii: $\operatorname{div}\bar{J}+\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=0$ (ecuație care se poate obține și direct din 29.1, 29.2 și 29.3). Se mai arată (teorema relaxării) că eliminînd pe $\bar{J}$ între această ecuație, legea (29.3) și legea (29.7), se obține pentru ρ_v ecuația $\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_v+\frac{\partial\rho_v}{\partial t}=0$, $(\bar{E}_i=0)$ cu soluția $\rho_v(\bar{r}, t)=\rho_v(\bar{r}, 0)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$ din care rezultă că în conductori omogeni, densitatea de volum a sarcinei tinde asimptotic către zero, oricum ar varia cîmpul. Mărimea constantei de timp $\tau=\varepsilon/\sigma$ (timpul de relaxare) este o caracteristică de material care permite clasificarea materialelor în conductori perfecți ($\tau=0$, de exemplu, supraconductorii), conductori propriu-ziși ($\tau<10^{-12}$), semiconductori (τ de ordinul microsecundelor pînă la al secundelor) și izolanți (τ de ordinul minutelor, orelor etc.).

cîmpul electric și cîmpul magnetic (prin legea inducției electromagnetice, respectiv prin curentul de deplasare din legea circuitului magnetic), care condiționează existența cîmpului electromagnetic „desprins" de corpuri, sub formă de unde electromagnetice. Se exemplifică această analiză într-un caz particular, și anume în cazul cîmpului electromagnetic, ale cărui mărimi de stare locală au (la un moment dat) aceeași valoare în toate punctele unui plan perpendicular pe o direcție privilegiată (oricare ar fi un astfel de plan). Dacă se alege direcția privilegiată drept axă Ox, rezultă că în acest tip de cîmp (numit cîmp plan sau undă plană), mărimile de stare depind numai de x și de t.

$$\bar{E}=\bar{E}(x,\ t);\quad \bar{H}=\bar{H}(x,\ t). \tag{29.8}$$

O astfel de *undă electromagnetică plană* există (practic) la distanță suficient de mare de orice sursă (de extensiune finită) de unde electromagnetice (de exemplu, de orice antenă de emisiune) într-un mediu izotrop și omogen. Presupunînd un astfel de mediu imobil, liniar, cu permitivitatea ε și permeabilitatea μ, se caută soluțiile *variabile în timp* (nu cele statice) ale ecuațiilor lui Maxwell (29.1′—29.4′), în ipoteza (29.8), considerînd că în mediul respectiv nu există nici sarcini ($\rho_v=0$), nici curenți ($\bar{J}=0$), pentru a pune astfel în evidență cîmpul electromagnetic produs (local) exclusiv prin interacțiunea dintre cîmpul electric variabil în timp și cîmpul magnetic variabil în timp și nu prin alte căi. Pentru motive care se vor preciza ulterior, direcția axei Ox (în lungul căreia nu mai variază mărimile respective) se numește *direcție de propagare.*

În aceste condiții $\left(\frac{\partial}{\partial y}\equiv 0,\ \frac{\partial}{\partial z}\equiv 0,\ \rho_v\equiv 0,\ \bar{J}\equiv 0\right)$ ecuațiile (29.1′ — 29.4′) devin:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t}=0;\quad -\frac{\partial H_z}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t};\quad \frac{\partial H_y}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{29.9}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t}=0;\quad -\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_y}{\partial t};\quad \frac{\partial E_y}{\partial x}=-\mu\frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{29.10}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \tag{29.11};\qquad \frac{\partial H_x}{\partial x}=0 \tag{29.12}$$

Din aceste relații rezultă două consecințe importante:

a) *Unda electromagnetică plană este o undă transversală*, adică nu are componente în direcția de propagare: $E_x=0$; $H_x=0$; vectorii $\bar{E}$ și $\bar{H}$ sînt conținuți în plane transversale față de direcția de propagare. În adevăr, din ecuațiile precedente rezultă că E_x și H_x nu variază nici în timp, nici în spațiu, adică pot constitui cîmpuri statice, dar nu cîmpuri variabile în timp (unde).

b) *Sistemele de ecuații* (29.10) *rămase pot fi grupate în două perechi de ecuații*: una se referă numai la mărimile E_y și H_z, iar alta numai la mărimile E_z și H_y. Perechile de mărimi (E_y, H_z) și (E_z, H_y) nu sînt legate prin nici un fel de relații și sînt deci independente între ele. În cazul cînd toate mărimile

sînt diferite de zero, ecuațiile precedente exprimă existența a două unde suprapuse care nu se influențează reciproc.[1]

Ultima observație permite să se restrîngă studiul la numai una dintre aceste unde, de exemplu, la cea descrisă de perechea de mărimi E_y și H_z, adică să se presupună că $E_z = 0$ și $H_y = 0$. Vectorii $\bar{E} = \bar{j}E_y$ și $\bar{H} = \bar{k}H_z$ sînt perpendiculari între ei și ambii sînt perpendiculari pe direcția de propagare (fig. 29.2).

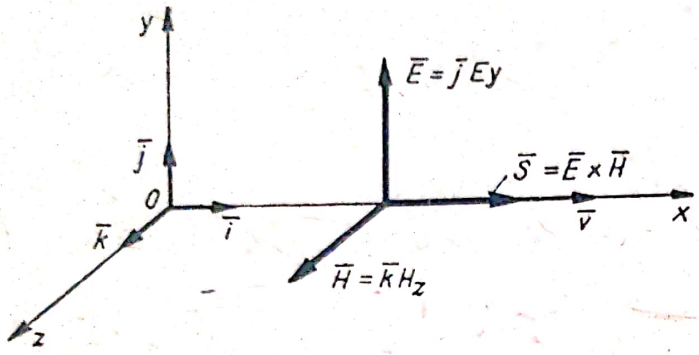


Fig. 29.2.

Funcțiile $E_y(x,t)$ și $H_z(x,t)$ sînt legate prin ecuațiile lui Maxwell rămase, (29.9) și (29.10), adică prin sistemul de două ecuații cu derivate parțiale, simultan, de ordinul I:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t};$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \qquad (29.13)$$

Un astfel de sistem de ecuații se rezolvă eliminînd una dintre funcțiile necunoscute. Dacă derivăm prima ecuație în raport cu x și o adunăm cu a doua ecuație derivată în raport cu t și înmulțită cu ε, se elimină E_y și se obține pentru H_z ecuația cu derivate parțiale de ordinul al doilea, numită *ecuația undelor*:

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0.} \qquad (29.14)$$

Dacă derivăm a doua ecuație în raport cu x și o adunăm cu prima ecuație derivată în raport cu t și înmulțită cu μ, se elimină H_z și se obține pentru E_y aceeași ecuație cu derivata parțiale ca pentru H_z:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0.} \qquad (29.15)$$

Cele două cîmpuri satisfac deci aceeași ecuație. Nu trebuie însă să se caute soluții independente pentru fiecare ecuație (29.14) sau (29.15), deoarece E_y și H_z sînt legate prin ecuațiile (29.13). De aceea, se caută soluțiile numai pentru una dintre ecuații, de exemplu pentru E_y, iar H_z se deduce apoi din relația (29.13).

În teoria ecuațiilor cu derivate parțiale se arată că o soluție generală a ecuației undelor (29.15) este o *funcție f arbitrară* care depinde de x și t numai prin intermediul unei combinații liniare și omogene a acestor variabile, adică prin intermediul variabilei

$$t' = t - \frac{x}{v} \qquad (29.16)$$

[1] Deoarece fiecare dintre aceste unde constituie o oscilație transversală de direcție de oscilație invariabilă (adică cu polarizare liniară — cum se spune în optică), rezultă că orice undă electromagnetică plană provine din suprapunerea a două unde cu polarizări liniare, după două direcții ortogonale, care sînt independente între ele.

avînd deci forma:

$$E_y = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = f(t') \,. \tag{29.17}$$

În această expresie, v este o constantă ale cărei valori posibile rezultă imediat substituind (29.17) în (29.15) (cu care ocazie se verifică efectiv că (29.17) este soluția căutată). Observînd că E_y e funcție de x și t, prin intermediul lui t', și notînd cu $f' = \frac{df}{dt'}$, și cu $f'' = \frac{d^2f}{dt'^2}$ se obține succesiv:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{df}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{v}f'; \quad \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{df}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t} = f'$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{1}{v}\frac{df'}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{v^2}f''; \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{df'}{dt'}\frac{\partial t'}{\partial t} = f''$$

adică:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = f''\cdot\left[\frac{1}{v^2} - \varepsilon\mu\right] . \tag{29.18}$$

Pentru ca membrul al doilea să se anuleze identic, este suficient ca:

$$v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \text{ sau } v = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} . \tag{29.19}$$

Semnificația fizică a constantei v rezultă imediat dacă se observă că scăzînd și adunînd Δt la argumentul $t - \frac{x}{v}$ se obține identitatea:

$$f\left(t - \frac{x}{v}\right) \equiv f\left[(t - \Delta t) - \frac{x - v\Delta t}{v}\right] . \tag{29.20}$$

Din (29.20) rezultă că soluția f a ecuației undelor depinde de timp și de punct *astfel încît valoarea ei în punctul x este, în fiecare moment t, egală cu valoarea pe care a avut-o în trecut funcțiunea, și anume în momentul $t - \Delta t$ într-un punct situat mai îndărăt cu distanța $v\,\Delta t$*. Cu alte cuvinte, forma (repartiția spațială) a funcțiunii se deplasează în lungul axei x cu viteza $\frac{v\Delta t}{\Delta t} = v$, numită *viteza de fază* a undei. Aceasta este viteza pe care trebuie să o aibă un observator mobil pentru ca în raport cu el repartiția spațială a valorilor funcțiunii să apară invariabilă. Relația (29.19) arată că viteza de fază are două valori posibile egale și de sens contrar. Prima corespunde unei unde care se propagă în sensul pozitiv ales pentru axa x. Aceasta este numită convențional *undă directă* și are deci expresia:

$$f(t - \sqrt{\varepsilon\mu}\; x) \text{ cu } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} .$$

A doua corespunde unei unde care se propagă în sensul negativ al axei x și care este numită convențional *undă inversă*, avînd expresia:

$$f(t + \sqrt{\varepsilon\mu}\; x) \text{ cu } v = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} .$$

Fiecare dintre aceste unde există numai dacă au existat în prealabil undeva la stînga zonei din spațiu considerate (pentru unda directă), respectiv

la dreapta zonei din spațiu considerate (pentru unda inversă) condițiile fizice necesare producerii lor (de exemplu, o antenă de emisiune, o suprafață reflectantă etc.).

În cele ce urmează se va studia în continuare *unda directă* și se va nota cu c modulul lui v adică:

$$\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}\,c_0, \tag{29.21}$$

c_0 fiind modulul acestei viteze în vid (unde $\varepsilon=\varepsilon_0$ și $\mu=\mu_0$ adică $\varepsilon_r=1$, $\mu_r=1$)

$$\boxed{c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}} \tag{29.22}$$

Cu această notație, unda directă pentru intensitatea cîmpului electric are expresia:

$$E_y=f\left(t-\frac{x}{c}\right)=f(t-x\sqrt{\varepsilon\mu}), \tag{29.23}$$

în care f este o *funcție arbitrară*, de exemplu de forma:

$$E_y=E_{y\,max}\sin\omega\left(t-\frac{x}{c}\right) \tag{29.24}$$

în cazul unei variații sinusoidale în timp a cîmpului într-un punct dat.

Cunoscînd intensitatea cîmpului electric se poate calcula cu (29.13) și intensitatea cîmpului magnetic. Rezultă succesiv:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{1}{\mu}\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{\mu}\left(-\frac{1}{c}\right)f'=\frac{1}{\mu c}f'$$

și prin integrare

$$H_z=\frac{1}{\mu c}\int f'dt=\frac{1}{\mu c}\int\frac{\partial f}{\partial t}dt=\frac{1}{\mu c}f+\text{const.} \tag{29.25}$$

Constanta de integrare se poate omite, deoarece se caută numai soluțiile variabile în timp ale ecuațiilor. Se notează cu

$$\boxed{\zeta=\mu c=\frac{1}{\varepsilon c}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}=\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\zeta_0=\frac{E_y}{H_z} \tag{29.26}$$

o mărime de material caracteristică mediului, numită *impedanță de undă*, a cărei valoare relativă la vid:

$$\zeta_0=\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}=\sqrt{\frac{4\pi 10^{-7}}{\frac{1}{36\pi}\,10^{-9}}}=120\pi\approx 377\,\Omega \tag{29.27}$$

Scanned with OKEN Scanner

este o constantă universală, numită *impedanța de undă a vidului*. Cu această notație, intensitatea cîmpului magnetic H_z se scrie:

$$\boxed{H_z=\frac{1}{\zeta}f\left(t-\frac{x}{c}\right)=\frac{E_y}{\zeta}} \tag{29.28}$$

adică este în fiecare punct din spațiu proporțională și în fază cu intensitatea cîmpului electric. Expresia (29.26) justifică denumirea de impedanță[1] dată mărimii, deoarece H_z se măsoară în amperi/metru, iar E_y în volți/metru, așa că ζ se va măsura în unități de E_y/H_z adică în volți/amper=ohmi.

Cu (29.28) problema determinării mărimilor de stare ale cîmpului electromagnetic în unda electromagnetică plană este complet rezolvată, deoarece studiul perechii de mărimi H_y, E_z ar fi dus la rezultate cu totul analoge. Se pot, deci, enunța următoarele concluzii privitoare la undele electromagnetice plane:

a) În medii omogene, izotrope, liniare (ε, μ constante), neîncărcate ($\rho_v=0$), izolante ($\bar{J}=0$) și extinse indefinit, soluțiile ecuațiilor lui Maxwell, care depind de o singură variabilă spațială, corespunzînd de exemplu direcției axei Ox, sînt suprapuneri de unde plane elementare care se propagă cu viteza constantă $v=\pm c$, dată de relația (29.21) în lungul acestei axe.

b) În fiecare undă elementară, vectorii $\bar{E}$ și $\bar{H}$ sînt perpendiculari între ei și perpendiculari pe direcția de propagare, astfel că vectorii $\bar{v}$, $\bar{E}$ și $\bar{H}$ formează în această ordine un triedru triortogonal drept (v. fig. 29), *adică produsul vectorial* $\bar{E}\times\bar{H}$ *are direcția de propagare.*

c) Variația în timp a mărimilor $\bar{E}$ și $\bar{H}$ este arbitrară (și depinde de condițiile de producere a undei); în fiecare punct și în fiecare moment valorile E și H sînt proporționale, raportul lor fiind impedanța de undă a mediului dată de relația (29.26).

Alte proprietăți ale undei plane asociate transmisiunii de energie de către undă vor fi precizate în par. 29.4.1.

Proprietățile cîmpului electromagnetic variabil în timp, deduse din ecuațiile lui Maxwell, l-au determinat pe acesta să elaboreze teoria electromagnetică a luminii (1865), interpretînd lumina ca o formă particulară de undă electromagnetică (caracterizată prin spectrul de frecvențe ale acestor unde pentru care ochiul omenesc devine sensibil) de foarte mică lungime de undă. În acord cu această interpretare, viteza c_0 trebuie interpretată ca viteza luminii în vid, iar mărimea:

$$n=\frac{c_0}{c}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \tag{29.29}$$

ca indice de refracție al mediului (cu $\mu_r\approx 1$ în medii neferomagnetice).

---

[1] Noțiunea de impedanță este generalizarea celei de rezistență electrică pentru curentul alternativ și va fi introdusă în partea de curent alternativ a cursului.

Scanned with OKEN Scanner

Experiența a arătat că relația (29.22) dintre c_0 (măsurat pe cale optică) și μ_0 și ε_0 (măsurați pe cale electrodinamică) este foarte bine verificată și că toate consecințele privitoare la natura electromagnetică a luminii sînt în acord cu datele experimentale.

29.4. Teorema energiei electromagnetice. Fluxul energiei electromagnetice.

Concepția despre cîmpul electromagnetic considerat ca formă de materie capabilă să acumuleze și să transmită energie, permite să se interpreteze energetic o anumită consecință a ecuațiilor lui Maxwell, numită *teorema energiei electromagnetice*. Se consideră, în acest scop, o porțiune V_Σ mărginită de o suprafață închisă Σ din cîmpul electromagnetic (fig. 29.3), în interiorul căreia se găsesc corpuri imobile ($\bar{v}=0$) cu proprietăți de material liniare (fără histerezis, cu ε, respectiv μ, independente de intensitățile cîmpului electric, respectiv magnetic). În conformitate cu concepția menționată, în domeniul V_Σ este localizată o anumită energie electromagnetică W cu densitatea de volum:

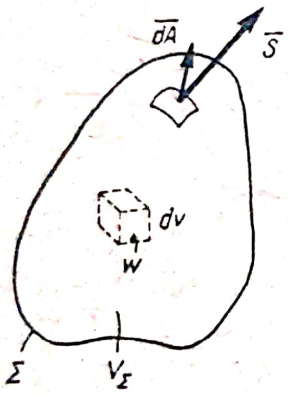


Fig. 29.3.

$$w=\frac{\overline{ED}}{2}+\frac{\overline{BH}}{2}=\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}=\frac{D^2}{2\varepsilon}+\frac{B^2}{2\mu} \qquad (29.30)$$

(stabilită în par. 8.2 pentru cîmpul electric și în par. 28.2 pentru cîmpul magnetic), adică:

$$W=\iiint_{V_\Sigma}\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}dv. \qquad (29.31)$$

Din principiul de conservare al energiei rezultă că la orice variație în timp a stării sistemului fizic pe care îl constituie cîmpul electromagnetic din interiorul suprafeței închise Σ, viteza de scădere a acestei energii trebuie să fie egală cu suma puterilor cedate de acest sistem fizic altor sisteme fizice. Cîmpul este însă în contact direct numai cu corpurile din interiorul suprafeței, (care fiind *imobile* primesc numai putere sub forma precizată de legea transformării de energie în conductori (par. 12.4), adică nu și sub forma de lucru mecanic), și cu cîmpul electromagnetic din exteriorul suprafeței. Se poate deci scrie:

$$-\frac{dW}{dt}=P_j+P_\Sigma. \qquad (29.32)$$

Aceasta este expresia *principiului de conservare a energiei* aplicat cazului studiat și în care W are expresia (29.31).

$$P_j=\iiint_{V_\Sigma}\overline{EJ}\,dv \qquad (29.33)$$

este puterea transmisă de cîmp corpurilor din V_Σ în procesul de conducție a curentului electric și în conformitate cu legea transformării de energie în

conductori (Joule-Lenz), iar P_Σ este *fluxul de energie electromagnetică*, adică puterea transmisă în cîmp prin suprafața închisă Σ, a cărui expresie este deocamdată necunoscută și urmează a fi determinată. Înlocuind (29.33) și (29.31) în (29.32) se obține:

$$-\frac{d}{dt}\iiint_{V_\Sigma}\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}\,dv=\iiint_{V_\Sigma}\overline{EJ}dv+P_\Sigma. \tag{29.34}$$

Se calculează explicit primul membru al acestei expresii. Deoarece mediul este imobil, se poate deriva sub semnul de integrală, și folosind ecuațiile lui Maxwell (29.1), (29.2) și relațiile (29.5) și (29.6), se obține:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{D^2}{2\varepsilon}+\frac{B^2}{2\mu}\right)=-\frac{1}{2\varepsilon}2\,\overline{D}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}-\frac{1}{2\mu}2\,\overline{B}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}=-\overline{E}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}-\overline{H}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}=$$

$$=-\overline{E}(\text{rot}\,\overline{H}-\overline{J})-\overline{H}(-\text{rot}\,\overline{E})=\overline{EJ}+(\overline{H}\,\text{rot}\,\overline{E}-\overline{E}\,\text{rot}\,\overline{H});$$

$$\text{dar}\quad \overline{H}\,\text{rot}\,\overline{E}-\overline{E}\,\text{rot}\,\overline{H}=\overline{H}(\nabla\times\overline{E})-\overline{E}(\nabla\times\overline{H})=\nabla(\overline{E}\times\overline{H})=\text{div}\,(\overline{E}\times\overline{H}).$$

Ultima identitate se poate demonstra și prin calcul direct în componente carteziene[1]. Se obține în definitiv:

$$-\frac{d}{dt}\iiint_{V_\Sigma}\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}dv=\iiint_{V_\Sigma}-\frac{\partial}{dt}\left(\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}\right)dv=\iiint_{V_\Sigma}[\overline{EJ}+div(\overline{E}\times\overline{H})]dv$$

și transformînd al doilea termen din membrul doi într-o integrală de suprafață cu ajutorul teoremei lui Gauss-Ostogrodsky rezultă:

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}\iiint_{V_\Sigma}\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}dv}_{-\frac{dW}{dt}}=\underbrace{\iiint_{V_\Sigma}\overline{EJ}\,dv}_{P_j}+\underbrace{\iint_\Sigma(\overline{E}\times\overline{H})\overline{dA}}_{P_\Sigma}. \tag{29.35}$$

Această consecință a ecuațiilor lui Maxwell, a cărei interpretare rezultă univoc din comparația cu (29.34 și 29.32), este *teorema energiei electromagnetice*:

„Viteza de scădere a energiei cîmpului electromagnetic dintr-un domeniu limitat de suprafață închisă Σ este egală cu suma dintre puterea cedată corpu-

---

[1] $\text{div}\,(\overline{E}\times\overline{H})=\frac{\partial}{\partial x}(E_yH_z-E_zH_y)+\frac{\partial}{\partial y}(E_zH_x-E_xH_z)+\frac{\partial}{\partial z}(E_xH_y-E_yH_x)=H_z\frac{\partial E_y}{\partial x}+$

$+E_y\frac{\partial H_z}{\partial x}-E_z\frac{\partial H_y}{\partial x}-H_y\frac{\partial E_z}{\partial x}+\ldots\ldots$

$=H_z\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+H_y\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+H_x\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)-E_z\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)-$

$-E_y\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)-E_x\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)=\overline{H}\,\text{rot}\,\overline{E}-\overline{E}\,\text{rot}\,\overline{H}.$

rilor din interiorul domeniului (numai prin efect Joule-Lenz în cazul corpurilor imobile) și fluxul prin suprafața Σ al vectorului $\bar{S}=\bar{E}\times\bar{H}$ numit *densitatea fluxului de energie electromagnetică* (sau vectorul lui Poynting).

Fluxul de energie electromagnetică printr-o suprafață oarecare Σ este deci:

$$P_\Sigma=\iint_\Sigma \bar{S}d\bar{A}=\iint_\Sigma (\bar{E}\times\bar{H})\,\bar{n}\,dA=\iint_\Sigma \underbrace{(\bar{E}\times\bar{H})\bar{n}}_{S_n}\cdot dA\ . \tag{29.36}$$

Sensul ales pentru normala $\bar{n}$ la suprafață este sensul de referință al fluxului de energie: Dacă $P_\Sigma>0$, cu un anumit $\bar{n}$ rezultă că energia se transmite efectiv în acest sens.

Observație. Transmisia de energie în cîmpul electromagnetic este o consecință a principiului localizării tuturor acțiunilor fizice și constituie un proces sui-generis *specific* cîmpului, *ireductibil* la alte forme de transmisiune de energie: lucrul mecanic, căldură, transportul convectiv de energie rezultat din mișcarea unui corp printr-o suprafață etc.

29.4.1. **Aplicație la calculul vectorului Păynting în unda electromagnetică plană.** Considerînd unda electromagnetică plană elementară studiată la par. 29.3 — v. fig. 29.2 — în care:

$$\bar{E}=\bar{j}E_y=\bar{j}f\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

$$\bar{H}=\bar{k}H_z=\bar{k}\frac{f\left(t-\frac{x}{v}\right)}{\zeta}=\bar{k}\frac{E_y}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}} \tag{29.37}$$

se constată ușor că:

a) densitatea de volum a energiei electromagnetice este egal repartizată între cîmpul electric și cîmpul magnetic:

$$w=\frac{\overline{ED}+\overline{BH}}{2}=\frac{\varepsilon E^2}{2}+\frac{\mu H^2}{2}=\varepsilon E^2=\mu H^2=2w_c=2w_m, \tag{29.38}$$

unde: $$w_c=\frac{\varepsilon E^2}{2}\quad\text{și}\quad w_m=\frac{\mu H^2}{2};$$

b) vectorul $\bar{S}=\bar{E}\times\bar{H}$ al densității fluxului de energie electromagnetică este dirijat în direcția de propagare și este egal în modul cu produsul dintre densitatea de energie și viteza de fază a undei:

$$S=EH=\frac{E^2}{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}=\frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=cw \tag{29.39}$$

$$\bar{S}=\bar{E}\times\bar{H}=\bar{v}w.$$

Această ultimă proprietate arată că densitatea fluxului de energie are în unda plană valoarea care ar rezulta împărțind energia totală ΔW, localizată într-un paralelipiped de bază ΔA și lungime $\Delta t\cdot v$, la aria ΔA și la timpul Δt, necesar paralelipipedului pentru a străbate o suprafață transversală față de direcția de propagare dacă ar avea o viteză egală cu viteza de fază a undei:

$$\frac{\Delta w}{\Delta A\cdot\Delta t}=\frac{w\Delta A\cdot v\cdot\Delta t}{\Delta A\cdot\Delta t}=vw. \tag{29.40}$$

Scanned with OKEN Scanner

Totul se petrece ca și cum unda *ar transporta* energia localizată în cîmp cu viteza ei de fază. Această interpretare „convectivă" a fluxului de energie electromagnetică nu este însă corectă, deoarece se poate face numai în unele cazuri particulare — cum este cel al undei plane — și nu reflectă o caracteristică a acestui proces, care există și în absența undelor — de exemplu în cîmpuri staționare.

29.4.2. **Aplicație la regăsirea expresiei Joule-Lenz a dezvoltării de energie într-o rezistență cu ajutorul vectorului Poynting:** Se consideră un conductor cilindric drept, de rază a și lungime l, cu material de rezistivitate ρ, parcurs de curentul continuu i. Liniile cîmpului electric $\overline{E}$ și magnetic $\overline{H}$ au în interiorul și în exteriorul conductorului (în vecinătatea suprafeței lui) alura din figura 29.1.

În interiorul conductorului, liniile lui $\overline{E}=\rho\overline{J}$ sînt paralele cu axa, iar ale lui $\overline{H}$ sînt cercuri concentrice. În exterior, liniile lui $\overline{H}$ au aceeași formă, pe cînd cîmpul $\overline{E}$ capătă o componentă normală E_n corespunzătoare potențialului conductorului și sarcinilor de pe suprafața lui, componenta tangențială $\overline{E}_t=\rho\overline{J}$ fiind egală cu cîmpul $\overline{E}$ din interior (din cauza conservării componentei tangențiale a lui $\overline{E}$, conform formei locale a teoremei potențialului, v. par. 4.8). Rezultă că în interior vectorul Poynting $\overline{S}=\overline{E}\times\overline{H}$ este radial și dirijat spre axă (aducînd regiunii centrale a conductorului energia necesară procesului de conducție electrică și care se regăsește sub formă de căldură), iar în exterior are o componentă longitudinală, care asigură transmisia de energie din lungul conductorului spre receptorul alimentat de conductor, și o componentă radială, care aduce în conductor energia corespunzătoare dezvoltării de căldură prin efect Joule-Lenz. Se calculează fluxul de energie prin suprafața laterală a conductorului în sensul $(-\overline{n})$, descompunînd în general vectorii $\overline{E}$ și $\overline{H}$ în componente normale și tangențiale la suprafață:

$$\overline{E}=\overline{E}_n+\overline{E}_t;\qquad \overline{H}=\overline{H}_n+\overline{H}_t \tag{29.41}$$

$$P_\Sigma=-\iint_\Sigma(\overline{Sn})dA=-\iint_\Sigma(\overline{E}\times\overline{H})\overline{n}dA=-\iint_\Sigma(\overline{E}_t\times\overline{H}_t)\overline{n}\,dA$$

deoarece numai componentele tangențiale ale lui $\overline{E}$ și $\overline{H}$ contribuie la fluxul de energie. În adevăr:

$$\overline{Sn}=(\overline{E}\times\overline{H})\overline{n}=\overline{n}[(\overline{E}_n+\overline{E}_t)\times(\overline{H}_n+\overline{H}_t)]=\overline{n}(\overline{E}_n\times\overline{H}_n)+\overline{n}(\overline{E}_n\times\overline{H}_t)+\overline{n}(\overline{E}_t\times\overline{H}_n)+\overline{n}(\overline{E}_t\times\overline{H}_t).$$

Primele trei produse mixte sînt nule, deoarece cîte cel puțin doi vectori sînt paraleli. În cazul dat, $\sin(\widehat{\overline{E}_t\times\overline{H}_t})=1$, iar $\overline{n}\uparrow\downarrow\overline{E}_t\times\overline{H}_t$ pe suprafața laterală (prin baze fluxul este nul), astfel că punînd $dA=ds\,dl$ (v. fig. 29.4):

$$P_\Sigma=\iint E_tH_t\,dsdl=\int_0^l E_t dl\overbrace{\oint_\Gamma H_t ds}^{i}.$$

A doua integrală este egală cu curentul i din conductor, conform legii circuitului magnetic, iar $E_tdl=\rho Jdl=\rho AJ\frac{dl}{A}=\rho i\frac{dl}{A}$ și se obține:

$$P_\Sigma=\left(\int\rho i\frac{dl}{A}\right)i=i^2\int\rho\frac{dl}{A}=Ri^2.$$

Se regăsește astfel puterea Joule-Lenz.

Exemplul precedent scoate în evidență faptul că transmisiunea energiei electromagnetice de la generator la receptor se face prin izolantul din afara conductorilor (valoarea vectorului Poynting fiind maximă, o dată cu E și H în vecinătatea suprafeței acestora) și nu prin conductor (unde S este radial). *Conductorul are numai rolul de a ghida această transmisie de energie spre receptor, absorbind totodată din cîmp energia necesară acoperirii pierderilor prin efect Joule-Lenz în el.*

Scanned with OKEN Scanner

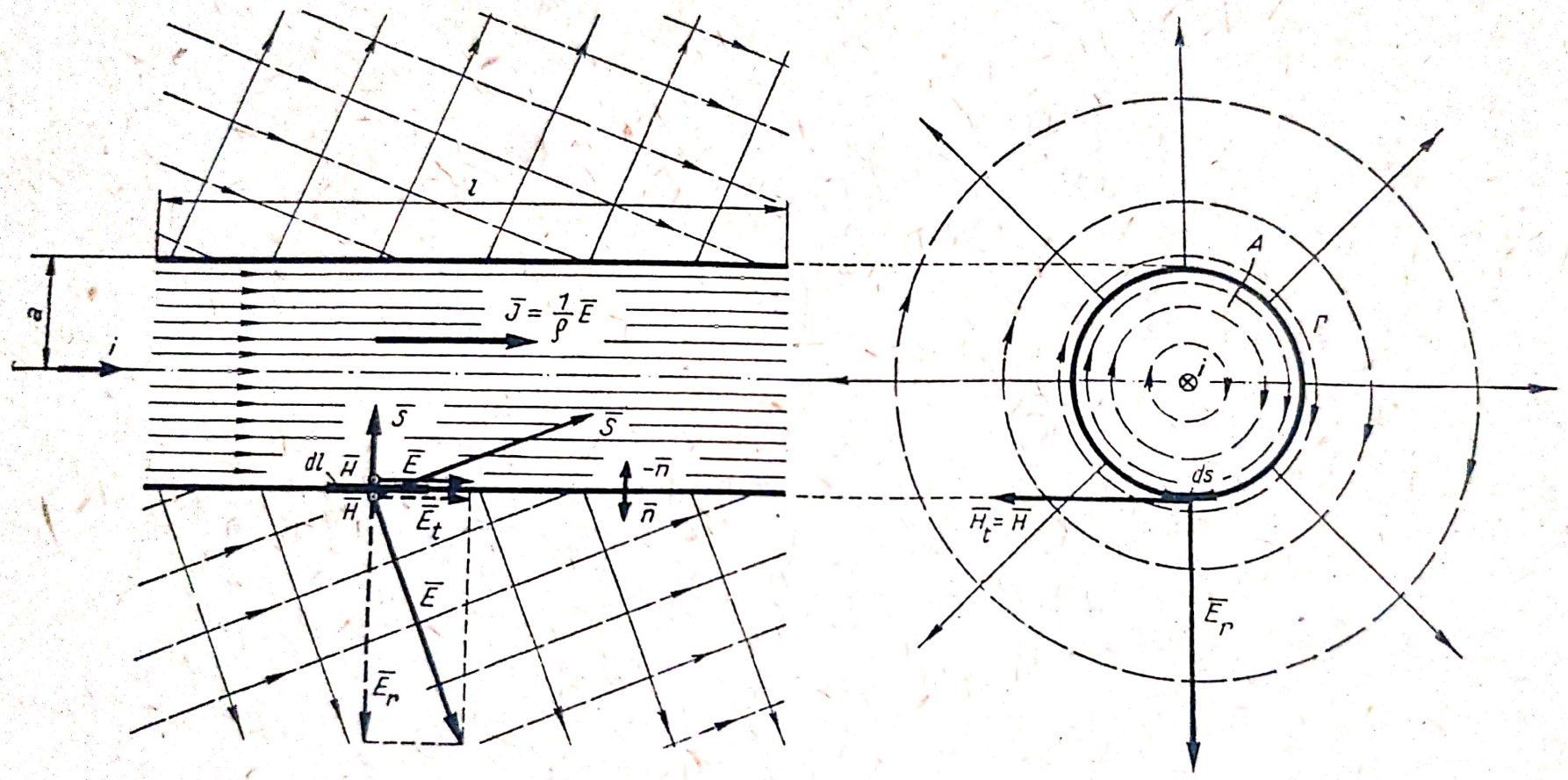

a
i
l
$\bar{J} = \frac{1}{\rho}\bar{E}$
$\bar{S}$
$\bar{S}$
dl
$\bar{H}$
$\bar{E}$
$-\bar{n}$
$\bar{H}$
$\bar{E}_t$
$\bar{n}$
$\bar{E}$
$\bar{E}_r$
A
r
i
ds
$\bar{H}_t = \bar{H}$
$\bar{E}_r$

Fig 29.4.

30. Sistemele de unități folosite în electromagnetism

30.1. Problemele sistemelor de unități

Principalele sisteme de unități folosite în electromagnetism sînt sistemele MKSA, CGS electrostatic (CGS es) și CGS electromagnetic (CGS em), cum și sistemul CGS-Gauss, care utilizează o anumită formă a relațiilor fundamentale și va fi prezentat separat (par. 31.3). Caracteristicile unuia sau altuia din sistemele de unități și transformarea unităților de la un sistem la altul se pot studia după ce s-au clarificat anumite probleme prealabile: problema constantelor universale, problema unităților independente, problema raționalizării.

30.1.1. **Constantele universale.** În prezentarea fenomenelor electromagnetice intervin permitivitatea vidului ε_0 și permeabilitatea vidului μ_0.

Expresia forței electrostatice de repulsie dintre două mici corpuri punctuale situate la distanța R, încărcate cu sarcini egale (q), (legea lui Coulomb) utilizată, de obicei, pentru indicarea în concret a unității de sarcină electrică (v. par. 2.4):

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2} \tag{30.1}$$

arată că valoarea numerică a lui ε_0 este univoc determinată de alegerea unității de sarcină și reciproc (dacă unitățile de măsură ale mărimilor geometro-mecanice F și R sînt fixate).

Expresia forței electrodinamice de atracție exercitate pe lungimea l a doi conductori filiformi rectilinii și paraleli, foarte lungi, situați la distanța r și parcurși de curenți egali și de același sens i, utilizată de obicei pentru indicarea în concret a unității de curent electric (v. par. 16.4);

$$F=\frac{\mu_0}{4\pi}2\frac{i^2 l}{r} \tag{30.2}$$

arată că valoarea numerică a lui μ_0 este univoc determinată de alegerea unității de curent electric și reciproc (dacă unitățile de măsură ale mărimilor geometro-mecanice F, l și r sînt fixate).

Deoarece, însă, unitățile de curent și de sarcină *nu sînt independente*, ca urmare a interpretării microscopice a curentului:

$$i=\frac{dq_m}{dt}, \tag{30.3}$$

rezultă că nici valorile numerice ale lui ε_0 și μ_0 nu pot fi independente, în sistemele uzuale de unități care adoptă scrierea (30.1), (30.2) și (30.3) a relațiilor considerate. Această concluzie este evidențiată de studiul undei electromagnetice plane și de interpretarea electromagnetică a luminii, din care rezultă relația lui Maxwell (29.22).

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad \text{sau} \quad c_0^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} \tag{30.4}$$

cu $c_0=2{,}997\,76\cdot10^8$ m/s$\approx3\cdot10^8$ m/s$=3\cdot10^{10}$ cm/s.

Concluzii: *a*) În electromagnetism există o singură constantă universală independentă a cărei valoare poate fi aleasă arbitrar într-un sistem de unități dat.

b) Alegerea acestei constante universale este echivalentă cu alegerea unei anumite unități fie pentru sarcină fie pentru intensitatea curentului, oricare rezultînd cu relația (30.3) din cealaltă:

— dacă *se alege* valoarea numerică a lui ε_0, din (30.1) rezultă unitatea de sarcină ($q=1$ pentru $R=1$ și $F_e=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ numeric); din (30.3) rezultă unitatea de curent, iar din (30.4) — valoarea numerică a permeabilității vidului:

$$\mu_0=\frac{1}{\varepsilon_0 c_0^2}; \tag{30.4'}$$

— dacă *se alege* valoarea numerică a lui μ_0, din (30.2) rezultă unitatea de curent ($i=1$ pentru $R=1$, $l=1$ și $F_m=\frac{2\mu_0}{4\pi}$, numeric), din (30.3) rezultă unitatea de sarcină, iar din (30.4) — valoarea numerică a permitivității vidului:

$$\varepsilon_0=\frac{1}{c_0^2\mu_0}. \tag{30.4''}$$

30.1.2. **Unitățile independente.** În principalele sisteme de unități mecanice se folosesc drept mărimi cu unități de măsură independente (mărimi fundamentale) lungimea, masa și durata (L, M, T). Deoarece unitățile de măsură ale mărimilor secundare se deduc din relațiile de definiție ale acestora, în funcție de mărimile fundamentale, sau din alte relații în care intră aceste din urmă marimi, un sistem de unități e univoc definit de indicarea unităților alese pentru mărimile fundamentale, adică de indicarea unităților independente.

Analiza precedentă privitoare la existența unei singure constante universale independente electromagnetice duce la concluzia că în electromagnetism trebuie să se mai adauge pe lîngă cele trei unități independente mecanico-geometrcie o *a patra unitate independentă electromagnetică*; aceasta este, de obicei, unitatea de sarcină electrică sau aceea de curent electric.

Sistemele de unități utilizate în electromagnetism (și care utilizează modul de scr ere al relațiilor fundamentale folosit în tehnică) sînt sisteme cu patru unități independente (cu patru mărimi fundamentale): lungimea, masa, durata și intensitatea curentului electric (sau sarcina electrică).

Pentru a ne convinge că unitățile tuturor celorlalte mărimi rezultă univoc din cele patru de mai înainte — respectiv, la sistemul de unități mecanice dat, d n unitatea de curent sau de sarcină — este suficient să se verifice acest lucru pentru *mărimile primitive*, care au stat la baza experimentală a teoriei și în funcțiune de care au fost definite toate celelalte mărimi (numite derivate). Aceste mărimi primitive sînt q, $\overline{p}$, $\overline{E}$, $\overline{D}$, i, $\overline{m}$, $\overline{H}$ și $\overline{B}$ (v. și par. 29.1) și ele au intrat în următoarele relații de definiție:

$$\overline{F}=q\overline{E}_v \text{ (v. și rel. 2.5)} \tag{30.5}$$

$$\overline{C}=\overline{p}\times\overline{E}_v \text{ (v. rel. 4.1.)} \tag{30.6}$$

$\bar{D}=\varepsilon_0\bar{E}$ *fantă* $\perp P$ (v. rel. 5.6 dar și $\iint_\Sigma \bar{D}d\bar{A}=q_\Sigma$) (30.7)

$\bar{C}=iA\times\bar{B}_v$ (v. rel. 16.9) (30.8)

$\bar{C}=\bar{m}\times\bar{B}_v$ (v. rel. 18.1) (30.9)

$\bar{H}=\frac{1}{\mu_0}\bar{B}_{canal\,\bar{M}}$ (v. rel. 19.2 dar și $\oint\bar{H}\,\bar{ds}=i$) (30.10)

— Dacă se alege sarcina q ca nouă mărime fundamentală, unitatea de intensitate a cîmpului $\bar{E}$, rezultă din (30.5), cea de moment electric $\bar{p}$ din (30.6) și cea de inducție electrică $\bar{D}$ din (30.7).

— Dacă se alege curentul i ca nouă mărime fundamentală, unitatea de inducție magnetică $\bar{B}$ rezultă din (30.8), cea de moment magnetic $\bar{m}$ din (30.9) și cea de intensitate a cîmpului magnetic $\bar{H}$ din (30.10).

Rezultă că toate unitățile mărimilor electrice sînt univoc determinate de alegerea unității de sarcină și toate unitățile mărimilor magnetice sînt univoc determinate de alegerea unității de curent (la unități mecanice date). Cum curentul și sarcina sînt legate prin relația (30.3), se verifică afirmația că alegerea uneia dintre ele (respectiv a constantei universale ε_0 sau μ_0 care o determină), precizează univoc toate unitățile mărimilor electromagnetice.

30.1.3. **Problema raționalizării.** Istoricește s-au încetățenit însă două moduri de scriere a relațiilor de definiție (30.1, 30.2) a constantelor universale și a legilor generale ale electromagnetismului: scrierea clasică sau nerațională, care în prezent tinde a fi abandonată în tehnică, și scrierea rațională, care a fost utilizată în prezentul curs. În scrierea nerațională se modifică unitățile de măsură ale unor anumite mărimi (zise *afectate de raționalizare*) cu factorul 4π, deci și valorile numerice ale acestor mărimi, care vor fi notate accentuat. Mărimi *afectate* de raționalizare sînt: ε, $\bar{D}$, Ψ, χ_e, μ, $\bar{H}$, U_m, χ_m (cum și reluctanța R_m și permeanța Λ).

Mărimi *neafectate* de raționalizare sînt:

$$q,\ \bar{E},\ \bar{p},\ \bar{P},\ U,\ R,\ C \text{ etc. și}$$
$$i,\ \bar{B},\ \bar{m},\ \bar{M},\ \Phi,\ L \text{ etc.}$$

În tabela următoare se prezintă principalele relații întîlnite pînă acum (inclusiv cele 11 legi generale și de material), punîndu-se în evidență, acolo unde este cazul, cele două forme de scriere:

Forma nerațională	Forma rațională
$F=\frac{1}{\varepsilon_0'}\frac{q^2}{R^2}$ (30.1′)	$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}$ (30.1)
și deci $\bar{E}_v=\frac{1}{\varepsilon_0'}\iiint\frac{\rho_v\bar{R}}{R^3}dv'$ (30.11′)	și deci $\bar{E}_v=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_v\cdot\bar{R}}{R^3}dv'$ (30.11)
$F=\mu_0'\frac{2i^2}{2}l$ (30.2′)	$F=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2i^2}{r}l$ (30.2)
și deci $\bar{H}'=i\oint\frac{\bar{ds}\times\bar{R}}{R^3}$ (30.12′)	și deci $\bar{H}=\frac{i}{4\pi}\oint\frac{\bar{ds}\times\bar{R}}{R^3}$ (30.12)
$w=\frac{\bar{E}\,\bar{D}'}{8\pi}+\frac{\bar{B}\,\bar{H}'}{8\pi}$; $\bar{S}=\frac{1}{4\pi}\bar{E}\times\bar{H}'$ (30.13′)	$w=\frac{\bar{E}\,\bar{D}}{2}+\frac{\bar{B}\,\bar{H}}{2}$; $\bar{S}=\bar{E}\times\bar{H}$ (30.13)

$$\oint \overline{E}\,\overline{ds} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (I)$$

(II′) $\iint_{\Sigma} \overline{D'}\,\overline{dA} = 4\pi q_{\Sigma}$	$\iint_{\Sigma} \overline{D}\,\overline{dA} = q_{\Sigma}$ (II)
(III′) $\overline{D'} = \varepsilon' \overline{E} + 4\pi \overline{P}$	$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}$ (III)
(IV′) $\overline{P} = \varepsilon_0 \chi'_e \overline{E}$ și $\overline{D'} = \varepsilon' \overline{E}$	$\overline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}$ și $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$ (IV)
(V′) $\oint_{\Gamma} \overline{H'}\,\overline{ds} = 4\pi 0 + \frac{d\Psi'}{dt}$	$\oint_{\Gamma} \overline{H}\,\overline{ds} = 0 + \frac{d\Psi}{dt}$ (V)

$$(VI) \quad \iint_{\Sigma} \overline{B}\,\overline{dA} = 0$$

(VII′) $\overline{B} = \mu'_0(\overline{H'} + 4\pi \overline{M})$	$\overline{B} = \mu_0(\overline{H} + \overline{M})$ (VII)
(VIII′) $\overline{M} = \chi'_m \overline{H'}$ și $\overline{B} = \mu' \overline{H'}$	$\overline{M} = \chi_m \overline{H}$ și $\overline{B} = \mu \overline{H}$ (VIII)

$$(IX) \quad i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt}$$

$$(X) \quad \overline{E} + \overline{E}_i = \rho \overline{J}$$

$$(XI) \quad p_j = \overline{E}\,\overline{J}$$

Comparînd cele două forme de scriere se constată următoarele:

a) În scrierea raționalizată dispare factorul 4π din legile generale și de material (v. de ex. II față de II′, V față de V′) dar apare în relațiile de definiție ale constantelor universale (30.1 și 30.2), respectiv în expresiile coulombiene ale cîmpului electrostatic (30.11) și expresia Biot-Savart-Laplace a cîmpului magnetic (30.12). Această simplificare a scrierii *legilor* a fost cauza adoptării sistemului raționalizat în tehnică.

b) În scrierea raționalizată factorul 4π sau 2π subsistă în problemele cu simetrie sferică sau cilindrică, dar dispare din problemele cu simetrie plană. Capacitatea condensatorului sferic se scrie $C = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ în scrierea raționalizată și $C = \frac{\varepsilon'}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ în cea neraționalizată, în timp ce capacitatea condensatorului plan se scrie $C = \frac{\varepsilon A}{d}$ în scrierea raționalizată și $C = \frac{\varepsilon' A}{4\pi d}$ în scrierea neraționalizată.

c) În sistemele de unități *neraționalizate* se folosesc unități de măsură de 4π ori mai mici pentru ε, $\overline{D}$, Ψ, $\overline{H}$, U_m, respectiv de 4π ori mai mari pentru μ, χ_m, χ_e. Valorile numerice corespunzătoare sînt de 4π ori mai mari pentru

$$\varepsilon' = 4\pi\varepsilon,\ \overline{D'} = 4\pi\overline{D},\ \Psi' = 4\pi\Psi,\ \overline{H'} = 4\pi\overline{H},\ U'_m = 4\pi U_m, \qquad (30.14)$$

respectiv de 4π ori mai mici pentru

$$\mu' = \frac{\mu}{4\pi},\ \chi'_m = \frac{\chi_m}{4\pi};\ \chi'_e = \frac{\chi_e}{4\pi}. \qquad (30.14')$$

d) Se poate unifica scrierea cu ajutorul unui coeficient $\varkappa$, numit *coeficient de raționalizare*, care va avea prin definiție valoarea 4π în unități nerațonalizate și valoarea 1 în unități rațonalizate. Cu ajutorul acestui coeficient legile generale și de material se scriu:

(I) $\oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{ds} = -\frac{d\Phi}{dt}$; (V) $\oint_\Gamma \overline{H}\overline{ds} = \varkappa\theta + \frac{d\Psi}{dt}$

(II) $\iint_\Sigma \overline{D}\,\overline{dA} = \varkappa q_\Sigma$; (VI) $\iint_\Sigma \overline{B}\,\overline{dA} = 0$

(III) $\overline{D} = \varepsilon \cdot \overline{E} + \varkappa \overline{P}$; (VII) $\overline{B} = \mu_0(\overline{H} + \varkappa \overline{M})$

(IV) $\overline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \overline{E}$ și $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$; (VIII) $\overline{M} = \chi_m \overline{H}$ și $\overline{B} = \mu \overline{H}$

(IX) $i_c = -\frac{dq_\Sigma}{dt}$; (X) $\overline{E} + \overline{E}_i = \rho \overline{J}$; (XI) $P_j = \overline{E}\overline{J}$

iar relațiile (30.1), (30.2), (30.11), (30.12) și (30.13) se scriu:

$$F = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{R^2}; \qquad F = \frac{\varkappa\mu_0}{4\pi} 2\frac{i^2}{r} l \tag{30.15}$$

$$\overline{E} = \frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_v R}{R^3} dv; \qquad \overline{H} = \frac{\varkappa i}{4\pi}\oint \frac{\overline{ds}\times\overline{R}}{R^3} \tag{30.16}$$

$$w = \frac{\overline{ED}}{2\varkappa} + \frac{\overline{BH}}{2\varkappa}; \qquad S = -\frac{1}{\varkappa}(\overline{E}\times\overline{H}). \tag{30.17}$$

Față de scrierea (rațonalizată) folosită în acest curs, scrierea generală cu ajutorul coeficientului de rațonalizare înlocuiește

pe $\frac{1}{\varepsilon}$ cu $\frac{\varkappa}{\varepsilon}$

pe μ cu $\varkappa\mu$

pe $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$ cu $\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon}$

pe $\frac{\mu}{4\pi}$ cu $\frac{\varkappa\mu}{4\pi}$

în orice relație *care nu mai conține și alte mărimi afectate de raționalizare* ($\overline{D}$, $\overline{H}$, Ψ, U_m, χ_m, χ_e, R_m, Λ) *înafară de* ε *și* μ. Astfel de relații sînt expresiile capacităților și inductivităților.

30.2. Principalele sisteme de unități

30.2.1. **Caracterizarea sistemelor de unități.** În acest curs a fost folosit în permanență sistemul de unități rațonalizat, și anume *sistemul MKSA rațonalizat* numit și *sistemul internațional SI*. În afară de acesta, în literatura tehnică se mai folosesc încă sistemele de unități MKSA nerațonalizat, CGS em nerațonalizat și CGS es nerațonalizat.

În conformitate cu cele arătate în par. 30.1, un astfel de sistem de unități electromagnetice e complet determinat de următoarele condiții:

a) alegerea sistemului de unități mecanice de bază (MKS sau CGS);

b) alegerea formei de scriere rațională ($\varkappa=1$) sau nerațională ($\varkappa=4\pi$);

c) alegerea unității independente electromagnetice, prin convenirea asupra valorii numerice a constantei universale care o determină: ε_0 pentru unitatea de sarcină *sau* μ_0 pentru unitatea de curent.

Dacă s-au ales aceste condiții, modul de scriere al relațiilor fundamentale și unitățile mărimilor derivate, respectiv factorii de conversiune ai unităților la trecerea de la un sistem la altul (v. par. 30.2.2), sînt complet determinate. Astfel:

1). *În sistemul MKSA raționalizat se aleg:*

a) sistemul MKS ca sistem mecanic de bază;

b) $\varkappa=1$;

c) unitatea de curent numită *amper* (v. par. 16.4) ca unitate electromagnetică independentă; ea corespunde la alegerea valorii numerice $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ pentru permeabilitatea vidului.

[Rezultă $\varepsilon_0=(1/36\pi)10^{-9}$ din 30.4''].

2. *În sistemul MKSA neraționalizat se aleg:*

a) sistemul MKS ca sistem mecanic de bază;

b) $\varkappa=4\pi$;

c) unitatea electromagnetică independentă este unitatea de curent numită *amper* (v. par. 16.4) și corespunde la alegerea valorii numerice $\mu_0'=10^{-7}$ pentru permeabilitatea vidului. [Rezultă $\varepsilon_0'=(1/9)10^{-9}$ din 30.4''].

3) *În sistemul CGS em neraționalizat se aleg:*

a) sistemul CGS ca sistem mecanic de bază;

b) $\varkappa=4\pi$;

c) unitatea de curent numită *biot* (Bi) ca unitatea electromagnetică independentă; ea corespunde la alegerea valorii numerice $\mu_0'=1$ pentru permeabilitatea vidului. [Rezultă $\varepsilon_0'=(1/9)10^{-20}$ din 30.4''.]

4) *În sistemul CGS es neraționalizat se aleg:*

a) sistemul CGS ca sistem mecanic de bază;

b) $\varkappa=4\pi$;

c) unitatea de sarcină numită *franklin* ca unitate electromagnetică independentă (Fr); ea corespunde la alegerea valorii numerice $\varepsilon_0'=1$. (Rezultă $\mu_0'=(1/9)10^{-20}$ din 30.4').

Aceste date sînt trecute în tabela 30.1 în care se dau în continuare și valorile celei de-a doua constante universale (deduse cu relația 30.4), cum și denumirile (dacă există) și factorii de conversiune a principalelor unități secundare.

30.2.2. **Relațiile de conversiune a unităților.** În tabela 30.1. sus s-au indicat și relațiile de conversiune ale unităților ultimelor trei sisteme în funcție de unitățile sistemului MKSA raționalizat. În principiu, deducerea acestor relații trebuie făcută pe baza relațiilor de definiție ale mărimilor respective, dar se pot folosi și orice alte relații în care intră mărimea considerat și mărimi cu relații de conversiune cunoscute. Practic se procedează astfel:

Scanned with OKEN Scanner

CARACTERIZAREA SISTEMULUI (valori alese)							Constanta universală neindependentă		
Sistemul electromagnetic de unităţi	Sistem. mec. de bază	Coeficientul de raţionalizare $\varkappa$	Constanta universală independentă		Unitatea electromagnetică independentă		$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0}$	$\mu_0 = \frac{1}{c_0^2 \varepsilon_0}$	
			ε_0	μ_0	q	i			
MKSA raţionalizat (sistem internaţional practic)	MKS	1	—	$4\pi 10^{-7}$ $\frac{H}{m}$	—	A amper	$\frac{10^7}{4\pi c_0^2} \approx$ $\approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9}$ F/m $\approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m (c_0 în m/s)	—	coul 1 (1 A
MKSA neraţionalizat	MKS	4π	—	10^{-7}	—	A amper	$\frac{10^7}{c_0^2} \approx$ $\approx \frac{1}{9} 10^{-9}$ (c_0 în m/s)	—	
CGS em (electromagnetic) neraţionalizat	CGS	4π	—	1	—	Bi biot 1Bi = 10A = 1 daA (deca-amper)	$\frac{1}{c_0^2} \approx$ $\approx \frac{1}{9} 10^{-20}$ (c_0 în cm/s)	—	Bi 1 Bi 10
CGS es (electrostatic) neraţionalizat	CGS	4π	1	—	Fr	—	—	$\frac{1}{c_0^2} \approx$ $\approx \frac{1}{9} 10^{-20}$ (c_0 în cm/s)	

* Mărimi afectate de raţionalizare (cu unităţi diferite în sistemele neraţionalizate faţă d

OBSERVAŢII:

1. Unităţile CGS care nu au denumiri adoptate se scriu prescurtat astfel: ues CGS Φ, sau numai ues Φ (unitatea electrostatică CGS de flux magnetic) uem CGS D, sau numai uem D (unitatea electromagnetică CGS de inducţie electrică) etc.
2. Uneori pentru ues CGS se foloseşte prefixul stat — urmat de denumirea unităţii M
3. Uneori pentru uem CGS se foloseşte prexidul ab- urmat de denumirea unităţii M

UNITĂȚILE CELOR MAI IMPORTANTE MĂRIMI SECUNDARE CA
(sub ele se indică valoarea lor în unități M

	i	u	$\overline{E}$	Φ	$\overline{B}$	U_m^*	$\overline{H}^*$
ıb	—	V volt	V/m volt pe metru	Wb weber	Te tesla	A·sp amperspiră	A·sp/m amperspiră pe metru
: s		1 V= 1 W/A		1 Wb= 1 V·s	1 Te= 1 Wb/m²		
	—	V	V/m	W_b	Te	dGb decigilbert	mOe milioerstedt
	—					1 dGb= $\frac{1}{4\pi}$ A·sp	1 mOe= $\frac{1}{4\pi}$ A·sp/m
s	—		μ V/m microvolt pe metru	Mx maxwell	G gauss	Gb gilbert	Oe oerstedt
s= C	—	10^{-8} V	10^{-6} V/m	10^{-8} Wb	10^{-4} Te	$\frac{10}{4\pi}$ A·sp	$\frac{10^3}{4\pi}$ A·sp/m
	Fr/s						
	1 Fr/s≈ $\approx\frac{1}{3\cdot10^9}$A	≈300 V	$\approx3\cdot10^4$ V/m	≈300 Wb	$\approx3\cdot10^6$ Te	$\approx\frac{1}{12\pi}10^{-9}$A·sp	$\approx\frac{1}{12\pi}10^{-7}$ A·sp/m

sistemele raționalizate corespunzătoare).

SA corespunzătoare (de exemplu, statcoulomb în loc de franklin).
KSA corespunzătoare (de exemplu, abcoulomb, în loc de biot-secundă).

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 30.1

E AU DENUMIRI ADOPTATE INTERNAȚIONAL
ISA raționalizat)

Ψ*	$\overline{D}$*	L	C	R	ε *	μ *
C oulomb	C/m² coulomb pe metru patrat	H henry	F farad	Ω ohm	F/m farad pe metru	H/m henry pe metru
		1 H= 1Ω·s	1 F= 1 s·Ω^{-1}	1 Ω= 1 V/A		
		H	F	Ω		
$\frac{1}{4\pi}$ C	$\frac{1}{4\pi}$ C/m²				$\frac{1}{4\pi}$ F/m	4π H/m
		„cm“				
$\frac{10}{4\pi}$ C	$\frac{10^5}{4\pi}$ C/m²	10^{-9} H	10^9F	10^{-9} Ω	$\frac{10^{11}}{4\pi}$ F/m	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
			„cm“			
$\approx\frac{1}{12\pi 10^9}$C	$\approx\frac{1}{12\pi 10^5}$C/m²	$\approx 9 \cdot 10^{11}$H	$\approx\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$F	$\approx 9 \cdot 10^{11}$ Ω	$\approx\frac{10^{-9}}{36\pi}$F/m	$\approx 36\pi \cdot 10^{13}$ H/m

Scanned with OKEN Scanner

a) *Pentru a stabili relațiile dintre unitățile de sarcină, respectiv de curent, în diferite sisteme*, se folosesc relațiile de definiție ale constantelor universale (30.15), adică relațiile în funcție de care se definesc efectiv unitățile de sarcină, respectiv de curent, cum și relațiile (30.3) și (30.4).

În adevăr, din (30.15) rezultă

$$\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{FR^2}{q^2} \quad \text{și} \quad \frac{\varkappa\mu_0}{4\pi}=\frac{rF}{2i^2l} \tag{30.18}$$

Mărimea $\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}$ se măsoară deci în unități de, $\frac{[F]\,[L]^2}{[q]^2}$, iar mărimea $\frac{\varkappa\mu_0}{4\pi}$ în unități de $\frac{[F]}{[i]^2}$. Utilizînd valorile din tabela 30.1, rezultă:

$$\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}=1\frac{\text{dyn cm}^2}{\text{Fr}^2}=c_0^2\frac{\text{dyn cm}^2}{\text{Bi}^2\text{s}^2} \tag{30.19}$$

cu c_0 în cm/s, adică:

$$\boxed{1\text{Bi}\cdot\text{s}=c_0(\text{cm/s})\,\text{Fr}\approx 3\cdot 10^{10}\text{Fr}} \tag{30.20}$$

sau

$$\boxed{1\text{Bi}=c_0(\text{cm/s})\text{Fr/s}\approx 3.10^{10}\text{Fr/s}.}$$

Același rezultat se obține și scriind:

$$\frac{\varkappa\mu_0}{4\pi}=1\,\frac{\text{dyn}}{\text{Bi}^2}=\frac{1}{c_0^2}\,\frac{\text{dyn}}{(\text{Fr/s})^2}. \tag{30.21}$$

În definitiv, se constată că raportul dintre unitatea CGS em de sarcină, respectiv de curent, și unitatea CGS es de sarcină, respectiv de curent, *este egal cu valoarea numerică a vitezei luminii în vid, în cm/s.*

De asemenea, scriind:

$$\frac{\varkappa\mu_0}{4\pi}=1\,\frac{\text{dyn}}{\text{Bi}^2}=\frac{10^{-7}\,\text{N}}{\text{A}^2}=10^{-7}\cdot 10^5\,\frac{\text{dyn}}{\text{A}^2} \tag{30.22}$$

se obține:

$$\boxed{1\ \text{Bi}=10\ \text{A}} \tag{30.23}$$

sau

$$\boxed{1\ \text{Bi}\cdot\text{s}=10\ \text{C}}$$

Scriind:

$$\frac{\varkappa}{4\pi\varepsilon_0}=1\,\frac{\text{dyn cm}^2}{\text{Fr}^2}=\frac{c_0^2}{10^7}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}=\frac{c_0^2 10^5\cdot 10^4}{10^7}\cdot\frac{\text{dyn}\cdot\text{cm}^2}{\text{C}^2} \tag{30.24}$$

cu c_0 în m/s, se obține

$$\boxed{1\,\text{C}=10c_0(\text{m/s})\text{Fr}\approx 3.10^9\text{Fr}} \tag{30.25}$$

sau

$$\boxed{1\,\text{A}=10\,c_0\,(\text{m/s})\,\text{Fr/s}=3\cdot 10\,\text{Fr/s}.}$$

b) *Pentru a stabili relațiile dintre unitățile mărimilor secundare*, în diferite sisteme, se folosesc de preferință relații în care apar două mărimi electromagnetice (dintre care una cunoscută) și una geometrico-mecanică cum sînt:

$$W_e=\frac{1}{2}qU=\frac{q^2}{2C} \quad \text{pentru unitățile de } U \text{ și } C \qquad (30.26)$$

$$U=\oint \bar{E}\,\bar{ds} \quad \text{pentru unitatea de } \bar{E} \qquad (30.27)$$

$$e=-\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{pentru unitatea de } \Phi \qquad (30.28)$$

$$W_m=\frac{1}{2}\Phi i=L\frac{i^2}{2} \quad \text{pentru unitățile de } \Phi \text{ și } L \qquad (30.29)$$

$$\Phi=\iint \bar{B}\,\bar{dA} \quad \text{pentru unitatea de } \bar{B} \qquad (30.30)$$

$$\Psi_\Sigma=\varkappa q_\Sigma=\iint_\Sigma \bar{D}\,\bar{dA} \quad \text{pentru unitățile de } \Psi \text{ și } \bar{D} \qquad (30.31)$$

$$U_{m_\Gamma}=\varkappa Ni=\oint \bar{H}\,\bar{ds} \quad \text{pentru unitățile de } U_m \text{ și } \bar{H} \qquad (30.32)$$

$$\bar{D}=\varepsilon\bar{E} \text{ și } \bar{B}=\mu\bar{H} \quad \text{pentru unitățile de } \varepsilon \text{ și } \mu \qquad (30.33)$$

$$U=Ri \quad \text{pentru unitatea de } R \qquad (30.34)$$

$$\left.\begin{aligned}&\tau=RC \text{ sau } \tau=\frac{L}{R}\\ &\text{sau } f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\end{aligned}\right\} \quad \text{pentru unitățile de } L,\ C,\ R. \qquad \begin{matrix}(30.35)\\(30.36)\end{matrix}$$

Ultimele relații se vor fundamenta în teoria curentului alternativ: τ este o constantă de timp, iar f o frecvență proprie.

Exemplu. Pentru a stabili relațiile dintre unitățile de flux magnetic în diferitele sisteme se observă cu (30.29):

$$1 \text{ Joule}=1 \text{ Wb}\cdot 1 \text{ A}=10^7 \text{ erg}=10^7 \text{ u.e.m.}\Phi\cdot\text{Bi}=10^7 \text{ u.e.s.}\Phi\cdot\text{Fr/s}$$

și cum $1\text{A}=10^{-1}\text{Bi}=3\cdot 10^9 \text{ Fr/s}$ rezultă:

$$1 \text{ Wb}=10^8 \text{ u.e.m. } \Phi=10^8 \text{ maxwell}$$

$$1 \text{ Wb}=\frac{1}{300}\text{ u.e.s.}\Phi.$$

(În cazul mărimilor afectate de raționalizare se ține seama de par. 30.1.3. pct. c).

Din examinarea tabelei 30.1. de unități, mai rezultă următoarele *observații importante* privitoare la trecerea de la sistemul CGS em la sistemul CGS es:

a) Unitățile (respectiv valorile numerice) ale mărimilor q, i, U_m, $\bar{H}$, Φ, $\bar{D}$ sînt de $c_0\approx 3\cdot 10^{10}$ ori mai mari (respectiv mai mici) în sistemul CGS em neraționalizat față de sistemul CGS es neraționalizat.

b) Unitățile (respectiv valorile numerice) ale mărimilor U, $\bar{E}$, Φ, $\bar{B}$ sînt de $c_0\approx 3\cdot 10^{10}$ ori mari mici (respectiv mai mari) în sistemul CGS em față de sistemul CGS es.

c) Produsele qU, ui, $q\bar{E}$, $i\Phi$, $E\bar{D}$, $B\bar{H}$, $\Psi\bar{U}$, $U_m\Phi$, care au dimensiunile unor mărimi mecanice (energii, puteri, forțe etc,) rămîn neschimbate în sistemul CGS em față de sistemul CGS es.

d) Unitățile (respectiv valorile numerice) ale mărimilor C și ε sînt de $c_0^2=9\cdot10^{20}$ ori mari mari (respectiv mai mici) în sistemul CGS em față de sistemul CGS es.

e) Unitățile (respectiv valorile numerice) ale mărimilor L, R și μ sînt de $c_0^2\approx9\cdot10^{20}$ ori mai mici (respectiv mai mari) în sistemul CGS em față de sistemul CGS es.

30.3. Sistemul de unități simetric CGS-Gauss

Se obține o prezentare deosebit de simetrică a relațiilor fundamentale ale electromagnetismului dacă toate mărimile de tip electric (inclusiv curentul) se exprimă în unități CGS es (și deci cu $\varepsilon_0=1$), iar toate mărimile de tip magnetic se exprimă în unități CGS em (și deci cu $\mu_0=1$). Evident, în aceste condiții, relațiile în care intră atît mărimi electrice cît și mărimi magnetice nu-și mai pot păstra forma pe care o aveau în sistemele de unități studiate pînă acum, ci în ele apar *factori suplimentari*. Astfel de relații sînt — dintre legi — legea inducției electromagnetice (I) și legea circuitului magnetic (II). Deoarece raportul unităților CGS em și CGS es de curent este c_0 (v. observațiile din paragraful precedent) în legile generale, cum și în unele relații de definiție scrise cu convenția arătată mai înainte (în care i apare la puterea întîi), apare factorul $\frac{1}{c_0}$ (notat uneori generic cu γ_0). Observînd că, în acest caz, $\varepsilon_0=1$, $\mu_0=1$ și $\varkappa=4\pi$, se obține următoarea formă a legilor:

(I) $\oint \bar{E}\,\bar{ds}=-\frac{1}{c_0}\frac{d\Phi}{dt}$;

(II) $\iint_\Sigma \bar{D}'\bar{dA}=4\pi q\Sigma$;

(III) $\bar{D}'=\bar{E}+4\pi\bar{P}$;

(IV) $\bar{P}=\chi_e'\bar{E}$;

(V) $\oint \bar{H}'\bar{ds}=4\pi\theta+\frac{1}{c_0}\frac{d\Psi'}{dt}$

(VI) $\iint_\Sigma \bar{B}\,\bar{dA}=0$

(VII) $\bar{B}=\bar{H}'+4\pi\bar{M}$

(VIII) $\bar{M}=\chi_m'\bar{H}'$

(IX) $i=-\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$;

(X) $\bar{E}+\bar{E}_i=\rho\bar{v}$, (XI) $p_j=\bar{E}\bar{J}$

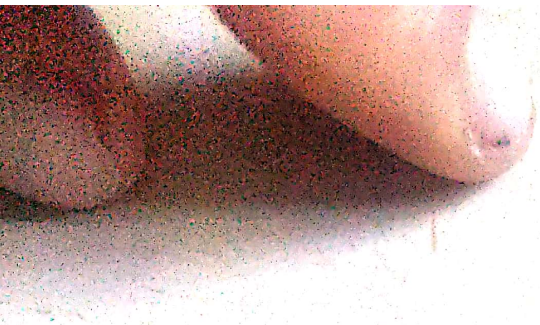
respectiv a relațiilor de definiție ale mărimilor primitive:

$$\bar{F}=q\bar{E}_v;\ \bar{G}=p\times\bar{E}_v;\ \bar{G}=\frac{1}{c_0}\,i\,\bar{\Lambda}\times\bar{B};\ \bar{F}=\frac{1}{c_0}\,i\,\bar{l}\times\bar{B}_v;\ \bar{G}=\bar{m}\times\bar{B}_v \tag{30.37}$$

iar în vid:

$$\bar{E}_v=\bar{D}_v';\ \bar{B}_v=\bar{H}_v' \tag{30.38}$$

Sistemul de unități care utilizează această scriere a relațiilor fundamentale și în care c_0 este viteza luminii în vid (socotită cu dimensiune cu tot) se numește sistemul simetric al lui Gauss (sistem CGS neraționalizat).



Tehnoredactor : Elena Stifter

Dat la cules 13.03.1962. Bun de tipar 31.08.1962. Apărut 1962. Tiraj 1000+120. Leg ½ pînză. Hîrtie semivelină 65 g/m², 16/70×100. Coli editoriale 21,176. Coli de tipar 19,50. Planşe 1. A. 0638. C.Z. pentru bibliotecile mari 621.3(075.8). C.Z. pentru bibliotecile mici 621.3.

Intreprinderea Poligrafică Sibiu, str. N. Bălcescu nr. 15.
Comanda nr. 1818.

Scanned with OKEN Scanner

E R A T Ă

Pag.	rîndul	în loc de	se va citi	din vina:
9	9	electromagnetice	energiei electromagnetice	editurii
10	24	cu 21 MW	cu 210 MW	„
26	1,2,3,9 de jos	$\overline{dr}$	$d\bar{r}$	„
28	10 de jos	*e proporţională cu patratul distanţei*	*e proporţională cu produsul sarcinilor şi invers proporţională cu patratul distanţei*	„
34	7	$\bar{E}_v = \delta\bar{E}_v$	$\bar{E}_v = \int \delta\bar{E}_v$	„
37	formula (3.18)		$\iint \bar{E}_v \overline{dA} = \iint (\bar{E}_1 \overline{dA}_1 + \bar{E}_2 \overline{dA}_2) = 0$	„
38	9 de jos	iraţional	irotaţional	„
40	formula (3.33)		$V(P) = V(P_0) - \int_{P_0}^{P} \bar{E}_v \overline{ds} = \cdots$	„
44	1	interiorul	exteriorul	„
76	formula (6.21)		$q_\Sigma + q_p = \varepsilon_0 \iint_\Sigma \bar{E}\overline{dA} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \iint_\Sigma \bar{D}\overline{dA} = \frac{q}{\varepsilon_r}$	„
107	formula (9.4)		$C = \frac{q}{U} = \frac{\pi\varepsilon l}{\ln \frac{D}{a}}$	„
142	7 de jos	$u_b = u_{AB} = \int_B^A \bar{E}\overline{ds}$	$u = u_{AB} = \int_A^B \bar{E}\overline{ds}$	„
146	14 de jos	$O = I_3R_3 + I_4R_4 - I_5R_5$	$O = I_3R_3 - I_4R_4 - I_5R_5$	„
185	8 de jos	2.10 *newtoni*	2.10^{-7} *newtoni*	„
185	formula (16,20)		$\Lambda_0 = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$	„
293	22	nu mai	numai,	„
309	1 de jos	3.10 Fr/s	3.10^9 Fr/s	„

Scanned with OKEN Scanner

MINISTERUL ÎNVĂŢĂMÎNTULUI ŞI CULTURII
INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI

PROGRAMUL

SESIUNII CERCURILOR ŞTIINŢIFICE STUDENŢEŞTI

pe anul 1958

12 APRILIE 1958

Litografia şi Tipografia Învăţământului — c. 695

Scanned with OKEN Scanner

PROGRAM

Simbătă 12 aprilie, ora 8.30

ȘEDINȚE FESTIVE DE DESCHIDERE PE FACULTĂȚI:

Facultatea de Chimie Ind.	Sala A.P.A.
Facultatea de Ing. Economiști	Sala L.A.
Facultatea de Electrotehnică și Energetică . .	Sala D.P.E.
Facultatea de Mecanică	Sala M.A.
Facultatea de Metalurgie	Sala A.P.34
Facultatea de Electronică și Telecomunicații . .	Sala F.II.19
Facultatea Electrotehnică Craiova	Sala A.III din Craiova.

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9 și 17

COMUNICĂRI PE SECȚII:

Secția I	Chimie fizică	Sala A.I.2
Secția II	Chimie organică	Sala A.P.A.
Secția III	Tehnologia chimică	Sala A.II.2.
Secția IV	Ingineri economiști	Sala L.A.
Secția V	Mașini și aparate electrice . .	Sala D.P.E.
Secția VI	Electro-energetică	Sala A.I.1.
Secția VII	Hidroenergetică	Sala L.I.5.
Secția VIII	Fizică	Sala A.P.34.
Secția IX	Tehnologie și mașini unelte . .	Sala L.I.12.
Secția X	Mecanică și aviație	Sala L.I.11.
Secția XI	Mașini termice	Sala M.A.
Secția XII	Siderurgie	Sala L.I.15.
Secția XIII	Metale neferoase	Sala L.I.17.
Secția XIV	Electronica	Sala F.II.19.
Secția XV	Radio	Sala L.P.14.
Secția XVI	Telefonie-telegrafie, Semnalizări și centralizări feroviare	Sala L.P.15.

Scanned with OKEN Scanner

Secția XVII Electrotehnică Craiova . . . Sala A.III din Craiova.

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 19.30

MARELE AMFITEATRU

Cuvînt de închidere . . . . . Rector Dinculescu C.

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA I: CHIMIE FIZICĂ
Sala A.I.2.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Dr. Atanasiu Ion*
Membri: *Prof. Costeanu Gheorghe*
Conf. Hagymaș Gheorghe
Secretar: *Stud. Nicolau Florin*

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Aslan Vintilă, anul III: „Cinetica fenomenului de oxidare a metanului cu oxigen atomic".
2. — Stud. Ionescu Liliana, anul IV și Stud. Solacolu Șerban, anul IV: „Influența ionilor alcalini asupra vîscozității apei".
3. — Stud. Roșca Sorin, anul III: „Viscozitatea asfalturilor romînești".

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Banciu Mircea, anul I: „Hidruri metalice".
2. — Stud. Matache Savel, anul V: „Tunurile electronice și folosirea lor. Prezentare de aparatură".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA II: CHIMIE ORGANICĂ
Sala A.P.A.

Biroul Secției:

Președinte: *Acad. Prof. Dr. Nenițescu Costin*
Membri: *Conf. Ciorănescu Ecaterina*
Conf. Solomon Ozias
Secrear: *Stud. Ariton Ion*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Răzuș Alexandru, anul IV: „Alcooli acetilenici".
2. — Stud. Rențea Călin, anul IV: „Sinteze Dien cu acid dihidroftalic".
3. — Stud. Farcașiu Dan, anul IV: „Studiul degradării Hoffman a bazelor cuaternare".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Schreibman Adrian, anul IV: „Histomina".
2. — Stud. Elian Mihai, anul IV: „Anticanceros Domagk".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA III: TEHNOLOGIA CHIMICĂ
Sala A.II.2.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Dr. Solacolu Șerban*
Membri: *Conf. Sanielevici Hipolit*
Conf. Mendelsohn Nați
Secretar: *Stud. Barna Liviu*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Beneș Antonel, anul V: „Ameliorarea stabilității la șoc termic a refractarelor feresteritice".
2. — Stud. Ploeșteanu Maria, anul V: „Mase ceramice feromagnetice dure".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Meraru Eva, anul V: „Uscarea maselor ceramice în radiații de infraroșu".
2. — Stud. Popescu Nadia, anul V: „Noua metodă de obținerea 2 amino- 4 clortoluenului.

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA IV: INGINERI ECONOMIȘTI
Sala L.A.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Atanasiu Constantin*
Membri: *Conf. Luca Marius*
Conf. Stăncioiu Ion
Secretar: *Stud. Astrahanțev Dumitru*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Simionescu Ilie, anul IV și Stud. Pătru Cristian, anul IV: „Studiul uzurii pieselor, pompelor centrifugale cu scopul determinării programului de piese de rezervă pentru Uzinele V. Roaită".
2. — Stud. Boaru Ion, anul IV: „Calcul eficacității economice a recondiționării pieselor în vederea reparației tractoarelor".
3. — Stud. Pop Alexandru, anul V, Stud. Chirilă Alexandru anul V, Stud. Păsărin Nicolae anul V, Stud. Fianu Sofia anul V și Stud. Ioncelescu Constantin anul V: „Analiza proceselor simple de producție la minele Baia de Arieș, Uricani și Aninoasa".
4. — Stud. Șerban Ana anul V și Stud. Dolog Elena anul V: „Studiul folosirii timpului de lucru la săparea unei galerii și întocmirea balanței grele și normale la mina Rodna Veche.
5. — Stud. Popescu Ilie anul V și Stud. Pralea Petre anul V: „Analiza critică a organizării lucrărilor de abataj, propuneri pentru îmbunătățirea lor și rezultatele scontate dela mina Aninoasa".
6. — Stud. Ciurezu Ștefan anul IV și Stud. Ciucă Cernica anul IV: „Introducerea calculației concomitente a prețului de cost la mina Lonea".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Popa Valeriu anul IV și Stud. Mihai Constantin anul IV: „Stabilirea decalajelor de lansare în fabricație a reperelor pompei B.V.5 la Uzinele V. Roaită".
2. — Stud. Bogdan Aurel, anul V, Stud. Cojocaru Tatiana anul V, Stud. Cristea Maria anul V, Stud. Dobrescu Gheorghe anul V: „Organizarea utilizării energiei electrice la întreprinderea minieră Uricani".
3. — Stud. Pohoață Ion anul IV și Stud. Husein Nicolae anul IV: „Studiul organizării lucrărilor dintr-o mină pe baza graficului unic la mina Aninoasa".
4. — Stud. Niculescu Natașa, anul IV, Stud. Volintir Ileana anul IV și Stud. Mateescu Alexandra anul IV: „Metodica determinării limitei de exploatarea selectivă a filoanelor subțiri".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA V: MAȘINI ȘI APARATE ELECTRICE
Sala D.P.E.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Popescu Alexandru*
Membri: *Prof. Steinberg Carol*
Conf. Lazu Constantin
Secretar *Stud. Dogaru Mihai*

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Ilie Ioan anul V și Stud. Dogaru Mihai anul IV: „Predeterminarea caracteristicelor generatoarelor de c.c. folosind metoda analitică".
2. — Stud. Galan Nicolae anul IV: „Prezentarea teoretică și experimentală a releelor diferențiale".
3. — Stud. Bichir Ion anul V și Stud. Burlea Gavril anul V: „Comparație între motorul cu repulsie și motorul fără înfășurare pe statori".
4. — Stud. Comșa Dan anul IV și Stud. Petcu Mircea anul IV: „Verificarea izolației electrice a troleybuzelor".
5. — Stud. Cupșa Adrian anul III: „Micromotor unipolar — teoria și proiectarea sa".

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Jercan Georgeta, anul IV: „Alimentarea unui bimetal".
2. — Stud. Fodor Pavel anul IV și Stud. Pupăză Nicolae anul IV: „Încărcarea transformatoarelor prin metoda funcționării în opoziție".

Scanned with OKEN Scanner

CENTENAR

FABRICA DE TIGARETE
BUCUREŞTI N. I. 38-56
20 TIGARETE LEI 2.50

20 ŢIGARETE

CENTENAR

CENTENAR

FABRICA DE TIGARETE
BUCUREŞTI N. I. 38-56
20 TIGARETE LEI 2.50

1 – 30 Nov. 1958

20 ŢIGARETE

CENTENAR

Scanned with OKEN Scanner

3. — Stud. Sachelarie Traian anul IV și Stud. Ionescu Petre anul IV: „Recondiționarea unui curent de releu de curent maxim temporizat".
4. — Stud. Petcu Mircea anul IV: „Teoria transmiterii sonice".
5. — Stud. Brozici Mircea anul IV: „Studiul circuitelor cu rezistențe neliniare în c.c.".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA VI: ELECTRO-ENERGETICA
Sala A.I.1.

Biroul Secției:

Președinte: *Acad. Prof. Budeanu Constantin*
Membri: *Prof. Bercovici Martin*
Conf. Timotin Alexandru
Secretar: *Stud. Glodner Beno*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Ionescu Vlad anul V: „Spații Hilbert, cu aplicații la regimul deformant".
2. — Stud. Eigeles Alexandru, anul IV: „Preluarea de putere pe cale capacitivă".
3. — Stud. Halinschi Anca, anul IV: „Compunerea factorului de putere".
4. — Stud. Blada Alexandru, anul IV: „Reactanțele mașinii sincrone".
5. — Stud. Buzia Teodor, anul IV: Stabilizator de tensiune cu termorezistență".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Ionescu Vlad anul IV: „Rezonanța parametrică".
2. — Stud. Mîndru Radu anul IV și Stud. Bîrsănescu V. anul IV: „Despre pornirea motoarelor sincrone".
3. — „Stud. Urluescu Ion anul IV și Stud. Florescu Constantin anul IV: „Tratarea neutrului în rețelele electrice de înaltă tensiune".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA VII: HIDROENERGETICA
Sala L.I. 5.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Dr. Dumitrescu Dumitru*
Membri: *Prof. Dr. Pavel Dorin*
Conf. Tașcă Dan
Secretar: *Stud. Fodor Emeric*

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Marinescu Gabriel anul IV: „Contribuții la teoria pompelor cu angrenaje".
2. — Stud. Golodețchi Aron anul IV: „Determinarea caracteristicelor turbinelor hidraulice prin metoda separării pierderilor".
3. — Stud. Kiefner Hehda, anul III: „Contribuții la teoria vîscozimetrului Engler".
4. — Stud. Tudorache Marin, anul III: „Studiul unui aparat pentru vizualizarea jeturilor în mișcarea nepermanentă".

} 2.

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

si Chiracu Adrian

1. — Stud. Lazăr Corneliu anul IV: Considerațiuni asupra influenței diferențierii calitative a energiei produse de C.H.E. la determinarea înălțimii barajului".
2. — Stud. Fodor Emeric anul IV: „Considerațiuni asupra propagării căldurii și răcirii barajelor de beton".
3. — Stud. Cilinghir Vladimir anul IV: „Contribuții la studiul hidrodinamic al carcaselor spirale pentru turbine hidraulice".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA VIII: FIZICĂ

Sala A.P. 34.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Dr. Agirbiceanu Ion*
Membri: *Prof. Dr. Bircă Gălățeanu*
Conf. Munteanu Aurel
Secretar: *Stud. Ciric Ion*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Anastasiu Silviu, anul IV: O nouă metodă pentru determinarea rezistenței interne a celulelor fotoelectrice cu strat de baraj".
2. — Stud. Negrescu Dan anul III: „Aplicarea unor metode fizice la studiul impregnării lemnului".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Mateescu Ion anul III și Stud. Nediu Mihai anul III: „Unele poprietăți optice ale unor substanțe luminiscente sub forma de pulberi și de pături subțiri".
2. — Stud. Ciric Ion anul IV: „Construirea folosind electroliza prin sticlă a unei celule fotoelectrice cu efect extern și studiul caracteristicelor ei.

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA IX: TEHNOLOGIE ȘI MAȘINI UNELTE

Sala L.I. 12.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Popovici Constantin*
Membri: *Prof. Botez Emil*
Conf. Cozin Herbert
Secretar: *Stud. Mazilu Dan*

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Alexe Dorin, anul V: „Adaptarea dispozitivului hidraulic existent la tractorul UTOS-2, pentru acționarea la distanță a mașinilor agricole tractate.
2. — Stud. Milea Gheorghe, anul IV: „Studierea și construcția unui aparat pentru înregistrarea vitezei și accelerației în mișcarea rectilinie.
3. — Stud. Pleșoianu Petre anul IV, Stud. Mazilu Dan, anul IV, Stud. Dumitru D., anul IV și Stud. Scherfler Adrian anul IV: „Comportarea la temperaturi ridicate a corpurilor de înaltă presiune înfășurate în bande de oțel".
4. — Stud. Plămădeală Mihai, anul IV: Metode moderne de măsurarea planeității și rectilinității mașinilor unelte.

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Cosmin Dan, anul IV: „Studiul servomecanismelor de copiat".
2. — Stud. Lehrer Carol, anul II: „Defectoscopia semiproduselor forjate și turnate".
3. — Stud. Florică Sergiu, anul IV: „Aparat optic pentru măsurarea automată a dimensiunilor.
4. — Stud. Mocanu Marin, anul IV: „Studiul microcomparatoarelor pneumatice".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA X: MECANICĂ ȘI AVIAȚIE
Sala L.I. 11

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Sarian Mihai*
Membri: *Prof. Buzdugan Gheorghe*
Conf. Tipei Nicolae
Secretar: *Stud. Constantinescu Ion*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Ionescu Valentin, anul V: „Studiul unei clase noi de traectorii în plan vertical al avionului, în regim nepermanent".
2. — Stud. Gruia Radu, anul II: „Aparat de laborator pentru studiul compunerilor de mișcări".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Stoleru Marcel, anul III: „Volumetru".
2. — Stud. Argireanu Ion, anul II: „Un criteriu pentru sortarea arcurilor folosite la jucăriile mecanice".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA XI: MAȘINI TERMICE

Sala M.A.

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Stoicescu Lazăr*
Membri: *Prof. Postelnicescu Mircea*
Șef lucr. Dănescu Alexandru
Secretar: *Stud. Mușat Iulian*

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Alexandrescu Petra, anul V: „Calculul arderii în motoarele cu aprindere prin compresie, cu injecție directă".
2. — Stud. Țenescu Mircea anul V: „Influența variației vitezei unghiulare a arborelui cotit asupra solicitărilor organelor motorului".
3. — Stud. Filitti Dan, anul V: „Unele probe de rezistență ale bielelor motoarelor cu ardere internă".
4. — Stud. Filimon Constantin, anul V: „Fenomene vibratorii în sistemul de distribuție al motoarelor cu ardere internă în patru timpi".

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Boghiu Cornel, anul V și Stud. Zidărescu Marian, anul V: „Unele probleme ale motoarelor cu doi combustibili".
2. — Stud. Gropper A., anul V și Stud. Solomon Zigu, anul V: „Mărirea economicității la unele motoare alimentate cu benzină de cifră octanică redusă".
3. — Stud. Radcenco Vsevolod, anul V: „Studiul comparativ al metodelor de calcul termic al motoarelor cu ardere internă".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA XII: SIDERURGIE
Sala L.I. 15

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Rău Alexandru*
Membri: *Prof. Mantea Ștefan*
Asist. Sofronie L.
Secretar: *Stud. Scorțea C.*

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Wechsler Henriette, anul IV și Stud. Schönberger Francisc, anul IV: „Studiul proprietăților de turnare și de solidificare a fontei".
2. — Stud. Scorțea Constantin, anul III și Stud. Constantinescu Rodica, anul III: „Reductivitatea limonitei în Ghelar în funcție de granulație".
3. — Stud. Tocu Petre, anul III și Stud. Cioacă Dan, anul III: „Determinarea constantei de echilibru la reducerea oxizilor de fier".
4. — Stud. Serbotei Sergiu, anul III și Stud. Ionescu Lucia, anul III: „Cinetica reducerii oxidului Fe2 03".

Sîmbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Amancei Lucian, anul III: „Oxidarea fierului în atmosferă de CO2".
2. — Stud. Herșcovici I. anul III și Stud. Rotaru V. anul III: „Analiza aproximativă rapidă a calcarelor, dolomitei, soderitei și ancheritei prin metoda cu azotat cu cupru".
3. — Stud. Kim-Kuk-Din, anul III: „Studiul dilatometrelor, al calcarelor, ancheritelor și dolomitelor dela Hunedoara".

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA XIII: METALE NEFEROASE
Sala L.I. 17

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Lupu Alexandru*
Membri: *Prof. Bolgiu Ovidiu*
Șef lucr. Grigoriu Laura
Secretar: Stud. Rogojanu Mircea

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Paraschiv Gheorghe, anul IV și Stud. Litman Silviu, anul IV: „Prăjirea în pat fluidizat a concentratelor plumboase".
2. — Stud. Mintuță Iuliana anul IV și Stud. Lazăr Adina anul IV: „Încercări de extragerea titanului din minereuri indigene".
3. — Stud. Negulici Mihai, anul IV și Stud. Reich Hary, anul IV: „Studiul reducerii concentratelor plumboase și aglomeratelor neferoase".
4. — Stud. Ionescu Doru, anul IV: „Extragerea cuprului din cenușile de pirită".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Stănescu Cl., anul III și Stud. Tănase Silvia, anul III: „Determinarea plasticității și rezistenței la încovoiere a argilelor de Medgidia".
2. — Stud. Alecu Marin, anul IV: Aportul adus de analize spectrale la cunoașterea aliajelor metalice",

SECȚIA XVI: TELEFONIE ȘI TELEGRAFIE SEMNALIZĂRI ȘI CENTRALIZĂRI FEROVIARE
Sala L.P. 15

Biroul Secției:

Președinte: *Prof. Condrea Sergiu*
Membri: *Conf. Turi Ștefan*
Conf. Sor Carol
Secretar: *Stud. Arhangelschi Victor*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Bogdan Mircea, anul III: „Filtru cu inductanță mutuală".
2. — Stud. Pascu Vasile, anul V: „Studiul schemei de semnalizare automată la pasajele de nivel".
3. — Stud. Grînescu Radu, anul III: „Cuadripoli calculatori".
4. — Stud. Gruia I., anul V și Stud. Gliga Al., anul V: „Autostop discontinuu".
5. — Stud. Boboc Adrian, anul V: „Generator de frecvență purtătoare pentru translația de grup".
6. — Stud. Ștefan Mihai, anul V și Stud. Prusacov Ignat anul IV: „Trenograf".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Galbenu Vespazian, anul V: „Studiul semnalelor sclipitoare la C.F.R.".
2. — Stud. Moscovici Papul, anul IV, Stud. Panaitescu A., anul IV și Stud. Urban L., anul IV: Telefonie cu bandă inversată".
3. — Stud. Davidovici, anul IV și Stud. Totolin, anul IV: „Telefon portabil cu filtru".
4. — Stud. Teodorescu V., anul III și Stud. Bocaciu V., anul III; „Sistem diferențial cu rezistențe sau condensator",

Scanned with OKEN Scanner

SECȚIA XVII: ELECTROTEHNICA CRAIOVA
Sala A. III din Craiova

Biroul Secției:

Președinte: *Conf. Suciu Iacob*
Membri: *Conf. Preda Marius*
Șef lucr. Tunsoiu Gheorghe
Secretar: *Stud. Dinculescu Paul*

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 9

1. — Stud. Marinescu Victor, anul II, Stud. Ionescu Carmen anul II, Stud. Lungulescu Mariana, anul II: „Papuerizarea clasei muncitoare în țările capitaliste".
2. — Stud. Becherete Grigore, anul III, Stud. Dinculescu Paul, anul III, Stud. Preda Ioan, anul III și Stud. Stoica Dumitru, anul III, „Măsurarea energiei reactive în rețele trifazate cu nesimetrie totală".
3. — Stud. Amandu Denisa, anul IV, Stud. Goldstein Mioara, anul IV și Stud. Boceanu Constantin, anul IV: „Forțele electrodinamice în cazuri particulare".
4. — Stud. Ionescu Victor, anul IV, Stud. Constantinescu Aura anul IV, Stud. Șchiopu Eugenia, anul IV și Stud. Ioaneș Dan, anul IV: „Studiul proiectării unui bimetal".
5. — Stud. Wolf Mișu, anul V și Stud. Neagu Ion, anul V: „Predeterminarea dimensiunilor optime economice ale transformatoarelor de forță".

Simbătă 12 aprilie 1958, ora 17.

1. — Stud. Cetățeanu Cecilia, anul IV, Stud. Șchiopu Eugenia, anul IV și Stud. Nicolau Lucia, anul IV: „Asupra posibilităților de utilizare a generatorilor cu excitație mixtă în regim de generatori cu excitație".

Scanned with OKEN Scanner

2. — Stud. Toma Marcel, anul IV și Stud. Cioroianu Ion, anul IV: „Proiectarea și construcția unui grup selsin cu putere de 50 V.A.“.

3. — Stud. Tudorache Nicolae, anul IV, Stud. Marinescu Al., anul IV, Stud. Demetrescu Anghel, anul IV: „Filtru în T pentru măsurarea distorsiunilor și variației lineare la benzile de magnetofon“.

Scanned with OKEN Scanner

un sens pozitiv al t.m.m. pe conturul Γ al suprafeței (fig. 21.1), se constată că intensităților pozitive le corespund t.m.m. pozitive și invers. Deci $d\bar{A}$ și $\bar{ds}$ sînt asociați prin regula burghiului drept în forma (21.2) a legii. Mai trebuie observat că Γ și S_Γ sînt arbitrare și că trebuie considerate drept curbe și suprafețe atașate corpurilor în mișcarea lor.

Deoarece circulația vectorului $\bar{H}$ în lungul unei curbe închise este diferită de zero, rezultă că (în cazul general), vectorul-cîmp $\bar{H}$ *nu este* derivabil dintr-un potențial scalar, iar *tensiunea magnetică* $u_m = \int_A^B \bar{H}\,\bar{ds}$, între două puncte *depinde de drum* (adică de curba de integrare de la A la B).

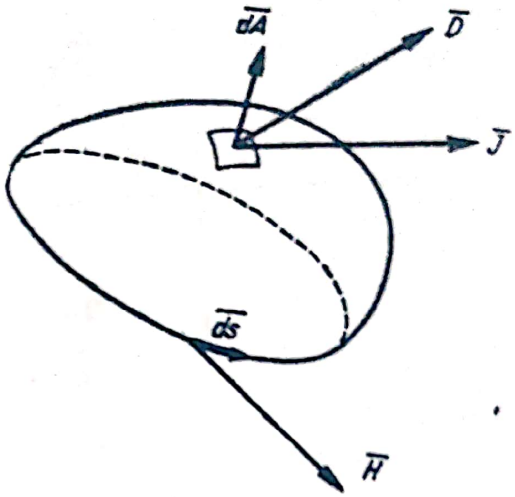


Fig. 21.1

21.2 Justificarea legii circuitului magnetic

Justificarea legii exprimate prin relația (21.2) se poate face în cazuri particulare.

Dacă, de exemplu, în regim staționar se consideră un conductor rectiliniu, filiform, infinit, parcurs de curentul i, intensitatea cîmpului magnetic în vid $\bar{H}_v$ la distanța r este dată de relația (17.3):

$$H_v = \frac{i}{2\pi r}. \tag{21.3}$$

Aplicînd legea circuitului magnetic pe o curbă Γ circulară, care coincide cu o linie de cîmp de rază r, rezultă:

$$\oint \bar{H}_v \bar{ds} = \frac{i}{2\pi r} \cdot 2\pi r = i, \tag{21.4}$$

adică un caz particular al relației (21.2).

În cazul mai general, al unor circuite de formă arbitrară parcurse de curent continuu și situate în vid, s-a constatat în paragraful 17.6.1 că este valabilă *teorema lui Ampère*, conform căreia:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\bar{ds} = \Sigma Ni = \theta_S, \tag{21.5}$$

adică o formă particulară a legii (21.2), cînd $\frac{d\Psi}{dt} = 0$.

Această lege este deci complet justificată în regim staționar de proprietățile cîmpului magnetic a cărui expresie (formula Biot-Savart-Laplace) a fost obținută din analiza datelor experimentale. Se va arăta (în par. 21.3) că din această lege a circuitului magnetic formula lui Biot-Savart-Laplace rezultă ca teoremă.

Este meritul lui J. C. Maxwell de a fi arătat (în 1862) că teorema lui Ampère nu mai poate fi valabilă în regim nestaționar, fiind incompatibilă cu legea conservării sarcinii, și că membrul drept al relației (21.5) trebuie completat aditiv cu un termen: curentul de deplasare $\frac{d\Psi}{dt}$ prin aceeași suprafață S_Γ. Verificarea experimentală a acestei ipoteze s-a făcut atunci cînd H. Hertz (în 1888) a pus în evidență existența undelor electromagnetice, prevăzute de Maxwell ca o consecință a teoriei sale.

În mod simplificat, justificarea teoretică a necesității introducerii curentului de deplasare, alături de curentul de conducție (solenație), în expresia tensiunii magnetomotoare (21.2), se poate face considerînd un circuit de curent variabil în care este intercalat un condensator plan (v. fig. 21.2).

Dacă Γ e o linie de cîmp magnetic, aproximativ circulară, situată în dreptul condensatorului și dacă S_Γ e o suprafață deschisă sprijinită pe Γ și, trecînd printre armături (prin dielectric), $S_{1\Gamma}$ o suprafață deschisă sprijinită pe Γ și intersectînd conductorul 1 (parcurs de curentul i_1 (t) și conectat la armătura de sarcină q) și $S_{2\Gamma}$ o suprafață deschisă sprijinită pe Γ și intersectînd conductorul 2 (parcurs de curentul i_2 (t) și conectat la armătura de sarcină — q), din aplicarea legii conservării sarcinii (12.4) rezultă (cu sensurile indicate în figură):

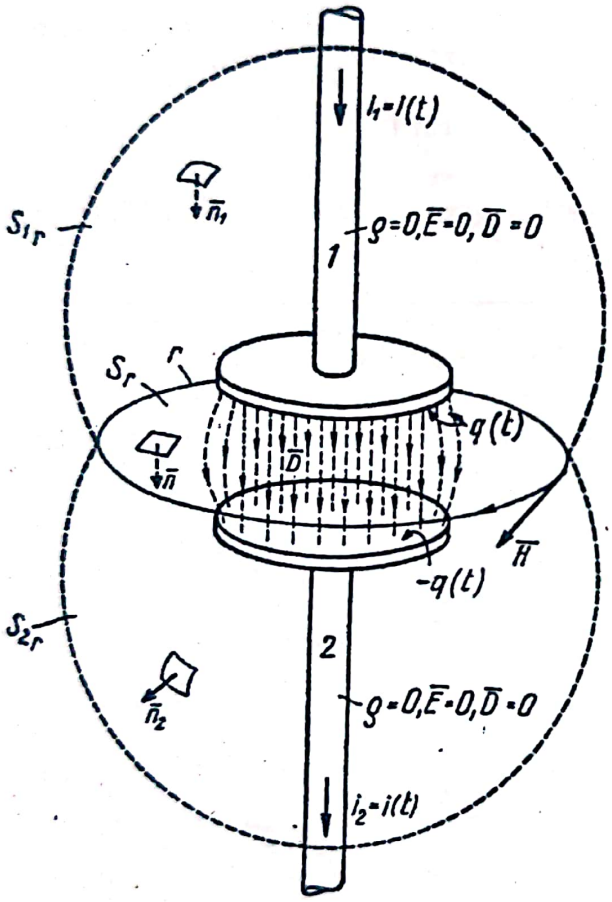


Fig. 21.2.

$i=i_1=\dfrac{dq}{dt}$ — dacă legea se aplică suprafeței închise constituite de $S_{1\Gamma}$ și S_Γ reunite;

$i_2=-\dfrac{d}{dt}(-q)$ — dacă legea se aplică suprafeței închise constutite de S_Γ și $S_{2\Gamma}$ reunite,

adică

$$i_2=i_1=i(t)=\frac{dq}{dt}.$$

Curentul de conducție poate fi deci diferit de zero în conductorul întrerupt de condensator (dacă $\dfrac{dq}{dt}\neq 0$, adică dacă regimul e nestațional) și are aceeași valoare în ambele porțiuni (1 și 2), de-o parte și de alta a condensatorului. Se exprimă plastic acest rezultat spunîndu-se că, în regim nestațional, curentul electric (variabil în timp) „trece" prin condensator. În realitate, dielectricul condensatorului fiind considerat perfect izolant, nu există curent de conducție prin acest dielectric, ci curentul de conducție variabil din conductoarele de legătură (1 și 2) încarcă și descarcă armăturile condensatorului.

Dacă se aplică acum teorema lui Ampère (21.5) liniei de cîmp Γ, considerînd pe rînd pentru calculul curentului de conducție (al solenației) suprefețele $S_{1\Gamma}$ și S_Γ se obține un rezultat contradictoriu

$$0<\oint_\Gamma \bar{H}d\bar{s}=\begin{cases} i \text{ dacă se ia } S_{1\Gamma} \text{ care intersectează conductorul;} \\ 0 \text{ dacă se ia } S_\Gamma \text{ trecînd prin dielectric.}\end{cases}$$

Experiența însă verifică existența cîmpului magnetic, în această situație, și anume cu valori practic neschimbate față de cazul cînd prin conductor ar trece un curent continuu de aceeași intensitate (dacă viteza de variație a curentului nu e prea înaltă). Experiența verifică, deci, prima alternativă și contrazice pe cea de-a doua: teorema lui Ampère nu e valabilă, cel puțin pentru suprafețele sprijinite pe curba Γ și care trec prin dielectricul condensatorului. Maxwell a căutat atunci să completeze membrul doi al acestei teoreme (21.5) cu un termen suplimentar, care — fiind neglijabil în conductori — să fie echivalent curentului electric

de conducție, din punctul de vedere al producerii cîmpului magnetic în dielectrici. Cu alte cuvinte, a căutat o nouă „formă de curent" care să străbată dielectricul, prelungind astfel între armăturile condensatorului curentul electric de conducție din conductoarele de legătură ale acestuia, astfel încît circuitul electric să se închidă chiar și în regim variabil.

În experiența descrisă, se poate însă constata că din legea fluxului electric (6.6) aplicată suprafeței închise $(S_\Gamma + S_{1\Gamma})$ și considerînd nulă inducția electrică în conductor (presupus deci perfect, cu $\rho=0$, $\bar{E}=\rho\bar{J}=0$ și $\bar{D}=\varepsilon\bar{E}=0$), rezultă:

$$\iint \bar{D}d\bar{A}=\iint_{S_\Gamma}\bar{D}d\bar{A}=\Psi_{S_\Gamma}=q \text{ și deci}$$

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}. \tag{21.6}$$

O mărime care poate înlocui curentul de conducție în dielectric rezultă astfel a fi *viteza de variație a fluxului electric*, numită de Maxwell *curent de deplasare*[1].

În adevăr, completînd teorema lui Ampère cu acest termen, adică ajungînd la forma generală (21.1) a legii circuitului magnetic și aplicînd-o în experiența descrisă, contradicția relevată dispare, deoarece se obține:

$\oint \bar{H}\,\bar{ds} = i$ — cînd se aplică suprafeței $S_{1\Gamma}$ (sau $S_{2\Gamma}$) nestrăbătută practic de curent de deplasare — și $\oint_\Gamma \bar{H}\,\bar{ds}=\frac{d\Psi}{dt}=i$ (conform cu 21.6) — cînd se aplică suprafeței S_Γ nestrăbătută practic de curent de conducție.

21.3. Forma integrală dezvoltată a legii

În cazul mediilor în mișcare, calculul derivatei fluxului electric în raport cu timpul trebuie făcut considerînd suprafața S_Γ antrenată de corpuri în mișcarea lor. Se obține în felul acesta o formă integrală dezvoltată a legii circuitului magnetic.

21.3.1 **Derivata de flux.** Se consideră în general un cîmp de vectori cu vectorul-cîmp $\bar{G}(\bar{r}, t)$ al cărui flux se calculează prin suprafețe mobile S_Γ, ale căror puncte sînt în mișcare în raport cu sistemul de coordonate, punctele de raze vectoare $\bar{r}$ avînd vitezele $\bar{v}(\bar{r}, t)$.

Se numește derivată de flux a vectorului-cîmp $\bar{G}(\bar{r}, t)$ în raport cu timpul, la vitezele $\bar{v}$ date ale punctelor de raze vectoare $\bar{r}$, un nou vector-cîmp $\frac{d_f\bar{G}}{dt}$, al cărui flux prin orice suprafață deschisă S_Γ este egală cu derivata (substanțială) în raport cu timpul a fluxului vectorului $\bar{G}$ prin suprafața mobilă S_Γ. Rezultă că:

$$\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\bar{G}\cdot d\bar{A}=\iint_{S_\Gamma}\frac{d_f\bar{G}}{dt}d\bar{A}=\underbrace{\iint_{S_\Gamma}\frac{\partial\bar{G}}{\partial t}d\bar{A}}_{\text{I}}+\underbrace{\frac{d}{dt}\left[\iint_{S_\Gamma}\bar{G}\cdot d\bar{A}\right]_{\bar{G}}}_{\text{II}} \tag{21.7}$$

Termenul I este derivata fluxului în raport cu timpul, dacă suprafața S_Γ ar fi imobilă în raport cu sistemul de referință considerat; termenul II este derivata fluxului, dacă vectorul-cîmp $\bar{G}$ din diverse puncte fixe, în raport cu sistemul de coordonate considerat,

[1] Această denumire a fost dată de Maxwell în baza unei anumite interpretări microscopice mecaniciste a acestui curent, interpretare care, cel puțin în vid, nu s-a dovedit corectă și prezintă numai un interes istoric.

nu ar depinde de timp (ar avea valorile sale din momentul t) și numai suprafața S_Γ ar fi mobilă.

Efectuînd calculele intermediare [1] se obține:

$$\frac{d}{dt}\int\int_{S_\Gamma}\overline{G}\cdot\overline{dA}=\int\int_{S_\Gamma}\left[\frac{\partial\overline{G}}{\partial t}+\bar{v}\,\mathrm{div}\,\overline{G}+\mathrm{rot}\,(\overline{G}\times\bar{v})\right]\overline{dA}. \tag{21.8}$$

21.3.2. Curentul de convecție și curentul Roentgen. Aplicînd acest rezultat în cazul legii circuitului magnetic (21.2) se obține forma integrală dezvoltată a legii:

$$\oint_\Gamma\overline{H}\cdot\overline{ds}=\int\int_{S_\Gamma}\overline{J}\cdot\overline{dA}+\int\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\overline{dA}+\int\int_{S_\Gamma}(\rho_v\bar{v})\overline{dA}+\int\int_{S_\Gamma}\mathrm{rot}(\overline{D}\times\bar{v})\overline{dA} \tag{21.9}$$

în care s-a pus $\mathrm{div}\,\overline{D}=\rho_v$ [relația (6.13)], conform legii fluxului electric.

Relația (21.9) se poate scrie:

$$u_{mm_\Gamma}=\theta_{S_\Gamma}+i_{D_{S_\Gamma}}+i_{v_{S_\Gamma}}+i_{R_{S_\Gamma}}. \tag{21.10}$$

În relația (21.9) sau (21.10), contribuția curentului electric de conducție, reprezentată de solenația θ_{S_Γ}, apare completată cu trei termeni noi:

$$i_{D_{S_\Gamma}}=\int\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\overline{dA}\ \text{numit curentul de deplasare propriu-zis.} \tag{21.11}$$

$$i_{v_{S_\Gamma}}=\int\int_{S_\Gamma}\bar{v}\rho_v\overline{dA}\ \text{numit curentul de convecție;} \tag{21.12}$$

$$i_{R_{S_\Gamma}}=\int\int_{S_\Gamma}\mathrm{rot}(\overline{D}\times\bar{v})\overline{dA}\ \text{numit curentul Roentgen (teoretic),} \tag{21.13}$$

Experiența care a pus în evidență efectele magnetice ale acestui curent de convecție se datorește lui H. A. Rowland. El a rotit cu viteză mare o placă metalică încărcată și izolată, obținînd efecte magnetice, de exemplu, rotirea unui mic ac magnetic.

Experiențele lui Roentgen și Eichenwald, care au încercat să pună în evidență cîmpul magnetic al unui corp polarizat în mișcare, au dus la alte rezultate. Densitatea de curent care corespundea efectelor magnetice obținute experimental nu era rot $(\overline{D}\times\bar{v})$ ca în relația (21.13), ci rot $[(\overline{D}-\varepsilon_0\overline{E})\times\bar{v}]=\mathrm{rot}\,(\overline{P}\times\bar{v})$. Experiența a constat în rotirea unui dielectric între armăturile fixe ale unui condensator încărcat. Această nepotrivire dintre teorie și experiență nu prezintă interes în tehnică și a fost explicată complet de teoria relativității, a cărei prezentare depășește cadrul acestui curs.

Se observă că în cazul corpurilor imobile ($\bar{v}=0$), legea circuitului magnetic are forma:

$$\oint_\Gamma\overline{H}\cdot\overline{ds}=\theta_{S_\Gamma}+\int\int_{S_\Gamma}\frac{\partial\overline{D}}{\partial t}\overline{dA}. \tag{21.14}$$

---

[1] v. R. Rădulet, *Bazele teoretice ale electrotehnicii*, vol. I, p. 473—476.

Se numește *regim cvasistaționar* regimul variabil în care se poate neglija curentul de deplasare în legea circuitului magnetic, peste tot, cu excepția dielectricului condensatoarelor.

21.4. Formele locale ale legii

În domenii de continuitate (netezime) a proprietăților fizice, aplicînd teorema lui Stokes membrului din stînga al relației (21.9), rezultă:

$$\iint_{S_\Gamma} \text{rot}\, \bar{H}\cdot\overline{dA} = \iint_{S_\Gamma} \left[\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho_v \bar{v} + \text{rot}\,(\bar{D}\times\bar{v})\right]\overline{dA}. \tag{21.15}$$

Forma locală a legii circuitului magnetic se deduce din relația (21.15), care trebuie să fie verificată oricare ar fi S_Γ:

$$\boxed{\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho_v \bar{v} + \text{rot}\,(\bar{D}\times\bar{v}).} \tag{21.16}$$

Dacă legea se aplică unui sistem de corpuri imobile ($\bar{v}=0$), se obține din (21.16) *prima ecuație a lui Maxwell*:

$$\boxed{\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}} \tag{21.17}$$

În regimul staționar (sau cvasistaționar), relația (21.17) are o formă simplă:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J}. \tag{21.18}$$

Rotorul intensității cîmpului magnetic este egal cu densitatea curentului electric.

Numai în regiunile din cîmpul magnetic în care densitatea curentului este nulă, de ex. în vid, rotorul e nul și se poate defini un potențial magnetic scalar. În general însă, cîmpul magnetic *nu* e un cîmp potențial.

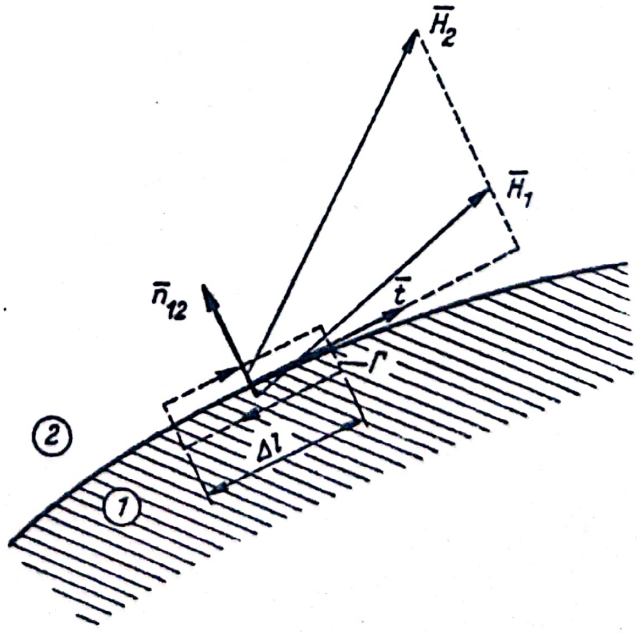


Fig. 21.3.

În cazul suprafețelor de discontinuitate (fig. 21.3) dintre două medii magnetice diferite (*1* și *2*), aplicînd legea circuitului magnetic în lungul micului contur dreptunghiular Γ, rezultă:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\cdot\overline{ds} = \bar{H}_2\,\Delta l\cdot\bar{t} + \bar{H}_1\,\Delta l(-\bar{t}) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

(în cazul cînd nu există curenți superficiali), E fiind un versor tangent la suprafață, în planul conturului Γ.

În consecință:

$$(H_t)_1=(H_t)_2, \tag{21.19}$$

ceea ce reprezintă conservarea componentelor tangențiale ale intensității cîmpului magnetic la trecerea printr-o suprafață de discontinuitate, în cazul în care nu există o pînză superficială de curenți.

21.5. Aplicații

21.5.1. Cîmpul magnetic într-un tor (inel) bobinat uniform cu o înfășurare de N spire prin care trece curentul continuu i (fig. 21.4)

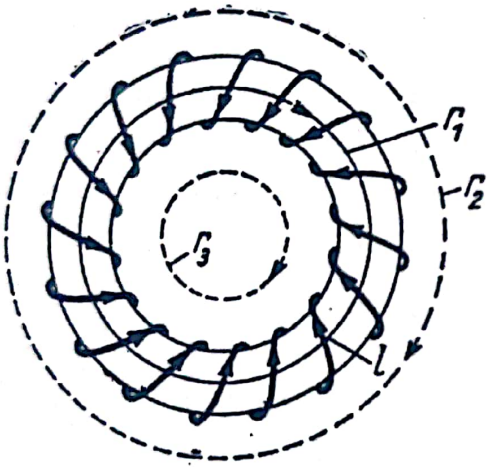


Fig. 21.4.

Din motive de simetrie, liniile de cîmp sînt circulare și, aplicînd legea circuitului magnetic pe conturul Γ_1 al unei linii de cîmp interioare de lungime (medie) l, se obține:

$$\oint_{\Gamma_1} \overline{H} \cdot \overline{ds} = Ni, \tag{21.20}$$

(deoarece orice suprafață sprijinită pe curba Γ_1 e împunsă de N ori de conductorul înfășurării de curenți).

Dar $\overline{H} \parallel \overline{ds}$ și din considerente de simetrie $|\overline{H}|$ este constant ca valoare în orice punct al conturiului. Deci:

$$H \cdot l = N i$$

sau

$$H=\frac{Ni}{l}. \tag{21.21}$$

Dacă dimensiunile secțiunii transversale ale torului sînt mici, în comparație cu lungimea l, H se consideră același în orice punct al secțiunii. Cîmpul în afara bobinajului este nul. Într-adevăr, efectuînd integralele de linie ale vectorului $\overline{H}$ pe contururile Γ_2 și Γ_3, ale căror suprafețe S_{Γ_2} și S_{Γ_3} nu sînt străbătute de curent, sau sînt străbătute de curenți dar cu o solenație totală nulă, rezultă $\overline{H}_{exterior}=0$.

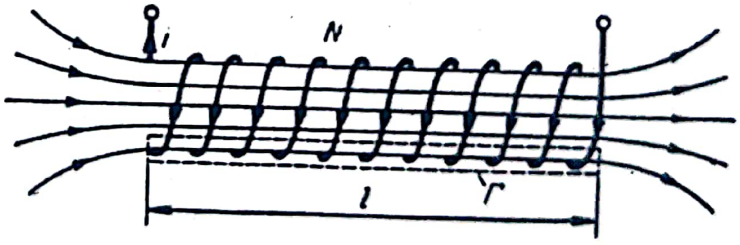


Fig. 21.5.

În cazul în care raza torului tinde spre infinit, el se transformă într-un solenoid drept infinit lung, pentru care valoarea cîmpului magnetic rămîne cea dată de relația (21.21). În general, în cazul unui solenoid drept, de lungime foarte mare față de dimensiunile transversale și regulat bobinat, intensitatea cîmpului magnetic din interior are practic valoarea:

$$H=\frac{N}{l}i = N_s i, \tag{21.22}$$

în care N_s este numărul de spire pe unitatea de lungime (fig. 21.5).

Scanned with OKEN Scanner

21.5.2. **Cîmpul magnetic al unei particule electrizate în mişcare lentă. Comparaţie cu formula Biot-Savart-Laplace.** În jurul particulei electrizate mobile în vid se produce un cîmp magnetic ale cărui linii de cîmp trebuie să fie, din motive de simetrie, nişte cercuri Γ cuprinse într-un plan perpendicular pe vectorul vitezei $\overline{v}$, şi care au centrele pe dreapta suport a vectorului $\overline{v}$ (fig. 21.6).

Integrala de linie a vectorului $\overline{H}$, de-a lungul uneia dintre liniile de cîmp de rază r este:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = \oint_{\Gamma} H \cdot ds = H \oint_{\Gamma} ds = 2\pi r \cdot H = 2\pi R H \sin\alpha \tag{21.23}$$

deoarece H = ct. de-a lungul liniei de cîmp în cazul considerat.

Conform legii circuitului magnetic, $\oint \overline{H} \cdot \overline{ds}$ trebuie să fie egală cu curentul de deplasare care trece printr-o suprafaţă S_Γ, sprijinită pe curba Γ, deoarece, în acest caz, nu există solenaţie (curent de conducţie):

$$\oint \overline{H} \cdot \overline{ds} = \frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt}. \tag{21.24}$$

Se orientează axa x a sistemului de coordonate în direcţia în care se deplasează particula de sarcină q. Fie x coordonata punctului P unde se află particula şi l distanţa de la un plan fix trecînd prin originea O şi perpendicular pe OX, la planul transversal ce conţine linia de cîmp Γ. Pentru simplificarea calculelor se alege drept suprafaţă S_Γ o calotă sferică cu centrul în P, sprijinită pe curba Γ.

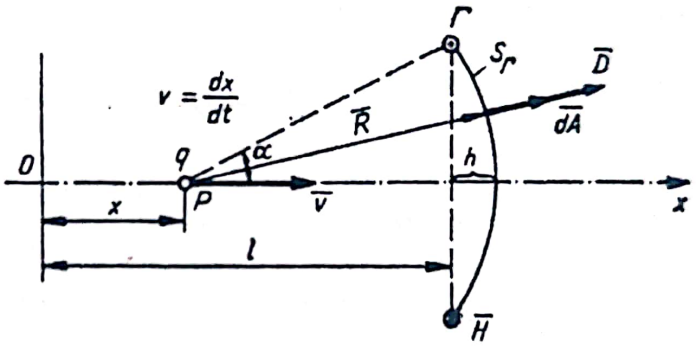


Fig. 21.6.

Dacă viteza particulei este suficient de mică, se poate admite caracterul coulombian al cîmpului electric al particulei. În acest caz, fluxul electric este (cu $\overline{E} \parallel \overline{R} \parallel \overline{D} \parallel \overline{dA}$):

$$\Psi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \overline{D} \cdot \overline{dA} = \iint_{S_\Gamma} \varepsilon_0 \overline{E} \cdot \overline{dA} = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{S_\Gamma} \frac{q}{R^3} \overline{R} \right) \overline{dA} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{R^2} \iint_{S_\Gamma} dA$$

$$\Psi_{S_\Gamma} = \left(\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \right) A_{cal}. \tag{21.25}$$

Aria calotei sferice este:

$$A_{cal} = 2\pi R\, h = 2\pi R\, [R - (l - x)] = 2\pi R\, (R - R\cos\alpha) = 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha). \tag{21.26}$$

În consecinţă, înlocuind expresia din relaţia (21.26) în relaţia (21.25) se obţine:

$$\Psi_{S_\Gamma} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{q}{R^2} \cdot 2\pi R^2 (1 - \cos\alpha) = \frac{q}{2} (1 - \cos\alpha). \tag{21.27}$$

Deci:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H} \cdot \overline{ds} = \frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt} = -\frac{q}{2} \left(-\sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{q}{2} \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt}. \tag{21.28}$$

Ţinînd seama că:

$$l - x = r \operatorname{ctg}\alpha; \quad \frac{d}{dt}(l - x) = -\frac{dx}{dt} = -v; \quad \frac{d}{dt}(r \operatorname{ctg}\alpha) = -\frac{r}{\sin^2\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

rezultă:

$$\frac{d\alpha}{dt} = v \frac{\sin^2\alpha}{r}. \tag{21.29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valoarea din relația (21.29) în relația (21.28) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \overline{H}\ \overline{ds} = \frac{q}{2} \cdot \frac{\sin^3\alpha}{r} v. \tag{21.30}$$

Din relațiile (21.30) și (21.23) se deduce valoarea intensității cîmpului magnetic:

$$H = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{\sin^3\alpha}{r^2} = \frac{qv}{4\pi} \cdot \frac{\sin\alpha}{R^2}, \tag{21.31}$$

deoarece $r = R \sin\alpha$. Vectorial se poate scrie:

$$\bar{H} = \frac{1}{4\pi} q \frac{\bar{v} \times \bar{R}}{R^3}, \tag{21.32}$$

formulă care prezintă o mare analogie cu formula lui Biot-Savart-Laplace (17.11), dacă se înlocuiește $q\bar{v}$ cu $id\bar{s}$.

22. Legea inducției electromagnetice

22.1. Forma integrală a legii

Se numește *inducție electromagnetică* producerea unei tensiuni electromotoare într-un circuit (Faraday, 1831) sau în general în lungul unei curbe închise, datorită variației în timp a fluxului magnetic care străbate o suprafață sprijinită pe acea curbă. Sensul acestei t.e.m. este astfel, încît efectele ei se opun cauzei care a produs-o (regula lui Lenz).

Forma integrală a legii inducției electromagnetice se scrie:

$$e_\Gamma = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \tag{22.1}$$

și se enunță astfel:

Tensiunea electromotoare produsă prin inducție electromagnetică în lungul unei curbe închise Γ este egală cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin orice suprafață sprijinită pe această curbă.

Relația (22.1) se scrie explicit:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{ds} = -\frac{d}{dt} \iint_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{dA}. \tag{22.2}$$

în care: $e_\Gamma = \oint_{\Gamma} \overline{E} \cdot \overline{ds}$ este tensiunea electromotoare în lungul curbei Γ (notată adesea și u_e), iar $\Phi_{S_\Gamma} = \iint_{S_\Gamma} \overline{B} \cdot \overline{dA}$ este fluxul magnetic prin suprafața S_Γ sprijinită pe curbă.

La aplicarea legii inducției electromagnetice trebuie să se țină seama de următoarele:

a) Curba închisă Γ este adesea luată în lungul unui conductor electric filiform: în cazul general, acest lucru nu este însă necesar și curba Γ poate avea orice formă, fiind dusă prin izolanți sau prin vid.

b) Dacă mediul considerat este în mișcare, curba Γ, este atașată corpurilor în mișcarea lor (ca și în legea circuitului magnetic).

c) Sensul de integrare pe curba Γ (sensul lui $\overline{ds}$) și sensul normalei $\overline{n}$ la suprafața S_Γ, în raport cu care se calculează fluxul (adică sensul lui $\overline{dA}=\overline{n}\cdot dA$), sînt asociate după regula burghiului drept (fig. 22.1) (aceeași ca și în legea circuitului magnetic). Dacă s-ar utiliza regula burghiului stîng, ar dispare semnul minus din legea inducției electromagnetice, dar ar apare în legea circuitului magnetic. Diferența de semn dintre cele două legi constituie deci un fapt obiectiv, independent de convenția utilizată pentru asocierea sensului de referință de pe contur cu sensul normalei pe suprafață (aceeași în ambele cazuri) și este exprimată plastic prin regula lui Lenz menționată mai înainte.

Dacă se consideră de exemplu, două spire situate în plane paralele, apropiate, prima spiră fiind parcursă de curentul $i_1(t)$ variabil, în momentele în care fluxul magnetic Φ_{21} (al cîmpului magnetic al primei spire prin conturul celei de-a doua spire) crește (adică $\frac{d\Phi_{21}}{dt}>0$), tensiunea electromotoare indusă în spira a doua este negativă ($e_2=-d\Phi_{21}/dt<0$), adică produce un curent $i_2(t)$ de sens contrar sensului asociat după regula burghiului drept (fig. 22.2). Acest curent indus produce un flux magnetic propriu Φ_{22} de sens contrar celui exterior (în creștere).

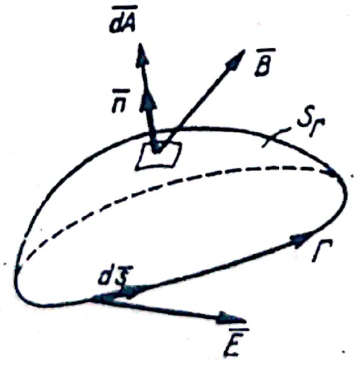


Fig. 22.1.

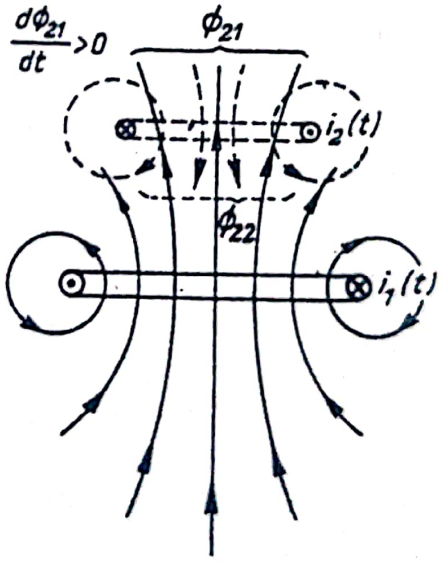


Fig. 22.2.

d) În cazul cînd conturul Γ la care se aplică legea este luat în lungul conductorului unei bobine cu N spire practic suprapuse, fluxul magnetic care intervine în calculul tensiunii electromotoare induse este fluxul printr-o suprafață sprijinită pe întregul contur, adică fluxul prin *toate* spirele. Dacă se notează cu Φ_f fluxul magnetic printr-o singură spiră, numit *flux fascicular*, în legea inducției intervine *fluxul total*: $\Phi=N\Phi_f$ și se poate scrie:

$$e=-N\frac{d\Phi_f}{dt}. \qquad (22.1')$$

a) Curba închisă Γ este adesea luată în lungul unui conductor electric filiform; în cazul general, acest lucru nu este însă necesar și curba Γ poate avea orice formă, fiind dusă prin izolanți sau prin vid.

b) Dacă mediul considerat este în mișcare, curba Γ, este atașată corpurilor în mișcarea lor (ca și în legea circuitului magnetic).

c) Sensul de integrare pe curba Γ (sensul lui $\overline{ds}$) și sensul normalei $\overline{n}$ la suprafața S_Γ, în raport cu care se calculează fluxul (adică sensul lui $\overline{dA}=\overline{n}\cdot dA$), sînt asociate după regula burghiului drept (fig. 22.1) (aceeași ca și în legea circuitului magnetic). Dacă s-ar utiliza regula burghiului stîng, ar dispare semnul minus din legea inducției electromagnetice, dar ar apare în legea circuitului magnetic. Diferența de semn dintre cele două legi constituie deci un fapt obiectiv, independent de convenția utilizată pentru asocierea sensului de referință de pe contur cu sensul normalei pe suprafață (aceeași în ambele cazuri) și este exprimată plastic prin regula lui Lenz menționată mai înainte.

Dacă se consideră de exemplu, două spire situate în plane paralele, apropiate, prima spiră fiind parcursă de curentul $i_1(t)$ variabil, în momentele în care fluxul magnetic Φ_{21} (al cîmpului magnetic al primei spire prin conturul celei de-a doua spire) crește (adică $\frac{d\Phi_{21}}{dt}>0$), tensiunea electromotoare indusă în spira a doua este negativă ($e_2=-d\Phi_{21}/dt<0$), adică produce un curent $i_2(t)$ de sens contrar sensului asociat după regula burghiului drept (fig. 22.2). Acest curent indus produce un flux magnetic propriu Φ_{22} de sens contrar celui exterior (în creștere).

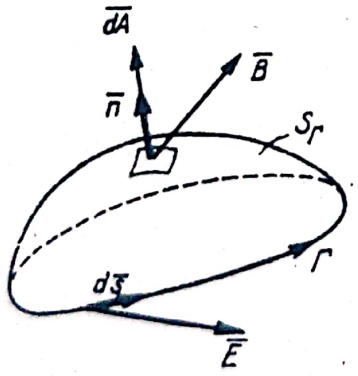


Fig. 22.1.

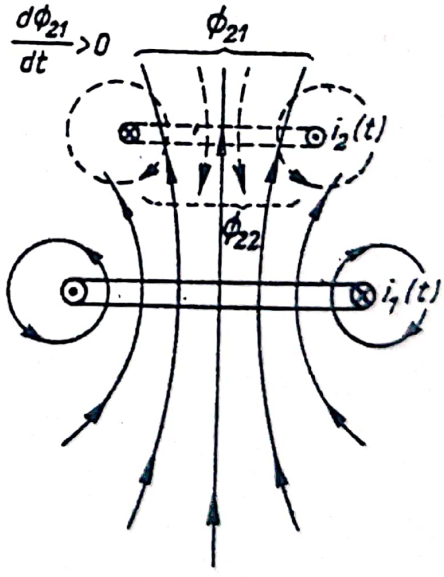


Fig. 22.2.

d) În cazul cînd conturul Γ la care se aplică legea este luat în lungul conductorului unei bobine cu N spire practic suprapuse, fluxul magnetic care intervine în calculul tensiunii electromotoare induse este fluxul printr-o suprafață sprijinită pe întregul contur, adică fluxul prin *toate* spirele. Dacă se notează cu Φ_f fluxul magnetic printr-o singură spiră, numit *flux fascicular*, în legea inducției intervine *fluxul total*: $\Phi=N\Phi_f$ și se poate scrie:

$$e=-N\frac{d\Phi_f}{dt}. \qquad (22.1')$$

Aplicație. Verificăm forma locală (20.3) a legii pentru cîmpul unui conductor rectiliniu, infinit de lung, străbătut de curentul i (fig. 20.2), în vid.

Componentele vectorului $\overline{B}_v=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\bar{u}_t$ pe cele două axe sînt: $B_{vz}=0$

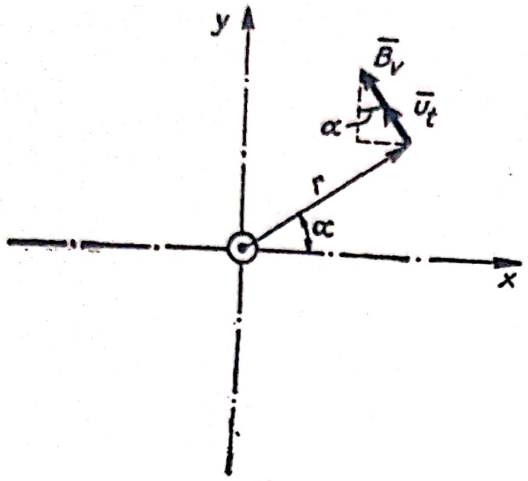


Fig.20.2.

$$B_{vx}=-\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\sin\alpha=-\frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$B_{vy}=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\cos\alpha=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}$$

Deci:

$$\operatorname{div}\overline{B}_v=\frac{\partial B_{vx}}{\partial x}+\frac{\partial B_{vy}}{\partial y}+\frac{\partial B_{vz}}{\partial z}$$

$$=\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\right]=$$

$$\frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[-\frac{(-2xy)}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]=0$$

20.3. Linii și tuburi de flux magnetic

Din legea fluxului magnetic rezultă că liniile vectorului inducție $\overline{B}$ nu pot să înceapă sau să se termine într-un punct din cîmp (deoarece fluxul, printr-o suprafață închisă ce se strînge către acel punct, ar fi nenul). Liniile pot fi închise (ca în cazul conductorului foarte lung), pot începe și se pot termina la infinit, sau se pot înfășura asimptotic în jurul unor curbe limită sau pe anumite suprafețe (linii practic închise).

Un ansamblu de linii ale vectorului inducție magnetică ce se sprijină pe o anumită curbă închisă constituie un *tub de flux magnetic*.

Aplicînd legea fluxului magnetic unei porțiuni de tub de flux limitată de două secțiuni de bază A_1 și A_2 rezultă că tuburile de flux magnetic sînt conservative: în lungul lor fluxul magnetic are aceeași valoare (fig. 20.3): $\Phi_1=\Phi_2$ (deoarece prin suprafața laterală a tubului fluxul este nul, vectorul $\overline{B}$ fiind tangențial, fluxul care intră la un capăt al tubului este egal cu fluxul care iese la celălalt capăt).

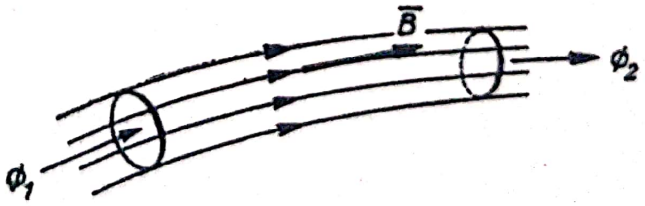


Fig. 20.3.

Tot cîmpul se poate imagina împărțit în tuburi de flux magnetic de secțiuni suficient de mici și de flux egal cu unitatea și se poate conveni ca fiecare tub să fie reprezentat printr-o linie magnetică care să coincidă cu axa tubului. Tuburile de flux la care fluxul prin secțiunea transversală este egal cu unitatea se numesc *tuburi-unitate*, iar liniile de cîmp care le reprezintă *linii-unitate*.

20.4. Potențialul magnetic vector

Condiția div $\overline{B}=0$, care exprimă principiul continuității fluxului magnetic, este identic satisfăcută dacă se exprimă vectorul inducției $\overline{B}$ sub forma rotorului unui vector auxiliar $\overline{A}$:

$$\overline{B}=\operatorname{rot}\overline{A} \tag{20.5}$$

deoarece $\operatorname{div}\overline{B}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\equiv$

$$\equiv\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{A}\equiv 0.$$

Mărimea $\overline{A}$ se numește *potențial magnetic vector* al cîmpului magnetic, iar existența acestei mărimi este condiționată de valabilitatea legii fluxului magnetic. Potențialul vector poate fi utilizat pentru a calcula fluxul magnetic. Din relația (19.6) și (20.5) se obține:

$$\Phi_{S_\Gamma}=\iint\limits_{S_\Gamma}\overline{B}\cdot\overline{dA}=\iint\limits_{S\Gamma}\operatorname{rot}\overline{A}\cdot\overline{dA}\,^{1}$$

sau, conform teoremei Stokes, relația (19.22):

$$\Phi_{S_\Gamma}=\oint\limits_{\Gamma}\overline{A}\ \overline{ds} \tag{20.6}$$

Fluxul magnetic care trece prin suprafața S_Γ este egal cu integrala de linie a potențialului vector de-a lungul conturului închis Γ, care limitează această suprafață (fig. 20.4).

La calculul fluxului magnetic cu ajutorul integralei $\iint_{S_\Gamma}\overline{B}\,\overline{dA}$, este necesar să se determine valorile vectorului $\overline{B}$ în toate punctele suprafeței S_Γ. La calculul fluxului magnetic cu ajutorul potențialului vector $\overline{A}$ este suficient să se cunoască valorile lui pe conturul care limitează această suprafață, înlocuind integrarea pe suprafață printr-o integrală de contur, ceea ce uneori poate fi foarte util. Expresia (20.6) pune în evidență faptul că fluxul magnetic depinde numai de conturul Γ la care se referă.

Denumirea de „potențial" vector s-a dat prin analogie cu potențialul scalar. În adevăr, printr-o derivare spațială a potențialului scalar se obține intensitatea cîmpului ($\overline{E}=-$grad V, în electrostatică). Tot printr-o operație de derivare spațială vectorială a lui $\overline{A}$ se obține vectorul inducție magnetică $\overline{B}$ ($\overline{B}=\operatorname{rot}\ \overline{A}$).

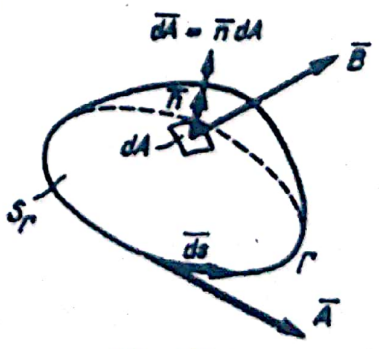


Fig. 20.4.

[1] A se observa că, în această relație, $\overline{A}$ reprezintă potențialul vector, iar $\overline{dA}$ elementul de arie.

Potențialul vector este o mărime vectorială de calcul, care nu are o semnificație fizică nemijlocită. Se folosește însă pentru a simplifica tratarea matematică a multor probleme fizice. El e univoc definit *numai* după ce se alege div $\bar{A}$ și originea potențialelor (punctul în care $\bar{A}=0$).

21. Legea circuitului magnetic

21.1. Forma integrală a legii

În orice moment, tensiunea magnetomotoare u_{mm_Γ} *de-a lungul oricărei curbe închise* Γ *este egală cu suma a doi termeni: primul este solenația* θ_{S_Γ}, *corespunzătoare curenților care străbat o suprafață deschisă oarecare* S_Γ *mărginită de curba* Γ; *al doilea termen este derivata în raport cu timpul a fluxului electric* Ψ_{S_Γ} *prin aceeași suprafață* S_Γ *și se numește curent de deplasare:*

$$u_{mm_\Gamma}=\theta_{S_\Gamma}+\frac{d\Psi_{S_\Gamma}}{dt} \qquad (21.1)$$ [1]

Tensiunea magnetomotoare (t.m.m.) este integrala de linie pe o curbă închisă a intensității cîmpului magnetic $\bar{H}$: $u_{mm_\Gamma}=\int_\Gamma \bar{H}d\bar{s}$; *solenația* este curentul de conducție total, adică suma algebrică a curenților din conductoarele care străpung suprafața considerată: $\theta_{S_\Gamma}=\Sigma Ni=\iint_{S_\Gamma}\bar{J}d\bar{A}$. Se utilizează termenul „solenație", în loc de intensitatea curentului electric de conducție, deoarece ultima mărime caracterizează un conductor, pe cînd solenația este definită referitor la o suprafață care poate fi străbătută de mai multe conductoare sau de același conductor de mai multe ori (de N ori).

Deoarece *fluxul electric* este $\Psi_{S_\Gamma}=\iint_{S_\Gamma}\bar{D}\cdot d\bar{A}$, legea circuitului magnetic se scrie explicit:

$$\oint_\Gamma \bar{H}\cdot d\bar{s}=\iint_{S_\Gamma}\bar{J}\cdot d\bar{A}+\frac{d}{dt}\iint_{S_\Gamma}\bar{D}\cdot d\bar{A}. \qquad (21.2)$$

Dacă se alege un anumit sens pozitiv al intensității curentului electric prin suprafața deschisă S_Γ și acestuia i se asociază după regula burghiului drept

[1] În sisteme de unități neraționalizate se schimbă unitățile de tensiune magnetomotoare și de flux electric și legea se scrie:

$$u'_{mm_\Gamma}=4\pi\theta_{S_\Gamma}+d\Psi'_{S_\Gamma}/dt \qquad (21.1')$$

Scanned with OKEN Scanner

13-08-2008 14:57

Banca Comerciala Romana IASI IASI
Str. Palat nr. 11
230500/230600

Inregistrat in Registrul de evidenta a prelucrarilor de date cu caracter personal sub nr.3776

Ordin de incasare numerar nr. 2008081300115457 din data: 13.08.2008

S-a incasat de la dl. (d-na) Vlad Nicolaie
posesor act id.: Carte de identitate seria MX nr.585057 eliberat de iasi la data 16.01.2006, data expirarii 06.06.2066, CNP 1350606221153
suma de 50.00 USD , adica cincizeci USD
50.00 USD , Depunere numerar cu comision simbol plan casa
reprezentand Depunere numerar - in contul: 2511.A01.0.3334629.0318.USD.3 (Vlad Nicolaie)
Ref. oper.: 2008081300781552
Doc. oper.: Ordin de incasare numerar nr. 2008081300115457 din data 13.08.2008

MONETAR USD

Diviziune	S	Nr. bucati
100	B	1
50	B	-1

Total valoare: 50.00 USD

Casier(Maria Gabriela Nechitoae) Solicitant (Vlad Nicolaie)

BANCA COMERCIALA ROMANA S.A.
Sucursala Jud. IASI 116

CETI's 1-Kilowatt Cold Fusion Device Demonstration

by Jed Rothwell

Editor's Note: This is Jed Rothwell's talk at the Infinite Energy Symposium on January 20, 1996 at the Cambridge Marriott Hotel.

I am here to talk about cold fusion devices manufactured by CETI – Clean Energy Technologies, Inc., of Dallas, Texas. I have no affiliation with CETI. My report is based on my observations of two demonstrations, and discussions with people who have independently replicated the device. Gene Mallove and I asked CETI to come here today and give a presentation, but they declined. That's good news for you, because I will tell you a lot more than they would have! I will talk about the three demonstrations, show you a close-up look at the beads, and describe CETI's business plan and their continuing public relations fiasco. [Slide 1 - *Editor's note: "Slides" indicated here for flow, not printed in this magazine.*]]

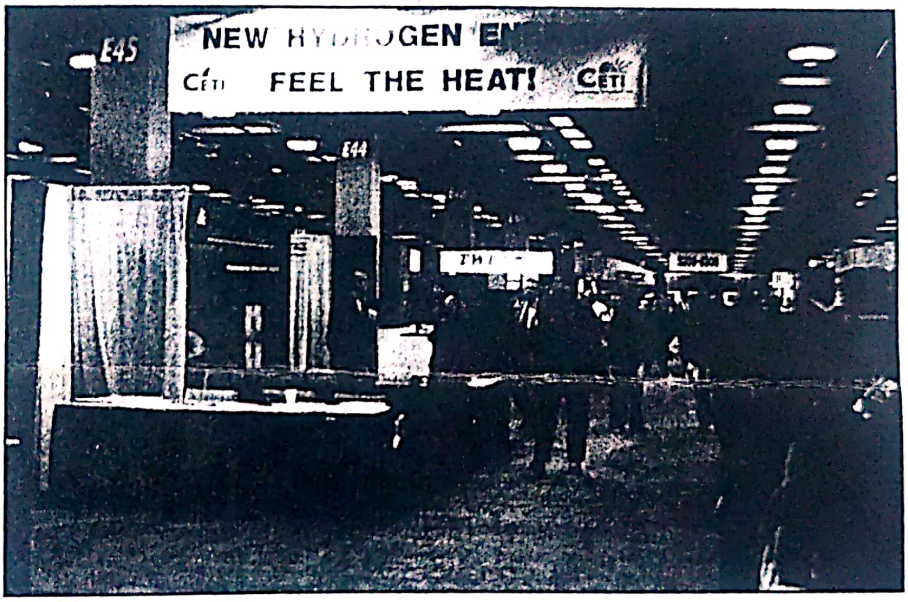
The CETI devices were invented and patented by Jim Patterson. The cathode is composed of thousands of 1 mm beads covered with multiple layers of electrolytically deposited thin film nickel and palladium. I will not go into the details because the handout includes CETI's address, their brochure, patent numbers and so on.

CETI cells were demonstrated at three conferences last year, in flow calorimeters. [Slide 2] In April, at the Fifth International Conference on Cold Fusion, in Monte Carlo, Dennis Cravens demonstrated a cell running at 2.5 watts. In October, at the hot fusion SOFE conference George Miley's group showed a cell running at 4.8 watts, and most recently in December Cravens demonstrated a much larger cell that ran between 500 and 1,300 watts. Excess power goes up dramatically, and the ratio of input to output goes from 6 to 80 to 4,000. The third test, at the Power-Gen conference, was dramatically better but that is partly because this is a bigger cell, scaled up from 1 to 40 ml of beads. It is also because the reaction is stronger at higher temperatures.

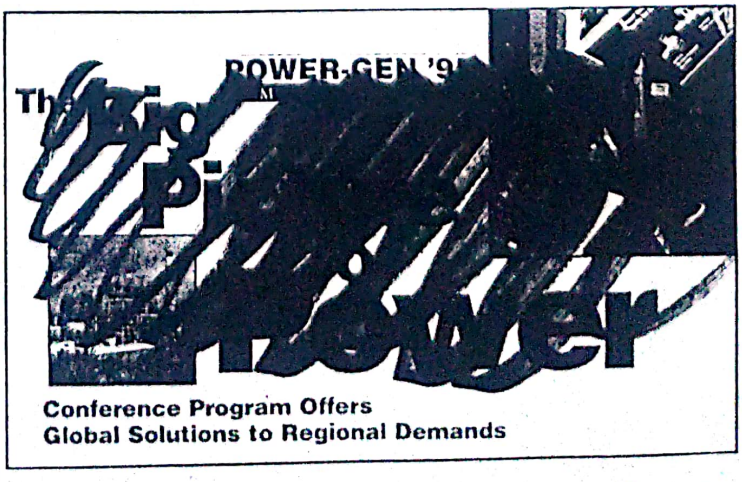
The cells have been independently tested in laboratory settings, not just conferences, at the University of Illinois, by Quinton Bowles at the University of Missouri, and at least one major corporation [Editor's Note: This is Motorola!]. Miley saw excess heat with beads given to him by CETI. His group also fabricated beads from scratch, and saw excess heat from them, too. Miley use vapor sputtering, rather than electrolytic deposition. Before he became involved with Patterson, Miley was working with multi-layer palladium thin film cathodes. He published a paper about that in 1994. Bowles is doing high temperature, pressurized calorimetry.

The calorimetry and some of the cell design in these demonstrations was done by Dennis Cravens. He is an independent scientist who lives in Clouderoft, New Mexico. At the Fourth International Conference, Martin Fleischmann nominated Cravens for best paper, and Martin said to me, "Cravens is a genius." I said I know, that's what I have been saying for years. He is a genius in the American tradition: a hands-on, practical, Apollo 13 engineer type. He uses rough and ready methods to achieve large, easily detected results. He hates computers. He prefers old fashioned non-electronic instruments, like mercury thermometers. That rough and ready approach is usually a strength, but at Power-Gen it was a weakness.

Let me take a moment to describe what a flow calorimeter is. Flow calorimeters were invented in the early 1900s. They work like a coffee makers. [Photo 1, of ICCF5 calorimeter]. Cold water enters an insulated cell, and it comes out hot. It returns to the reservoir where it cools down again. You keep the flow steady and you measure how much water goes through every minute. The Delta T temperature (outlet minus inlet) in degrees centigrade multiplied by the mass flow equals calories; calories times

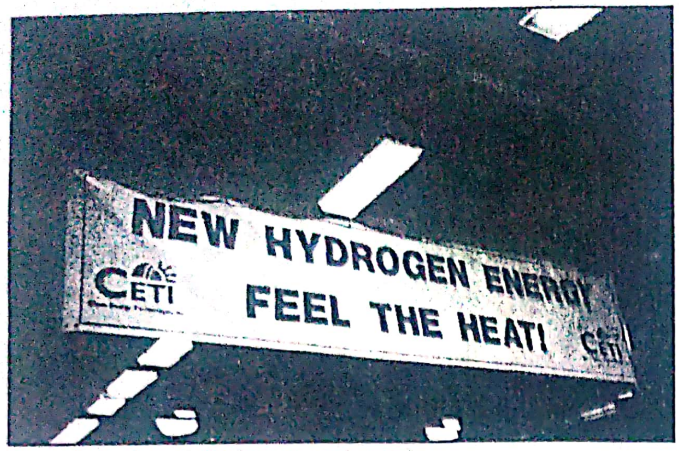


CETI's Booth at Power-Gen '95. Demonstrations of the Patterson Power Cell unit were in the reserved hotel room. *(All Power-Gen photos, courtesy A. Kawasaki)*



Conference Program Offers Global Solutions to Regional Demands

Scanned with OKEN Scanner



4 equals joules; joules per second equals watts, which you compare to the electric power consumed by the cell. This number 4 is the specific heat of water, 4.2, reduced a little because the cooling fluid is 1.0 molar lithium sulfate electrolyte. The electrolyte from the cell is circulated as the coolant with this configuration. Dennis Cravens carefully tested the electrolyte during extensive calibrations with joule heaters and null electrolysis, and he found the specific heat was never less than 95% of that of pure water.

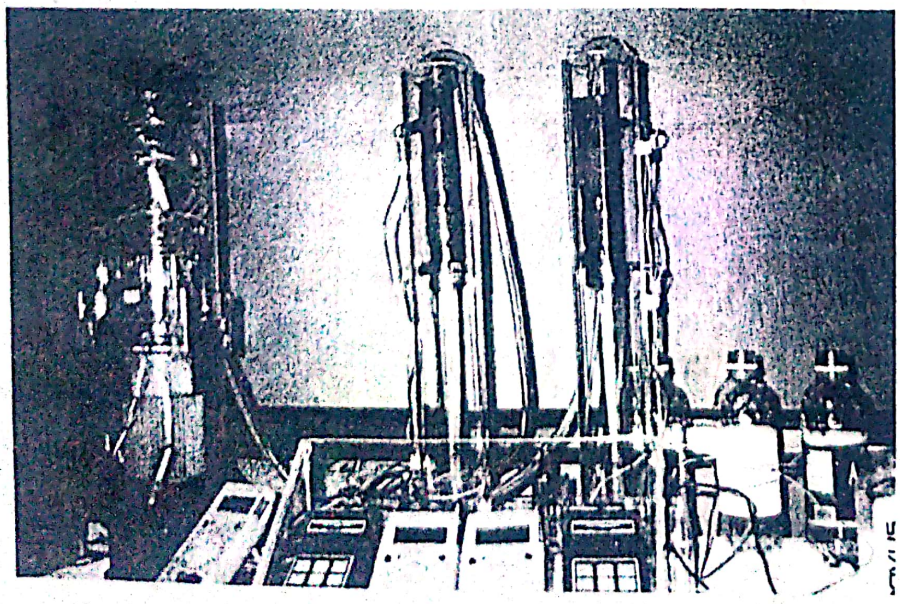
A flow calorimeter works on first principles. It does not depend upon a calibration curve the way a static calorimeter does. You can walk into the room, see the demo for the first time, and do the arithmetic yourself to confirm the excess heat. You do not need to be present the day before to observe a calibration run.

The Fifth International Conference calorimeter was a quality job. Cravens did a superb experiment back in his lab, and then he brought a simplified version of the apparatus to the conference. Even this traveling demo version was a better experiment than many of the ones described during the conference. Imagine setting up these precision instruments, pumps, and whatnot in a hotel room the night before a conference!

The SOFE calorimeter was put together by George Miley's group at the University of Illinois. I did not see it, but I gather it was first rate. (As you would expect.)

The third demonstration at Power-Gen '95 was performed by Cravens. The results were dramatic but unfortunately the calorimeter was not to his usual standards. It was sloppy and unprofessional. Here it is. [See photos] This has a much larger pump, a Magnum 220 aquarium pump, to accommodate the larger heat output. I have several gripes about this setup. It has a CF cell and a control electrolysis cell with a dummy cathode. This is much too complicated. A member of the audience cannot keep track of two cells simultaneously during a demonstration, watching all these

CETI's Patterson Power Cell demonstration showing live and control cells in plastic safety shields (actual cells hidden within insulating foam). Heat exchanger column (to the left) with aquarium pump and fluid reservoir below. Muffin fan tops the heat exchanger tower, allowing witnesses to literally "feel the heat."



COLD FUSION TIMES

The Journal of the Scientific Aspects of Loading Isotopic Fuels Into Materials

Published Quarterly

Publisher and Editor
Dr. Mitchell Swartz

Annual subscription rate is $120.00. Single issues are $40.00. There is an extra postage and handling charge of $5.00 per order outside of the United States.

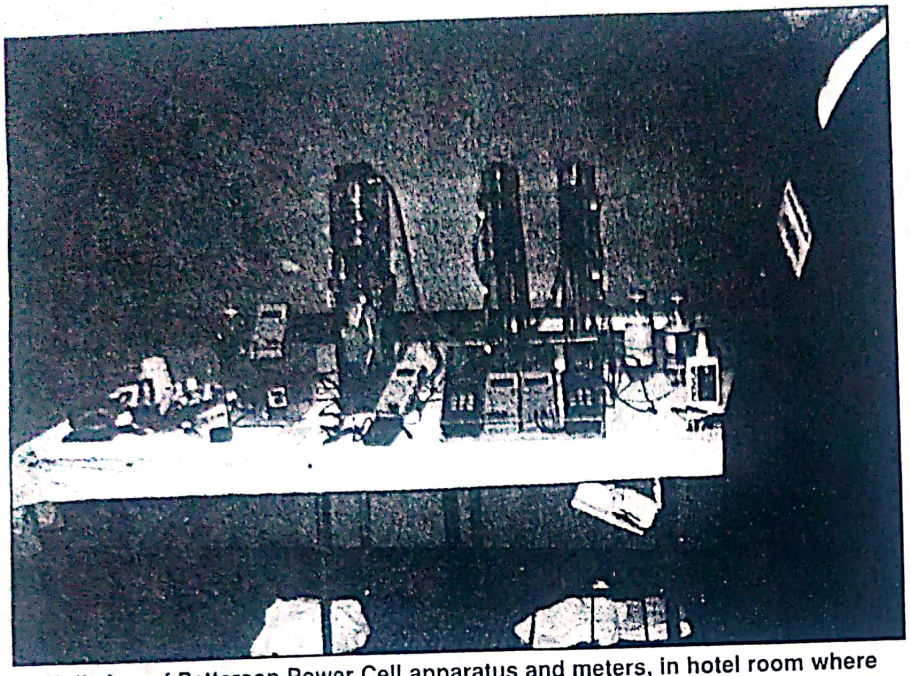
P.O. Box 81135
Wellesley Hills, MA USA
02181

meters. Furthermore, on the first day the control cell got plugged up. It had to be removed and replaced with a joule heater. Most unfortunately, as you see it does not have a flowmeter. This was a nuisance. We had to depend upon the graduated cylinder and stopwatch. I will have more to say about this later.

Let me just say two things about the quality issue. I raised it and I want to clarify it. I was disappointed because I have come to expect superlative work from Dennis Cravens, and this was merely adequate. *Let me make this perfectly clear: even with this setup and its attendant problems, I have no doubt that the massive excess heat I observed was real.* The Power-Gen demonstrations were witnessed by George Miley, Hal Fox, Tom Passell of EPRI and other big guns in the cold fusion business. When I spoke with them, none expressed any doubts about the results. They are tough, outspoken senior people. A year ago, when Passel saw the calorimeters constructed by Patterson, he did not hesitate to point out the faults, and he said he did not believe the results indicated excess heat. Miley commented that it is a real shame they did not use better instruments, but he expressed no doubt about the results.

The other observers and I believe in this experiment because we made darn sure it was real. We did not take CETI's word for it, we checked. [Slide 3] Flow calorimeters are simple but not foolproof. They have only three parameters: input power, flow rate, Delta T temperature. If you get all three right with rea-

Scanned with OKEN Scanner



Full view of Patterson Power Cell apparatus and meters, in hotel room where demonstrations took place.

sonable error margins, you can be sure there is excess heat. Here is what we did:

Input power

Dennis measures electrolysis power with Metex M 3800 series multimeters. At Power-Gen he also measured total AC going into all components including the power supplies, pump and fan. It was 85 watts, much less than the excess.

The power supply for the cell is a Radio Shack Universal AC Adapters, with five voltage settings from 3 to 9 volts. It is a small, old fashioned transformer, rated 600 milliamps. It is physically impossible to get 50 or 500 watts out of one of these.

Flow

As I said, Dennis botched this one. A week before the conference he decided the cell was running too hot so he increased the flow rate to 1 liter per minute. Unfortunately his flowmeter topped out at around 600 ml and he did not get a replacement. We had to depend on the manual measurements. This method is annoying. It is imprecise. Accurate, but imprecise. On the other hand, Galileo measured flow this way. It works. Even when a good flowmeter is installed, I recommend a reality check with a stopwatch and cylinder, because that is the most fundamental method. The problem with relying on this method is that if the flow gets blocked, you might not notice it until you measure the flow again. That is what happened with the control cell on the first day. It did not happen with the active cell. We know the flow was steady for three reasons:

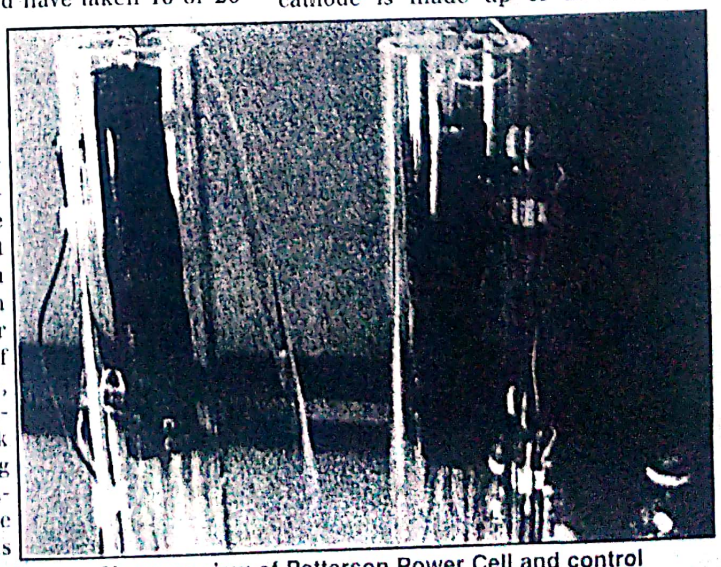
1. We tested it repeatedly, taking 250 ml samples over 15 second intervals. We found no measurable variation.
2. You could watch the water and electrolysis bubbles move through the pipes rapidly.
3. To account for the 8 to 17 °C Delta T the pipes would have to be stopped up almost completely, allowing no more than a few drops through every minute. In that case, when we dumped out 250 ml samples, cold water would have covered the outlet thermocouples, the Delta T would have dropped to zero immediately, and it would have taken 10 or 20 minutes to recover. That did not happen.

Temperature

With any calorimeter temperature is the most difficult parameter. You get troubles with improper grounding of thermocouples, crosstalk, instrument drift, weak batteries. Mixing and proper positioning of the thermocouples is critical: you get temperature gradients between streamlines, the "wicking" effects. I circumvented all potential problems by the most direct means I could think of. When I drew 250 ml samples of water to test the flow, I stirred them up and measured the temperature with two thermistors and a mercury thermometer. I found the thermocouples were right on the mark. The Delta T really was 8 or 15°C. Let me add that Dennis did a great job on the temperature measurements. He ensuring proper mixing with Omega brand plastic in-line mixers, which were recommended to him by SRI. He used some clever techniques mounting the thermocouples.

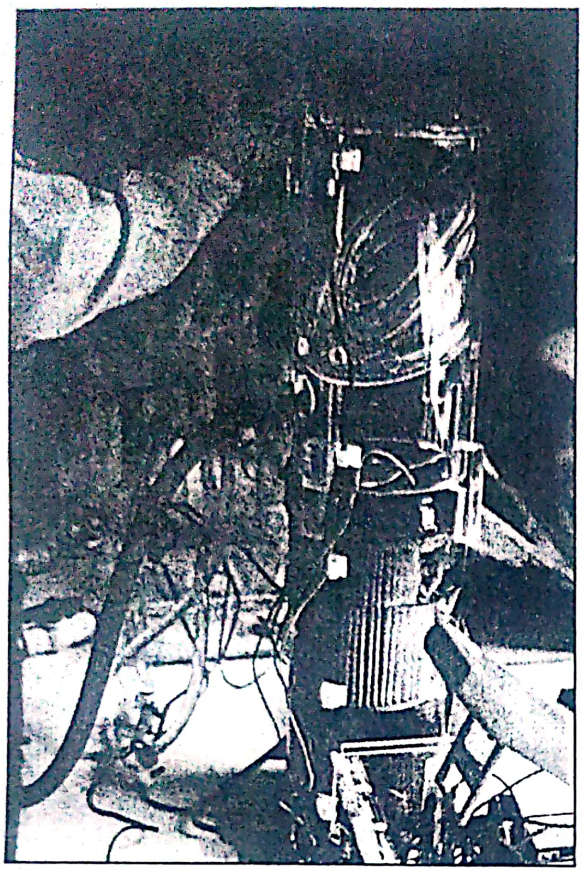
The reservoir fluid was surprisingly cool. It was only about 35°C with 500 watts. Intuitively, it seems it should have been hotter. Some people did back-of-the-envelope estimates and they say the cooling loop above the reservoir should not have had enough capacity to keep the reservoir temperature so low. The cooling loop contains about two and half meters of coiled Tygon R3603 tubing. That fan blew a steady stream of palpably warm air. I did not measure the temperature of the air, but someone computed that with a fan of that capacity if the air was 20 °C hotter than ambient it would remove all 500 watts. The reservoir top has a hole to let electrolysis gas and probably a lot of evaporation. Cravens reported that during calibration runs with the pump running alone the reservoir temperature does not rise significantly. Since the input is the pump plus one-tenth watt, and the temperature went up 15°C, there must be a massive source of excess heat.

Let us have a closer look at the patented cathode material. As I said, the cathode is made up of thousands of



Close-up view of Patterson Power Cell and control

Scanned with OKEN Scanner



Close-up view of heat exchanger column and aquarium pump-electrolyte reservoir.

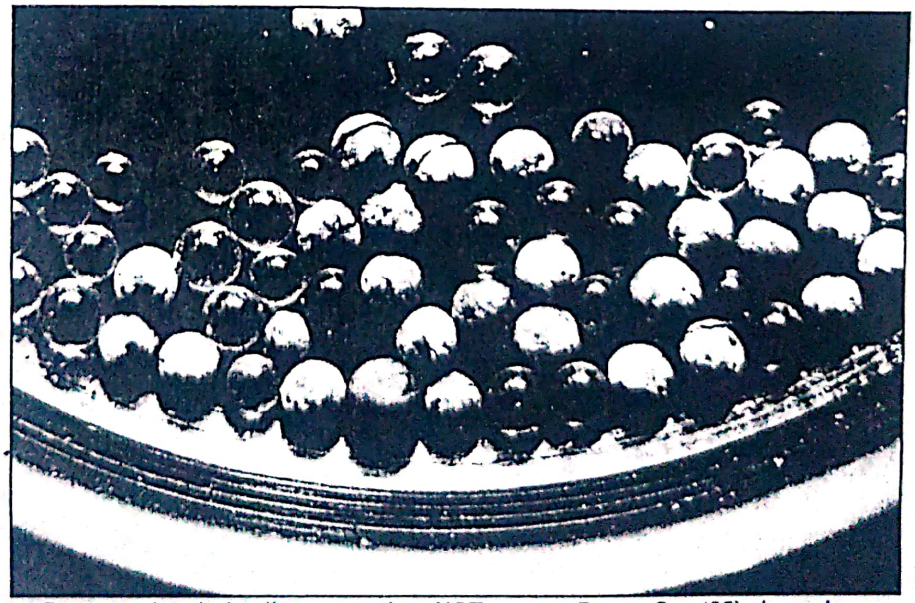
small beads or "microspheres." Here is schematic of one. [Photo of brochure] It has a styrene core, copper flashing, and then thin film layers of nickel, palladium, and nickel. The role of the palladium is not clear. Ed Storms had some interesting ideas about that. Now this picture shows a perfectly round sphere with splendidly uniform thin film layers. That's the ideal. The reality looks like this. [See photo to right.] This is a photograph of some used beads. This photograph, by the way, is highly unauthorized. I didn't take it. It just fell through the transom and landed on my desk. Ignore these clear beads. They are unrelated. Looking at the cathode beads you see they are not perfectly round and not uniform in size. They are irregular, and so are the unused, new ones I have seen. It is apparent even to the naked eye. There is a lot of damage from extended use. I believe these cracks are caused by repeated thermal expansion and contraction. This one has green spots, which I think may be the copper flashing showing through. The vapor sputtering technique that Miley has developed produces much more regular beads with evenly deposited film layers. Miley thinks this will lead to enhanced performance. The first generation beads he fabricated did not work as well at high power, but they worked better at very low power.

This photograph illustrates the Achilles heel of the CETI cathode, and of all electrochemical cold fusion cathodes. Wear and tear, the enormous pressure from hydrogen loading, and contamination limit the lifetime of the materials. The CETI cathodes hold up much better than most other kinds. A few years ago, Miley's thin film cathodes self-destructed from the heat in a few hours. Ed Storms describes the cracking, swelling and damage that prevent many palladium cathodes from working. The secret to cold fusion is finding good materials. The beads shown here are first generation devices used on and off over several months I think. Patterson has subsequently found ways to reduce the thermal expansion, and to make the thin films stick on tighter. He has substantially increased the life of the materials. I think they now last long enough to be used in practical devices. A cold fusion cell that lasts a year would be economical. If it included thin film palladium, the metal could be recycled.

The material in these beads that gives the most trouble is the styrene core. At temperatures above 200°C the beads have to be kept at high pressure or the styrene sublimes. If I was CETI, I would be looking for replacement core material. It has to be non-conducting and you have to be able to attach thin films to it. Many people have suggested that a ceramic might work well.

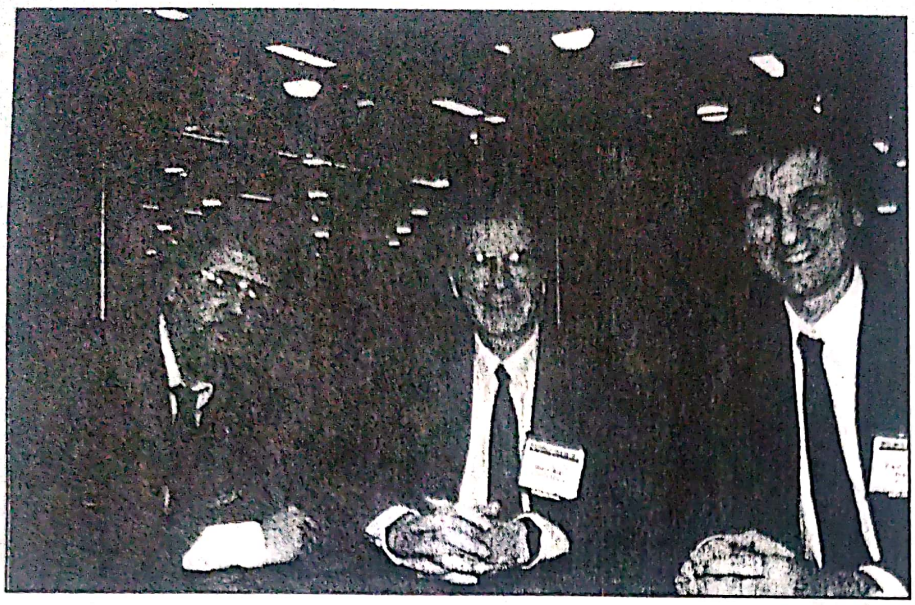
Now let me discuss some aspects of CETI's business strategy and the background of this demonstration. I am deeply unhappy with their business strategy. I think their experiments are superb, I think their willingness to demonstrate the devices in public is laudable, I think their invention is one of the most promising and practical implementations of cold fusion energy. CETI and I agree about many things, but when it comes to business strategy, we are worlds apart. I spoke with them yesterday and we remain at odds.

You will have noticed that CETI did a strange thing. After doing two superb demonstrations, they showed up at the preeminent power industry trade show with a merely adequate experiment. It was good enough as an experiment, but as a trade show exhibit it was a fiasco. They should have had a big red digital display of the temperature, a computer monitoring everything showing a graph of excess power, and a big sign: "1 WATT IN, 1000 WATTS OUT!" On the second day they took the demonstration out of the trade show hall and hid it in a hotel room. They made no attempt to convince people that the thing was real. If they had brought a properly designed trade show display, they would have had 14,000 potential customers eating out of



Patterson beads (earlier generation, NOT ones at Power-Gen '95) show clear signs of cracking damage to metal coatings after prolonged use. Some beads have *no* coating. *(Photo Source: Anonymous)*

Scanned with OKEN Scanner



A station break at Power-Gen '95: Jed Rothwell with Prof. George Miley (University of Illinois, Nuclear Engineering) and engineer Frank Znidarsic of Pennsylvania Electric Company (GPU).

predict what a new product will be good for. When lasers were invented people thought they would be good for cutting meat; they never dreamed we would check out groceries with them, or look up things in CD-ROM encyclopedias. When they invented microprocessors, Zilog, Intel and Motorola had no idea what they would be good for, or how many they could sell. They did not pick five "strategic corporate partners," go off into a corner and spend years secretly developing microcomputers. No, they simply announced product availability in the trade magazines and started selling to any company. They even sold them to individual computer hobbyists in the early days. They did not try to limit the number of customers, they did not try to tell the customers what they should do with the product, and they did not slow down sales and limit development in order to take charge of the process and win a larger future market share.

Maybe I am wrong about this. Maybe this product is not like Ford's automobiles, Bill Gates's Windows, MacDonald's hamburgers, Mrs. Field's cookies, or Pete Peterson's WordPerfect. Those products succeeded with a simple, direct, old fashioned marketing approach, which Peterson described. [Slide 4] Perhaps cold fusion calls for a much more complicated, convoluted approach. My guess is that the laws of marketing apply to all products, and that any strategy more complicated that necessary is a mistake. Perhaps CETI will succeed in a big way, and they will go down in history and change the rules. If so, I will say that they succeeded in spite of their strategy, not because of it. The product is so good that a lousy strategy might work.

What leads CETI and many other R&D companies to act this way? It is what I call the "inventor's disease," or the Own Worst Enemy syndrome. Some of the finest scientists and inventors in history have suffered from this disease, including Newton, Galileo, the Wright Brothers and Pons and Fleischmann. I think that CETI has a mild case. Until recently they have shown good business judgment. I am confident that they will soon be back on the right track. They told me their increased secrecy is temporary policy, and they will be back to doing demonstrations, showing products and sharing information freely again in six months to a year. I culled this list of symptoms from many different companies in cold fusion, computers and other cutting edge technology. I want to emphasize that CETI does not suffer from all of these faults, and for that matter, even the best ventures are not completely free of them, nor can I myself afford to throw the first stone [Slide 5]:

THE SYMPTOMS OF THE INVENTOR'S DISEASE, A.K.A. "OWN WORST ENEMY" SYNDROME

- **Hubris.**

- **Grandiose schemes** to take over unrealistically large future market share when your present market share is zero.

- **Orientation to the future to such an extent that present concerns are ignored,** present needs unmet. Paralysis of analysis, and the never ending refinement cycle. Some inventors never get the product out the door because they are forever tinkering with it, improving it, and "the next version will be so much better."

- **Hiding results for long periods for no rational reason.** Delays introducing products for no reason. Inordinate concern with competition and with intellectual property, often mixed with a curious and unjustified contempt for the competition's products. When you run a race you must watch where you are going and look ahead to the goal. You don't try to run while looking over your shoulder to see who is gaining on you. The goal is to sell products and satisfy customer needs.

- **Trying to do it all yourself.** Not sharing information, not hiring enough people. CETI can afford to hire someone to assist Cravens.

- **Obsession with status.** A strong desire for approval from academic societies. Fantasies about the Nobel Prize. A business plan that depends upon complex contracts giving the inventor the inside track with large corporations, rather than selling to the customers who want the product today. I cannot understand why people think a dollar from General Electric is better than a dollar from you or me.

- **A control fetish.** A desire to have your cake and eat it too. Scientists want to control the way their customers use the product, which is none of their business. Ford does not tell you how to drive, Intel does not care what you compute or how many computer makers use their product.

- Here is a problem CETI does not have: an **obsession with a theory.** Customers want machines, not theories.

- **Finally, inexperience with business.** Scientists often try to build businesses the way they do experiments. They think business is a logical, predictable, step by step process. Here is how a scientist thinks you make a lot of money: You assemble a convoluted business mechanism held together with complex contracts and oh-so-clever patents. When every part is tested, calibrated, oiled, and smoothly running, you press a button and a giant bundle of money falls out: a million dollars. Plunk!

This is how an old fashioned businessman like me thinks you make money:

Scanned with OKEN Scanner

their hand. And they had a lackadaisical attitude. Cravens called the demonstration "fun and games" saying his real experiment was back at the lab.

There is more to this sad tale. I helped arrange for their cell to be tested in one of the finest laboratories in the country. First the trip was arranged, then CETI canceled. Then the trip was back on again and my friends at the lab went out and bought expensive new equipment for the tests. And then at the last minute CETI called them and canceled again! That's not all I did. At CETI's request I contacted some top science journalists about this story. At CETI's request I suggested they come to the conference. When one of them offered to send in a film crew, CETI got cold feet, changed their tune, and uninvited him. Their strategy appears to be based on the coitus interruptus school of public relations. This is crazy behavior. It looks suspicious.

So what is going on here? Well, when a smart guy like Patterson or Cravens does a stupid thing like this, there is always a reason: it's either love or politics. In this case, it's politics. CETI is courting a large U.S. corporation. They want to conclude a deal, and the big corporation does not want CETI talking to other people. The big corporation wants them to keep this technology secret. CETI and the corporation want to work together quietly, out of the limelight, off in the corner, developing better beads. They want to patent more peripheral technology, like the bead bed configuration. CETI told me they are working with their Strategic Development Corporate Partners in a carefully planned R&D program. They want to develop prototype consumer products in six months to a year. Then, I suppose, they hope to spring this marvelous fait accompli on the world, wrapped up in pink ribbon. That's the plan.

This big corporation put pressure on CETI, asking them to pull out of the trade show. CETI went ahead but at the same time they deliberately tried to avoid attracting attention. They told me they did not want to attract hoards of new customers. CETI says they want to, quote, "keep this R&D project manageable." They want only four or five corporations and universities to participate in the research at this stage. They say they want to maintain control over the development progress. They also tell me that they are pleased to see that cold fusion continues to languish in obscurity because that gives them more opportunities to develop the technology without competition. They see it as a chance to stake out a larger share of the future market.

Part of the Power-Gen '95 "Cold Fusion Gang": (L to R) Jim Reding (CEO of CETI), Dr. James Patterson, inventor of the Patterson Power Cell (and Jim Reding's grandfather); Jed Rothwell, *IE* Contributing Editor, Dr. Thomas Passell, head of EPRI's formerly robust, now moribund cold fusion program. Japan now funds SRI.

Scores of people would pay good money for those beads today. The people in this audience would, hundreds of people at that trade show would have. CETI could manufacture a liter of beads for $10 and sell it for $10,000. They could sell as many as they wanted. For months, I have been urging them to sell the beads. Sell them to anyone who wants. I say: don't worry about people stealing the ideas because the patent applications are filed. Get a positive cash flow. Line up paying customers who are wildly enthusiastic about your product. By golly, if I was in charge of CETI, I would have come to that trade show with hundreds of cells, ready to hand out.

A business starts out one sale at a time, one customer at a time. That's how Ford sold his first cars, and that's how Bill Gates sold his first software. Later on, after Gates developed credibility and a large customer base first, then he began cutting deals with IBM. Big companies seldom buy into new, radical, unproven technology.

These beads are an ideal product. The potential market for them is gigantic. They can be manufactured out for very little money, and sold at a premium. It's an ideal opportunity, like Intel selling microprocessors. Ideal business opportunities like this never last long. Someone else will come along and sell something as good as the beads, and that will be the end of CETI's chances. A better product might come along any day now! We know several scientists, like Piantelli and possibly Jim Griggs who are waiting in the wings with devices that might soon better than CETI's beads. If CETI started selling now, today, they could become established as market leaders. They could make a lot of money. They could plow the profits back into their technology, keep improving it, and stay in the running. They might stay ahead of the competition. Even if they don't survive they can make a lot of money for a while. Early in the microcomputer revolution, Zilog was the leading microprocessor manufacturer, and Digital Research outsold Microsoft. Those companies are long dead, but for a few hectic years they made a lot of money and if the owners were smart they got to keep most of it.

CETI told me yesterday that they are only willing to deal with companies that are willing to invest $20 to $30 million in production. I do not understand why. A smaller company could easily design a product and bootstrap up production. Companies like Hewlett Packard, Apple, Ford and Microsoft started out on a shoestring.

If you ask me – and nobody is asking me, especially not CETI – they should not worry so much about the competition, they should concentrate on the customers. They should not worry about shaping future market share when their present market share is zero. They should not try to shape, direct, and ride herd on the development of this technology. Nobody can do that. Nobody can

Scanned with OKEN Scanner

Build a great product. Sell it for a good price. Build a reputation for honesty and good service. Bingo, the orders roll in and in a few years you make a fortune. It's simple. Anyone could make a fortune with a product as good as CETI's cathodes. CETI may wake up to the opportunity and begin selling what they have now, as is. It is good enough! For the life of me, I cannot understand what is holding them back. When they finally do sell, within months they will ignite a world-wide burst of enthusiasm for cold fusion and they will start to make loads of money. It will be the biggest boom in business history. If CETI does not do it, someone else will ignite the revolution

Thank you.

POWER-GEN '95
TEST 1 DETAIL

INPUT
AC: 120 V * 0.7 A = 84 W
Electrolysis: 8 V * 0.18 A = 1.4 W

OUTPUT
Flow rate 1200 ml/minute
(300 ml/15 seconds)
Delta T Temperature 16 to 17 deg C
1200 ml * 16 deg C * 4.0 =
76,800 j/min = 1,280 W

HOW WE VERIFIED THE CALORIMETRY

INPUT POWER
Metex M 3800 series multimeters. Both electrolysis and AC were much less than excess power. Electrolysis power supply was Radio Shack Universal AC Adapters, maximum rated output: 5.5 watts.

FLOW
Stopwatch and graduated cylinder. 250 ml samples taken over 15 second intervals, repeatedly. Hey, it worked for Galileo.

TEMPERATURE
Carefully placed, redundant thermocouples, mixing ensured with Omega in-line mixers. Temperatures verified independently with 250 ml samples using two thermistors and a mercury thermometer. Delta T temperatures ranged from 6 to 17, which is extremely large for a flow calorimeter.

Sample results from four CETI demonstrations

Location	Date	Volts	Amps	Watts In	Flow	Delta T	Watts Out	Ratio
ICCF5	Apr. 10	3.8	0.12	0.45	10.11 ml	3.6	2.5	1:6
SOFE '95	Oct. 1	3.0	0.02	0.06	14.28 ml	4 - 5	4.8	1:79
PowerGen	Dec. 5	8.0	0.18	1.4	1300 ml	16 - 17	1280	1:914
PowerGen	Dec. 6	3.9	0.02	0.1	1000 ml	6.7	447	1:4470

"Do you try whenever possible to choose the simple rather than the complex solution? Business is a fairly simple activity. You identify a need, figure out how to fill it, manufacture your solution, and find the best way to sell your product at a profit. You then support your customers with reliable service consistent with the price you charge, make sure you collect your money, and pay your taxes on time. After that, you listen to your customers, and based on what they tell you and whatever else you figure out, you improve your product as fast as you can to stay ahead of your competition. All the other things, like strategic alliances, weird pricing and promotional schemes, and trying to create needs when they do not exist, introduce complexities that never help in the long run. I never found an occasion when the complex solution was better than the simple one."

- W.E. Pete Peterson,
Former Executive V.P.,
WordPerfect Corporation

Latest Patterson Patent Granted in U.S. #5,494,559

Patent Number: 5,494,559
Date of Patent: Feb. 27, 1996
SYSTEM FOR ELECTROLYSIS

Inventor: James A. Patterson, 2074 20th St., Sarasota, Fla. 34234
Appl. No. 488,609
Filed: Jun. 8, 1995

References Cited

U.S. PATENT DOCUMENT S

3,632,496	1/1972	Patterson	204/249
3,888,756	6/1975	Teshima et al.	204/275
4,269,689	5/1981	Agladze	204/268
4,316,786	2/1982	Yu et al	204/223
4,913,779	4/1990	Lacoste	204/1.11
4,943,355	7/1990	Patterson	205/51
5,036,031	7/1991	Patterson	502/10
5,318,675	6/1994	Patterson	204/86
5,372,688	12/1994	Patterson	204/222

Primary Examiner—Donald R. Valentine
Attorney, Agent, or Firm—Charles J. Prescott

ABSTRACT

An electrolytic cell and system for electrolysizing and/or heating a liquid electrolyte containing water having a con-ductive salt in solution flowing through the cell. The ele-trolytic cell includes a non-conductive housing having an inlet and an outlet and spaced apart first and second con-ductive foraminous grids connected within the housing. A plurality of cross linked polymer microspheres each having improved conductive exterior multi-layers of uniform thickness are positioned within the housing in electrical contact with the first grid adjacent the inlet. The conductive micro-spheres are plated first with a metal cation which will reduce with hydrazine to form a conductive metal flash coating. The microspheres are then plated with a uniform layer of nickel, followed by plated layer of metallic hydride which is readily combineable with hydrogen or an isotope of hydrogen, then a uniform metallic support plating having a high hydrogen diffusion rate and a low hydride formation ratio. An electric power source in the system is operably connected across the first and second grids whereby electrical current flows between the grids within the liquid electrolyte.

52 Claims, 2 Drawing Sheets

SYSTEM FOR ELECTROLYSIS

BACKGROUND OF THE INVENTION

1. Scope of Invention

This relates to electrolytic cells, and more particularly to an improved electrolytic cell for electrolysis of water and the production of heat.

2. Prior Art

The present invention utilizes and improves upon microspheres formed of non-metallic beads which are plated with a uniformly thick coating of palladium. These palladium coated microspheres are taught in my previous U.S. Pat. Nos. 4,943,355 and 5,036,031. In these above-recited previous patents, cross linked polymer microspheres having a plating of palladium are taught to exhibit improvements in the absorption of hydrogen and isotopes of hydrogen. Utilizing these catalytic microspheres led to my later U.S. Pat. Nos. 5,318,675('675) and 5,372,688('688) (incorporated herein by reference) which teach an electrolytic cell and system for, inter alia, producing heat

The use of a palladium sheet to form one electrode within an electrolytic cell to produce excess heat, the electrolytic cell

Continued on page 30

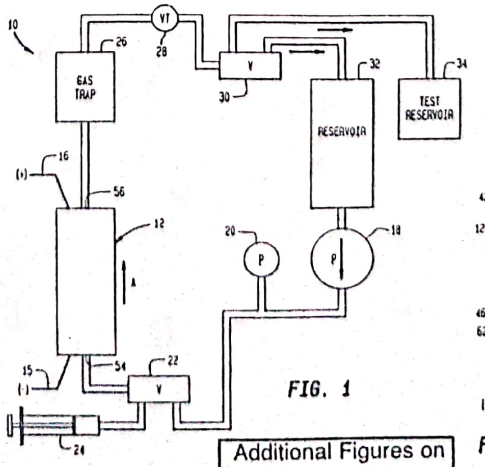


FIG. 1

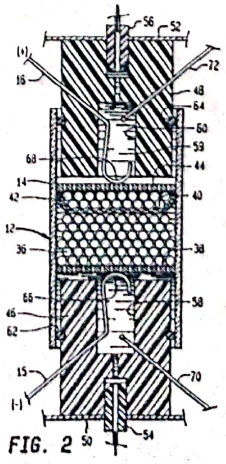


FIG. 2

Additional Figures on Page 55.

being a Pons-Fleischmann-type is taught by Edmund Storms.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

La Teroa

11 Mai 2002

Cu dl. Botoiu Dorin

si dl. dir. MEA C. Zamă

Fonetica (48 Hours)
Duplex
www.macmillaneducation.com
Graham/Lupey & NIC
UNDERHILL

DON'T DELAY

simply fill out the form and
return it to us via fax or mail.

Or

For immediate action visit our web site at

www.worldindrep.com

217112
294010

P.S.

Please pass along the extra subscription forms in the back of this issue to a colleague who is not receiving WORLD INDUSTRIAL REPORTER, but would benefit from their own free copy.

FOR FASTER SERVICE FAX TO

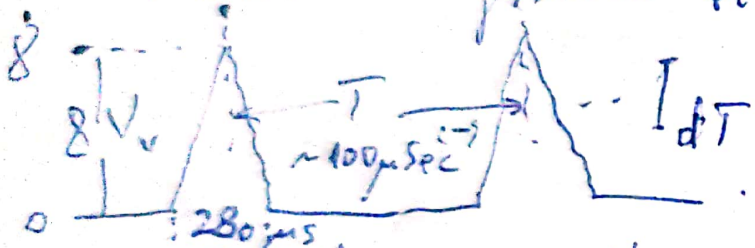
516-829-7265

Scanned with OKEN Scanner

23 V 2002 ℓ_{42} ϕ_{in} 18 12+12 spire Aparat măs. UNIGOR 6e GOERTZ ELECTR.

Măs. comparative pe tor OL ϕ41. si plastic (poliamid) ϕ40. ϕ_{ex} = 41 mm OL

cu ac. lungime si acelaşi ϕ_{int}



$U_{dif} = U_{st\,distant} - U_{st\,apropiat\,de\,DT}$

(1DT, 1ST si 1ST) cu 3BT miez OL = 154 mV (μV)

cu 4BT miez Poliamid 143 mV (μV)

120 la HAV si 40 mm

sp 12+12 plastic pe tub plastic ϕ45/36 ℓ=99

332 mV/1000 $\simeq + I_{DT}$ (sincronchiar)

---

* lim. cu ac. curent (deci ↓↑ pe laturi axiale)

BST_2 „lipit" de BDT_1

BDT_2 „lipit" de BST_1

BDT_1 serie cu (− BST_2) si măsor $U_{BST_1} + U_{BDT_2} \Rightarrow$ 11 mV

$U_{BST_1} = +17{,}8$ mV (fiz.)

$U_{BDT_2} = 3{,}2$ mV

$U_{BST_1} - U_{BDT_2} \rightarrow$ 3,8 mV

3,8 fiz. sincron!?

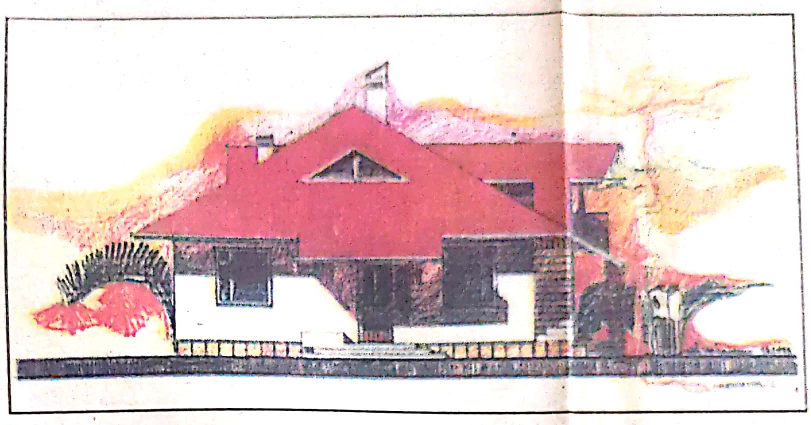
Arhitectul, un partener de dialog în lungul drum al casei către soare

arh. Nicolae MUNTEANU

Schimbările fundamentale din 1989 au trecut și peste noi, arhitecții. Dacă pînă atunci lucram mai mult închiși într-o "clădire mare", împreună cu colaboratorii noștri de alte profesii și unde puteam să aplicăm sau nu politica directivată cu mare grijă de vechii conducători, azi avem, în sfîrșit, aproape fiecare, biroul propriu de proiectare și cîte unul sau doi colaboratori apropiați.

Dar după cîtiva ani dureroși de tranziție, societatea care credeam că s-a întors pe făgașul ei ca direcție are încă foarte multe de rezolvat pînă să ne plasăm pe direcția corectă a dezvoltării.

Acest moment al adevărului, în care fiecare sîntem liberi să optăm, să decidem în ce ne privește - ca arhitecți - ne-a obligat la o severă reevaluare a sanselor.



Studiu de locuințe pentru oameni cu venituri modeste

Azi, arhitecții sînt mai izolați ca oricînd, dar sînt liberi. "Starea celui care nu este supus unui stăpîn" i-a debusolat pe unii dintre noi, iar alții au devenit robii propriilor ambiții.

Momentul 1989 a adus cu sine probleme serioase, de adaptare la noile condiții, care de multe ori sînt din ce în ce mai greu de rezolvat.

Beneficiarul dinainte, care era statul, azi aproape a dispărut; nu se mai fac blocuri de locuințe, nu se mai fac fabrici, dar se fac bănci, sedii de firme, spații comerciale și uneori case...

Pregătiți să proiectăm aproape orice (numai biserici n-am învățat să proiectăm în vechile școli de arhitectură), sîntem mereu în așteptarea unor clienți cu bani, care să ne solicite.

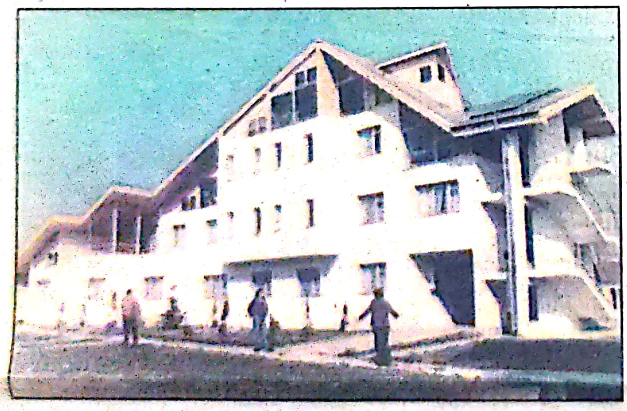
"Prinderea" unei lucrări mari a devenit o adevărată luptă în care se mai întîmplă să primim și lovituri "sub centură", uneori chiar de la confrați.

Obținerea avizelor de proiectare este o adevărată artă a echilibristicii pe muchia de cuțit! Durează luni în șir pînă le obținem, și nu neapărat pentru că proiectul n-ar corespunde "viziunii avizatorilor", ci pentru că interese obscure, conjuncturale, care nu țin de arta proiectării, blochează drumul spre execuția în teritoriu a unora dintre proiecte. Și tot aceleași interese obscure promovează, fără luni de așteptare, proiecte conjuncturale, care se fac foarte rapid și uneori fără avize (vezi "Piața Mc Donald's" din Iași, cu "șura americană", cum îi zic localnicii).

Arhitectul-șef al Iașului se plînge deseori în cel mai citit jurnal local că nu se mai fac azi case demne de urbea noastră.

Oare de ce?

Poate ar fi niște explicații care s-ar putea da, începînd chiar cu lipsa de cunoaștere suficientă a profesiunii de arhitect; la noi, și azi, în pragul mileniului III, arhitectul este confundat cu inginerul, neînțelegîndu-se că



Mini-hotel pentru canotori - Dorobanți

Vila "Matache" din Piatra Neamț

are fiecare
acest proce
actului de p
mereu împ
Între timp,
ce în ce ma
nu mai p
primească
clienții sînt
marea majo
să apeleze
cunoscute
arhitecți și
Întrebar
ar fi: arh
poate real
bani? Da

Citiți în numărul din mai

- Alianța Renault - Nissan
- Cele mai rapide mașini de serie
- Citroen Xantia

Scanned with OKEN Scanner

, cu "șura americană",
lnicii).
ef al Iașului se plînge
nai citit jurnal local că
c azi case demne de

niște explicații care
începînd chiar cu lipsa
suficientă a profesiunii
noi, și azi, în pragul
arhitectul este confun-
ul, neînțelegîndu-se că

lisei

are fiecare partea lui de rezolvat în acest proces, iar complementaritatea actului de proiectare ne obligă să fim mereu împreună și mereu diferiți. Între timp, proiectarea a devenit din ce în ce mai mult o afacere, arhitecții nu mai pot proiecta fără să-și primească onorariul cuvenit, iar clienții sînt astăzi foarte săraci și marea majoritate nu-și poate permite să apeleze la arhitecți (sînt cazuri cunoscute de clădiri făcute fără arhitecți și care au ieșit cum au ieșit).

Întrebarea imediată care s-ar pune ar fi: arhitectura valoroasă nu se poate realiza decît cu foarte mulți bani? Da și nu, dovadă sînt mărturiile de peste veac ale caselor românești valoroase și nici atunci nu eram prea bogați, dar eram poate mai demni.

"Săracii" de azi s-au grăbit să-și realizeze visurile de o viață, imediat după 1989, probabil de teama că nu vor ține mult noile legi; așa a apărut invazia de "case noi", înghesuite de-a lungul șoselelor din preajma orașelor; ele trădează o etalare a sărăciei de mijloace și mai ales de idei; apelarea doar la meșteri, lipsa cunoștințelor proprii ale clienților în domeniul de care discutăm și mai ales lipsa totală a dialogului cu arhitectul, acest specialist al frumosului.

Dialogul, iată care cred că e motivul principal al impasului în care sîntem azi; oamenilor care sînt dispuși să investească avutul lor de o viață în casa visurilor trebuie să li se răspundă cu încredere, fantezie creatoare și maximă competență; or, aceasta ne obligă să încercăm un dialog corect, fără emfază, despre unele din problemele locuirii (rolul luminii, al culorii, al materialelor de finisaj, al raportului dintre plin și gol, al modului cum se decupează pe cer acoperișul casei, etc.).

Arhitectul azi va trebui să fie și un fin psiholog, un om înzestrat cu răbdare, talent și cultură. Cît de pregătiți sîntem pentru un astfel de demers?

Dialogul cu arhitectul ar trebui să fie sincer și cît mai de amănunt, apoape ca la spovedanie, astfel încît orice arhitect, bun profesionist, să poată scrie o pagină și jumătate plină de observații pertinente despre clientul lui încă după primul contact - vizită în spațiul unde acesta din urmă locuiește.

Nu trebuie să uităm că și noi, românii, ne putem mîndri cu vîrfuri în arhitectură, care și-au arătat profesionalismul chiar în "epoca de aur"; cîteva lucrări de excepție ca Teatrul din Tîrgu Mureș, Spitalul Județean din Constanța, sediile administrative din Baia Mare și Botoșani, Casa de cultură din Suceava, cîteva hoteluri pe litoral și altele stau mărturie.

Îndemnul lui Jon Mincu "azi nu se vorbește decît de Școala Franceză sau Germană. Închin pentru arhitecții viitorului care ne vor vorbi despre Școala Românească", cum ar putea fi reactualizat? Pentru ce am putea închina azi într-o țară săracă în conducători capabili, dar nu și în inteligențe, artiști și resurse materiale?

Arhitectură timpului pe care-l trăim ar trebui să fie o reflectare a dialogului corect, constructiv și reciproc avantajos dintre noi. Nu arta compromisurilor, ci arta dialogului "să stea mărturie peste veac".

Supliment coordonat de
Valentin CIUCĂ

Scanned with OKEN Scanner

Critica de artă în actualitate

Constantin PRUT

În cei treizeci de ani care au trecut de la debutul meu în critica de artă, a trebuit să răspund de mai multe ori la întrebarea privitoare la statutul, modalitățile si eficiența criticii de artă în actualitate - în actualitatea în care mă surprindeau întrebările adresate de vreo revistă, de vreun post de televiziune, sau, oricum mi se întîmplă adeseori, de mine însumi. Privite din perspectiva vremii care a trecut, condiția criticului de artă și poziția exercițiului critic au suferit mutații semnificative, dar insistența cu care revine această interogație ne semnalizează faptul, deopotrivă curios și scandalos, că multe aspecte ale acestui domeniu al culturii umaniste continuă să se plaseze într-o zonă de insatisfacții, de așteptări.

Lucrul cel mai important care s-a produs în perioada postbelică, pînă în momentul în care generația mea culturală își făcea apariția pe scena artistică românească - sfîrșitul anilor '60 și începutul anilor '70 - era definitiva afirmare a unei critici de artă profesioniste, ilustrate, între alții, de personalități ca Eugen Schileru, Barbu Brezianu, Ion Frunzetti, Alexandru Busuioceanu, Petru Comarnescu, Dan Grigorescu, Anca Arghir, Dan Hăulică. Era o șansă unică pentru cei care ne începeam atunci activitatea să beneficiem de statura exemplară a unor astfel de modele, să ne folosim de metodologii și limbaje critice constituite și funcționînd în parametrii lor specifici. Ceea ce aveam de făcut era să ne construim, fiecare dintre noi, un program critic coerent, care să acopere acele așteptări la care ni se părea că avem dreptul, odată cu întreaga mișcare artistică. Aveam, au recunoscut-o de-a lungul anilor toți tinerii critici care s-au afirmat în această perioadă, de completat, de îmbogățit bibliografia de specialitate cu numeroase titluri, care corespund în fapt valorilor patrimoniale ce desemnează contribuția originală a artei românești la evoluțiile culturale europene și universale. Peste speranțele începutului de drum s-au depus, în straturi tot mai dense, tristețile neîmplinirilor personale, drama celor care au trebuit să aleagă calea exilului, care i-a dus în contexte culturale noi, durerea dispariției unor rare vocații, cum au fost Mihai Drișcu sau Theodor Redlow. Multe, cele mai multe dintre proiectele noastre nu s-au realizat și singura noastră certitudine de acum sînt acele speranțe care nu s-au golit de sens, realizările viitoare în care mai putem crede. În ciuda lentorilor istorice, a eroziunilor pe care le suportă organismul cultural al societății noastre, s-au produs o serie de contribuții teoretice - studii, eseuri, cronici publicate în reviste, atîtea cîte sînt și cîte acordă pagini fenomenului artistic și cultural, în cataloage de expoziții, în volume publicate sau care își așteaptă, încă, publicarea. Din cîte avem posibilitatea să vedem, în cronicizata noastră tranziție, se anunță noi talente, atît printre creatori, cît și printre cei ce se consacră exercițiului critic.

Multe dintre expresiile critice ce se manifestă în prezent - și pe care și le asumă deopotrivă teoreticieni și artiști - vizează lectura creației artistice fenomenale. O serie de expoziții, de simpozioane, de festivaluri culturale complexe valorifică critic, programatic producția artistică curentă sau, dintr-o perspectivă comparatistă, creația deceniilor postbelice. Mai alos tinerii critici s-au angajat în organizarea unor manifestări-dezbateri privitoare la probleme de mare actualitate, ca relațiile dintre avangardă și transavangardă, dintre modernitate și postmodernitate, dintre tradiție și formele de artă alternativă. Astfel de manifestări dezvoltă programe teoretice ce apar și în contextul general al proceselor de clarificare din arta lumii din ultima vreme (și Bienala de la Veneția, de pildă, a urmărit, în ultimele sale ediții, o structură tematică, referitoare la probleme ca relația dintre centru și periferie, aspectele nomadismului cultural etc.).

Strategiile recuperării și promovării

Alexandra TIT

Scanned with OKEN Scanner

...această interogație ne semnalizează faptul, deopotrivă curios și scandalos, că multe aspecte ale acestui domeniu al culturii umaniste continuă să se neticiem de statura exemplară a unor astfel de modele, să ne folosim de metodologii și limbaje critice constituite și funcționînd în parametrii lor specifici. Ceea ce tristețile neîmplinirilor personale, drama celor care au trebuit să aleagă calea exilului, care i-a dus în contexte culturale noi, durerea dispariției unor rare vocații, cum au ...Din cîte avem posibilitatea vedem, în cronicizata noastră trăiție, se anunță noi talente, printre creatori, cît și printre cei se consacră exercițiului cri...

Strategiile recuperării și promovării

Alexandra TITU

Lumea culturală românească a deceniului zece, deja pe sfîrșite, pare atinsă de schimbări radicale, ca mod de poziționare și motivare a actului artistic și, în consecință, a actului critic.

Peisajul artistic a părăsit, în mare măsură, aspectul unei prezențe, democratic diverse, urmărind spontaneitatea atelierului. El a pierdut și acel caracter duplicitar, care exprima opoziția latentă față de presiunile ideologiilor estetice derivate succesiv din proletcultismul de import al anilor '50 și față de cultul personalității din anii '80. În acel context, atelierul funcționa ca teritoriu al libertății, unde se consuma experimentul sau actul de credință față de instanțe intolerabile ideologic, cum au fost, cu autoritate, instantele sacralității. Si totuși, putem vorbi la acest nivel de anumite strategii, subtile, bazate pe principiile unui modernism neconsumat pînă la capăt în lumea est-europeană, în care politicul era ignorat cu tenacitate, orientarea spre problematica artei universale nu lăsa de fapt nici un echivoc asupra adevăratelor țeluri.

Critica a avut în deceniile sapte, opt și nouă un rol important în promovarea direcțiilor novatoare, ca și a artei cu o dimensiune profund culturală, conceptualistă, care recupera diversele niveluri ale tradiției. Revista ***"Arta"***, reviste cum au fost ***"Contemporanul"***, ***"România literară"***, multe reviste ale provinciei (dar putem numi provincia lumea culturală a Clujului, Timișoarei, Iașului?), ***"Secolul 20"*** au contribuit autoritar la menținerea unui climat deschis și în care valorile înnoirii și identificării se puteau reliefa, deveneau operante. O critică mizînd pe strategiile subtilității, la rîndul său, vehiculînd informația, o critică de climat, în dispută cu o critică denunțătoare, care vîna inovația pentru a o încrimina, de pe pozițiile lozincilor timpului. Lozinci operante într-un nivel anume, golite, de fapt, de conținut în spațiul culturii grave, reale. Portretistică de aparat și artă angajat postmodernistă ca expresie și referință marcau polaritățile unui cîmp cultural căruia presiunea ideologică îi trasa reperele clivajului, dar care în strategiile de opoziție dobîndesc, tocmai datorită acestei presiuni externe, o coerență de atitudine. Mari expoziții de sinteză și de promovare au marcat acești ani. Expozițiile la **Galeria Nouă (Artă și energie, Arta și Orașul, în anii '70), Scrierea 1970, Studiul I și II 1979, 1981, Vatra, Geometrie și sensibilitate (anii '80) Medium (anii '80)** sînt doar cîteva exemple. Critica de observație și comentariu și critica de politică curatorială se adaptau contextului constrîngerii ideologice, exploatau momentele de libertate, conjuncturile.

Relația culturală înaltă-cultură de masă marca - și ca un univers cultural în fond necesar, deschis spre amîndouă aceste realități, dar tensionate - încercarea puterii de a substitui culturii înalte, cu capacitățile-i mereu înnoite de rezistență, o cultură de masă dirijabilă, de complezență, cel puțin în aparență față de strategiile puterii. Sau măcar lipsită de autoritatea pretextului. Astfel, s-a creat o poziție mitică, poate exagerată, a elitismului, care dobîndea autoritate combativă, angajament, ieșit din marginalitatea sa căutată, definitorie, o marginalitate la limita de sus.

Anii '90 au impus ca mit și motivație strategică, ca reper fundamental al contextualizării faptului cultural **libertatea**. Brusc, lumea culturală a devenit divergentă, mobilul comun dispărînd, după o primă etapă de jubilație și de critică politică retrospectivă la adresa vechii presiuni. S-au conturat marile strategii culturale, divizînd pînă la conflict teoretic universul artistic. Pe de-o parte tendințele sincroniste, beneficiind de generosul sprijin al unor fundații ca CSAC, au formulat ca strategii de implementare a unor comportamente artistice, care necesită un instrumentar tehnologic, și o contextualizare de altă natură decît artele tradiționale. Festivalurile **Intermediale** (Timișoara, Sf. Ana, Iași, Oradea, Arad), expozițiile dedicate de **CSAC** artei video, instalației video, artei digitale, formarea unor centre informaționale cu bibliografie în materie contribuie la consistența acestui fenomen, care-și caută dincolo de eforturile adecvării mediatice o originalitate de conținut, de cîmp refren, de tonalitate, de mod de structurare a discursului. Pe de altă parte, definirea unui facies specific, bazată pe explorarea tradițiilor celor mai vechi, și mai ales celor mai constante, dincolo de succesivele tentative de integrare occidentală care au marcat secolele XIX și XX, se impun, ca un pol de opoziție, iar opoziția ia de multe ori (mijlocul anilor '90 este marcat chiar de vehemente dispute de presă) forme de conflict. Firesc, acest cîmp al unei autohtonii și al unui spiritualism cu funcție identificatoare, gravitează în jurul nucleului neortodox (promovat destul de consecvent de **Galeria Catacomba** condusă de Sorin Dumitrescu) și a reconsiderării și recontextualizării culturii populare rurale (promovate de **Muzeul Țăranului Român**).

Secția de artă contemporană a **Muzeului Naționale de Artă** și **Galeria GAD** (condusă de Ruxandra Balaci), secțiile de artă contemporană ale muzeelor din Timișoara, Arad (conduse de Ileana Pintilie și Judit Angliel), festivaluri, expoziții cu concept exprimînd noile tendințe susțin arta ce se angajează spre universalism, spre actualitate, spre originalitatea ca o adecvare la timpul și epocă, în timp ce arta promovată de mediile neotradiționalist-conceptualiste vizează o originalitate spațială, cu argumentări istorice identificatoare și, mai cu seamă, transistorice. Actul critic se impune tot mai mult ca un act curatorial sau ca un angajament vehement în favoarea uneia sau alteia dintre strategii. Căci viața culturală actuală este, declarat, o viață a strategiilor afirmate, susținute și coerente.

Desigur, acestei critici de politică culturală angajată îi lipsește un suport indispensabil - suportul unei reviste de artă cu existență constantă și consistență, cu echidistanță față de cele două mari trasee care construiesc, în fond, un climat și o realitate culturală din care nici una dintre strategii și obiective nu poate lipsi. Dar dezbaterea se produce, găzduită de alte reviste sau exprimată prin manifestări culturale. Ceea ce îi lipsește este mai ales impactul public.

Există, în tot acest context, și un demers la fel de important ca acela al inducției de comportament artistic. Este direcția recuperatoare în care acel critic se bazează pe cercetarea istorică. Un întreg patrimoniu recent, patrimoniul "perfectului simplu", trebuie să fie pus în circulație, cu atît mai mult cu cît el a fost tolerat, dar prea puțin mediatizat în deceniile precedente. Expozițiile de care m-am ocupat în angajamentele critice (**Experiment - artă românească după anii '60**, 1997, **Filocalia**, 1990, **Sacrul în artă** 1997) sînt cîteva dintre aceste tentative.

Cel puțin una dintre ele (**Experiment**) a fost însoțită de un catalog, un volum de critică, cu ambiția modestă de a suplini temporar instrumentul de abordare a artei contemporane românești experimentale.

Acest volum se alătură eforturilor unor critici ca Octavian Barbasa, Constantin Prut, care încearcă tocmai realizarea acestor instrumente, fără de care o cultură își construiește prezența pe un soclu de vacuum, supusă efemerității și, pînă la urmă, ignorării.

Scanned with OKEN Scanner

omovării

de Sorin Dumitrescu) și a reconsid-
și recontextualizării culturii populare
e (promovate de **Muzeul Țăranului**
ân).
ctia de artă contemporană a **Muzeului**
onale de Artă și **Galeria GAD** (con-
de Ruxandra Balaci), secțiile de artă
mporană ale muzeelor din Timișoara,
(conduse de Ileana Pintilie și Judit
el), festivaluri, expoziții cu concept
mînd noile tendințe susțin arta ce se
ează spre universalism, spre actuali-
spre originalitatea ca o adecvare la
la epocă, în timp ce arta promovată de
ile neotraditionalist-conceptualiste
ză o originalitate spațială, cu argu-
ri istorice identificatoare și, mai cu
, transistorice. Actul critic se impune
i mult ca un act curatorial sau ca un
ment vehement în favoarea uneia sau
dintre strategii. Căci viața culturală
ă este, declarat, o viață a strategiilor
te, susținute și coerente.
igur, acestei critici de politică cultur-
gajată îi lipsește un suport indispens-
suportul unei reviste de artă cu exis-
constantă și consistență, cu echidis-
ața de cele două mari trăsee care con-
c, în fond, un climat și o realitate
lă din care nici una dintre strategii și
ve nu poate lipsi. Dar dezbaterea se
e, găzduită de alte reviste sau expri-
rin manifestări culturale. Ceea ce îi
e este mai ales impactul public.
stă, în tot acest context, și un demers
le important ca acela al inducției de
rtament artistic. Este direcția recu-
re în care acel critic se bazează pe
rea istorică. Un întreg patrimoniu
patrimoniul "perfectului simplu",
să fie pus în circulație, cu atît mai
cît el a fost tolerat, dar prea puțin
izat în deceniile precedente. Expo-
le care m-am ocupat în angajamen-
itice (**Experiment - artă română
după anii '60**, 1997, **Filocalia,
acrul în artă** 1997) sînt cîteva din-
te tentative.
puțin una dintre ele (**Experiment**) a
sotită de un catalog, un volum de
cu ambiția modestă de a suplini
ar instrumentul de abordare a artei
porane românești experimentale.
t volum se alătură eforturilor unor
ca Octavian Barbasa, Constantin
re încearcă tocmai realizarea aces-
rumente, fără de care o cultură își
ieste prezența pe un soclu de vacu-
pusă efemerității și, pînă la urmă,
i.

Dan Hatmanu

Criticul din noi

Mihai PAMFIL

Înainte de a fi fost (și de a fi) CRITICUL CETĂȚII - în ipostază colectivă și, mai recent, și individuală - fost-a (și fi-va) CRITICUL DIN NOI, adică cenzorul erorilor și prostiilor pe care le strecurăm continuu în sosul narcisist al creației - justificarea și pierderea noastră.

Fără micul tiran din noi, iubitor de geometrie euclidiană, gînguritul și bolboroselile noastre nu ar lua niciodată chipul explicit al unui sonet, al unui tablou, al unui opus muzical. Precipitatul artistic se naște doar în pînda severă și tenace a ochiului critic.

Atitudinea critică eficace presupune gust. Cultura întîmplătoare, croită pe lipsa de gust, nu servește spiritului critic. Iar în absența acestuia, peisajul nostru lăuntric este invadat de un sirop onctuos, de culoare roz. De nu este cumva devastat de deșeurile colectate fără discernămînt de pe Internet și din puzderia de reviste, zise de artă, prezente pe piață. Criticul din noi nu este un personaj infailibil. Preaomenestile noastre slăbiciuni sînt, de cele mai multe ori, și slăbiciunile lui. De regulă, într-un mediu cultural lax, el devine concesiv pînă la autonegare. Uneori, ce-i drept, mai rar, același mediu îl poate întărîta. Aceasta ar fi explicația faptului că în dulcele tîrg al leșilor, în atmosfera de rozâ ebrietate a acestui oraș, au putut apărea totuși cîțiva artiști mari (Nicolae Tonitza, Corneliu Baba, Adrian Podoleanu etc.).

Scanned with OKEN Scanner

leur généralité, d'être très sommairement décrites, n'ont pas, pour l'instant, fait l'objet de réalisations pratiques. Il serait surprenant, cependant, que le résultat n'en fût pas positif.

S'il existait des laboratoires où de telles expériences auraient été faites et gardées secrètes, disons à leur encontre qu'il ne peut y avoir de secret pour une découverte aussi simple et objective et qu'elle se devait d'être largement et rapidement diffusée. La connaissance doit être mise à la disposition du plus grand nombre, et si elle ne l'était pas, elle ne pourrait avoir aucune valeur.

Nous avons vu qu'une onde électromagnétique transverse est toujours accompagnée d'un champ de gravitation dont les effets sont très faibles et probablement très difficilement mesurables. Ces effets sont masqués, d'une part, par une densité d'énergie diffuse ρ, sans doute considérable, et par l'importance prépondérante des actions électromagnétiques associées, d'autre part. Il est donc difficile de mettre en œuvre un mode de propulsion électrogravitationnel qui utiliserait des ondes électromagnétiques, car il faudrait faire appel, avec un rendement médiocre, à des énergies prohibitives.

Le calcul montre en effet, dans tous les cas, que la poussée obtenue, $P = \frac{1}{c}\frac{\partial W}{\partial t}$, est proportionnelle à l'énergie éjectée par unité de temps et inversement proportionnelle à la vitesse d'éjection. Cette dernière étant égale à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques, la poussée est réduite à son minimum pour une même énergie utilisée.

Afin d'obtenir une poussée de un kilo, par exemple, il faudrait éjecter, sous forme d'ondes électromagnétiques, une énergie de 3000 Mégajoules par seconde; soit une puissance de 3000 Mégawatts.

Nous pouvons en déduire que tout espoir de mettre en œuvre un moyen de propulsion économique, utilisant la Gravitation, suppose, au préalable, la découverte d'une possibilité d'action directe sur la répartition de la densité d'énergie diffuse ρ, sans qu'il y ait émission d'ondes électromagnétiques.

La découverte d'une telle possibilité ne peut, à notre avis, que résulter d'une connaissance plus approfondie des propriétés de la matière, compte tenu des éléments nouveaux que révèle la théorie développée qui repose sur l'existence de milieux énergétiques diffus.

Scanned with OKEN Scanner

composantes : $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D} + \boldsymbol{d}$ et $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} + \boldsymbol{b}$. L'intégrale de milieu s'écrit alors :

$$\overline{\iiint_{\tau_0} (\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{B}_0) \cdot d\tau} = \overline{\iiint_{\tau_0} [(\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}) + (\mathbf{D} \wedge \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{d} \wedge \mathbf{B}) + (\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{b})] \cdot d\tau} = 0,$$

soit :

$$\iiint_{\tau_0} (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\tau + \iiint_{\tau_0} (\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{b}) \cdot d\tau = \iiint_{\tau_0} [(\boldsymbol{b} \wedge \mathbf{D}) + (\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{d})] \cdot d\tau.$$

Nous constatons que la somme vectorielle des quantités de mouvement, relatives à chacun des deux milieux considérés séparément, n'est pas égale à la quantité de mouvement globale du milieu constitué par l'ensemble des deux réunis.

Il est remarquable de constater que les milieux inter-agissent entre eux, en chaque point de l'espace, proportionnellement aux inductions électromagnétiques qui peuvent leur être respectivement associées.

Considérons la région τ où les valeurs de $\boldsymbol{d}$ et $\boldsymbol{b}$ restent négligeables devant celles de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$, et choisissons, par contre, le volume τ_0 d'intégration suffisamment vaste pour pouvoir définir un référentiel $\mathcal{R}_0$ fixe, contenant en particulier l'observateur et le système d'observation. L'application des transformations de Lorentz nous permet, dans ce cas, de calculer simplement et avec une bonne approximation, la quantité de mouvement du milieu défini dans le volume τ, lui-même inclus dans τ_0, lorsque ce milieu τ est à inertie stationnaire et se trouve animé d'une vitesse de déplacement uniforme $\boldsymbol{v}$ par rapport au référentiel isotrope $\mathcal{R}_0$.

Il paraît légitime que le milieu en déplacement, qui est défini de façon restrictive dans le volume τ, soit pratiquement un milieu à inertie stationnaire. Cela s'exprime statistiquement en annulant la quantité de mouvement ramenée au référentiel $\mathcal{R}$:

$$\overline{\iiint_{\tau(\mathcal{R})} (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\tau} = 0.$$

2

MASSE D'INERTIE D'UN MILIEU ÉNERGÉTIQUE

Considérons un espace où l'énergie qui se manifeste est supposée pouvoir être traduite, en chaque point, sous forme électromagnétique. Nous allons admettre, comme nous l'avons déjà indiqué, qu'il est possible de définir, à tout instant et en tout point, une densité de quantité de mouvement $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \tau}$, telle que :

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \tau} = \mathbf{D} \wedge \mathbf{B}.$$

La quantité de mouvement globale, que nous pouvons associer à un volume τ défini dans le référentiel $\mathcal{R}$, est obtenue en calculant d'intégrale :

$$\iiint_{\tau} (\mathbf{D} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\tau = \mathbf{P}.$$

S'il existe un référentiel $\mathcal{R}_0$ associé au volume fixe τ_0, dans lequel l'énergie est stationnaire, nous pouvons écrire :

$$\overline{\iiint_{\tau_0} (\mathbf{D}_0 \wedge \mathbf{B}_0) \cdot d\tau} = 0.$$

Nous attacherons systématiquement à cette égalité l'hypothèse que le volume fixe τ_0, associé au référentiel $\mathcal{R}_0$, définit, dans ces conditions, un milieu isotrope pour la propagation des ondes électromagnétiques.

Imaginons, suivant les hypothèses et définitions posées, une décomposition des inductions électromagnétiques selon deux

et S,

$$\boxed{S = \frac{q}{\varepsilon_0 \mathcal{E}_d}}$$

Si l est la largeur du condensateur microscopique associé au photon, nous savons que l'impédance caractéristique z_c du guide d'onde correspondant est approximativement égale à :

$$\frac{d}{l} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = k_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \qquad (\S\ 4,\ p.\ 32)$$

En tenant compte de la valeur de h, $h = 8\pi k_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot q^2$, nous pouvons calculer $l = \frac{d}{k_0} = \frac{hc}{k_0 q \mathcal{E}_d} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{8\pi q}{\varepsilon_0 \mathcal{E}_d} \cdot \frac{1}{\lambda}$, d'où :

$$l = \frac{8\pi q}{\varepsilon_0 \mathcal{E}_d} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Finalement nous trouvons, parallèlement à la direction de propagation pour $L = \frac{S}{l}$ longueur approximative présumée du condensateur associé, la valeur : $L = \frac{\lambda}{8\pi}$ (valeur moyenne).

Il est entendu que ces résultats ne doivent pas être regardés comme des valeurs exactes, mais comme des ordres de grandeur très approximatifs, pour de faibles fréquences et dans les limites des hypothèses faites. Nous constatons alors, dans ce cas, que la distance d et la largeur l devraient varier d'une façon sensiblement proportionnelle à la fréquence ν; c'est-à-dire, inversement proprotionnelle à la longueur d'onde λ. La longueur moyenne L semble, pour sa part, rester très approximativement proportionnelle à λ dans un rapport égal à $\frac{1}{8\pi}$.

L'expérience montre, cependant, que si l'augmentation de fréquence reste proportionnelle à l'accroissement global d'énergie, cette dernière se concentre de plus en plus et sa densité croît au fur et à mesure que l'on se rapproche des zones divergentes. Cet accroissement de densité s'accompagne nécessairement d'une augmentation de la permittivité ε_0 dans les régions à haute concen-

Scanned with OKEN Scanner

au moment de l'émission, laquelle se fait en suivant la loi de matérialisation énoncée au paragraphe 3 précédent.

Dans le domaine des énergies du rayonnement X, J. J. Thomson avait constaté que le coefficient de diffusion σ conservait une valeur constante jusqu'à environ 0,1 Å (123 keV) [13].

— Pour des rayons γ de grande énergie ce coefficient décroît, par contre, avec l'augmentation de la fréquence et Compton fut conduit, pour rendre compte de cette décroissance, à proposer comme expression : $\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 + 2\alpha}$; expression dans laquelle α est égal à $\frac{h \cdot \nu}{w_0}$, w_0 représentant l'énergie propre de l'électron au repos. En introduisant l'interprétation relativiste de Dirac, Klein et Nishina ont calculé une expression plus générale impliquant également une valeur qui décroît lorsque la fréquence augmente [13].

Si l'on admet, ce qui semble parfaitement vraisemblable, que ce coefficient de diffusion doit se trouver presque linéairement lié aux dimensions des zones divergentes, nous disposons alors d'un moyen qui va nous permettre d'évaluer l'ordre de grandeur des distances qui peuvent séparer les couches disruptives $+ q$ et $- q$ constituant le photon, à l'endroit où l'énergie $h\nu$ est à son maximum de concentration.

Pour des fréquences très faibles, l'énergie doit être, dans son ensemble, plus largement répartie et la permittivité ε_0 voisine de sa limite ε dans le vide de matière. Le photon peut être pratiquement assimilé à un condensateur plan de capacité C_0 dont les armatures, de surface S, correspondent aux couches disruptives et sont distantes de d. Nous pouvons écrire dans ces conditions : $h \cdot \nu = \frac{q^2}{C_0}$, ainsi que l'expression correspondante de la capacité C_0 :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d} = \frac{q^2}{h \cdot \nu}.$$

Sachant que l'énergie $h \cdot \nu$ est aussi égale à $\varepsilon_0 \mathcal{E}_d^2 \Delta\tau = \varepsilon_0 \mathcal{E}_d^2 S \cdot d$, nous pouvons calculer d :

$$\boxed{d = \frac{h \cdot \nu}{q\mathcal{E}_d} = \frac{hc}{q\mathcal{E}_d} \cdot \frac{1}{\lambda}}$$

nous a permis, en partant des équations de Maxwell, de démontrer la loi d'équivalence de la masse, matérielle ou non, et de l'énergie, $w = mc^2$. De la même manière nous allons pouvoir expliquer la Gravitation et en démontrer l'origine électromagnétique, sans faire appel à la géométrie compliquée d'un espace-temps à quatre dimensions dont l'hypothèse, à l'instar des principes Relativistes, ne semble plus ni utile, ni souhaitable.

Scanned with OKEN Scanner

nous a permis, en partant des équations de Maxwell, de démontrer la loi d'équivalence de la masse, matérielle ou non, et de l'énergie, $w = mc^2$. De la même manière nous allons pouvoir expliquer la Gravitation et en démontrer l'origine électromagnétique, sans faire appel à la géométrie compliquée d'un espace-temps à quatre dimensions dont l'hypothèse, à l'instar des principes Relativistes, ne semble plus ni utile, ni souhaitable.

Scanned with OKEN Scanner

nous a permis, en partant des équations de Maxwell, de démontrer la loi d'équivalence de la masse, matérielle ou non, et de l'énergie, $w = mc^2$. De la même manière nous allons pouvoir expliquer la Gravitation et en démontrer l'origine électromagnétique, sans faire appel à la géométrie compliquée d'un espace-temps à quatre dimensions dont l'hypothèse, à l'instar des principes Relativistes, ne semble plus ni utile, ni souhaitable.

Scanned with OKEN Scanner

9

LA GRAVITATION ET LE RAYONNEMENT COSMIQUE TROUVENT UNE ORIGINE COMMUNE DANS L'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE DIFFUSE

Il nous paraît intéressant de montrer comment le rayonnement cosmique diffus, le comportement surprenant des neutrinos ainsi que l'existence des forces de gravitation, peuvent trouver une explication satisfaisante dans le cadre de l'hypothèse des milieux énergétiques et de la loi de matérialisation.

Nous avons vu (§ 2) que la relation d'équivalence de la masse et de l'énergie avait été établie, assez paradoxalement, comme une loi plus absolue que relativiste, par la Relativité restreinte, parce que cette théorie ne pouvait envisager, sans aller à l'encontre de son principe même, d'appliquer les transformations de Lorentz-Maxwell à des milieux homogènes où $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ peut être une vitesse différente de la limite c considérée, *a priori*, comme une constante universelle.

Nous avons montré, en effet, que les lois de l'électromagnétisme nous conduisent à admettre, pour l'énergie de masse disponible, une valeur qui dépend de la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu considéré, $w_0 = m_0 v_0^2 < m_0 c^2$. Cette inégalité montre clairement que l'énergie de masse augmente lorsque la densité moyenne d'énergie matière s'amenuise, ou, ce qui revient au même, lorsque des déplacements s'effectuent vers des régions où la densité de matière est plus faible. Cela se produit, en particulier, lorsqu'on s'éloigne des corps matériels qui représentent une gigantesque concentration d'énergie. La différence des carrés des vitesses de propagation peut être alors considérée comme l'équivalent d'une différence de potentiel

Scanned with OKEN Scanner

lération de gravitation ayant pour expression; $\gamma = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$.

Nous avons dit, en effet, (§ 6, p. 62) que l'induction, $\mathbf{B} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$, semble correspondre, en réalité, à un champ magnétique qui résulte de la superposition du champ d'excitation H et des champs dûs aux spins des atomes orientés sous l'action de H.

Dans un barreau de ferrite, l'accélération de gravitation doit donc pouvoir prendre la valeur, $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = \frac{\mu_r}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$, où μ_r représente la perméabilité relative du ferrite par rapport au vide de matière. Il peut être alors procédé à une expérience utilisant un équipage suspendu à un fil de torsion, par exemple, (fig. 16) dont le bras horizontal supporte, à ses extrémités, deux barreaux de ferrite polarisés en sens inverse. Ces barreaux peuvent, dans leurs déplacements, passer entre les armatures de deux condensateurs.

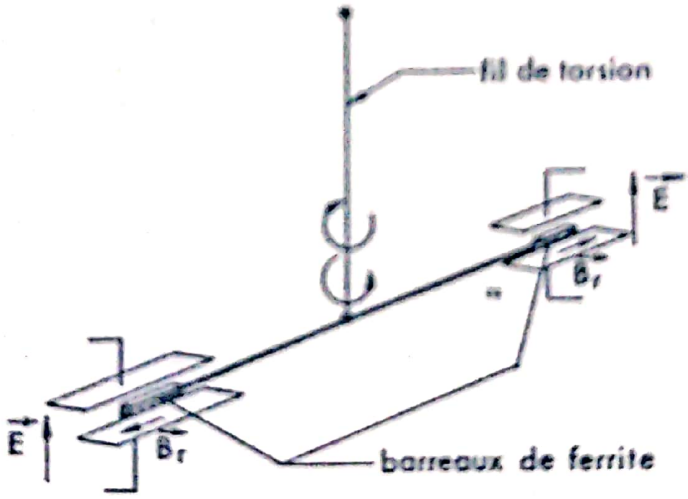


FIG. 16. — *A chaque passage entre les plateaux des condensateurs, l'inversion du champ électrique fournit aux barreaux de ferrite, A et B, des impulsions de gravitation qui doivent produire des oscillations du pendule de torsion constitué par l'équipage suspendu.*

En inversant le champ électrique à chaque passage des barreaux de ferrite entre les armatures des condensateurs, il doit être possible, par l'intermédiaire des impulsions de gravitation qui en résultent, de communiquer des oscillations entretenues à l'équipage suspendu par le fil de torsion.

Il importe de préciser que les expériences qui viennent, dans

Scanned with OKEN Scanner

SITUAȚIA ȘCOLARĂ ȘI ACTIVITATEA PROFESIONALĂ:

PERIOADA		Școli urmate; instituții și întreprinderile unde a lucrat și localitatea	Funcția	Funcția avută	Domiciliul avut în perioada respectivă (localitatea, strada, nr.)
de la data	până la data				
1952	1955	Liceul	elevă	-	IAȘI Str. Stejar 44
1955	1960	Facultatea de Chimie Industrială	studentă	-	IAȘI str. Sf. Atanasie 17
1960	1967	Combinatul de Fibre Sint. Săvinești	inginer	șef laborator	P. Neamț str. Bicazului 33
1967	1983	Combinatul de Fibre Sint. IAȘI	inginer	cercetător	IAȘI str. Sf. Atanasie 17

RUDE ÎN ȚARĂ: (părinți, frați, surori, socri și cumnați)

Numele și prenumele	Gradul de rudenie și dacă e căsătorit	Data, și locul nașterii (ziua, luna, anul)	Funcția ce o ocupă și întreprinderea sau instituția unde lucrează. Pentru pensionari funcția avută și ultimul loc de muncă	Apart. politică	Dacă a cerut să plece definitiv din R.S.R. (țara și data)	Domiciliul actual (localitatea, strada, nr.)
CANTĂR FILIP	tată	8 Oct 1909 Recea URSS	profesor pensionar Fac. Agronomie.	PCR	NU	IAȘI str. Sf. Atanasie 17
CANTĂR PARASCHIVA	mamă	14 Oct 1909 Chișinău URSS	fost casnică - decedată 1983	F.P.	NU	—
DRAGOMIRESCU GALINA	soră căsătorită	28 IAN 1941 Chișinău	profesoară Liceul Nr. 6 IAȘI	PCR	NU	IAȘI str. Pușkin Nr. 22
DRAGOMIRESCU NICOLAE	cumnat	10 Martie 1941 Tg. MUREȘ	profesor Liceu Racoviță IAȘI	PCR	NU	— " —
RAȘCA Elena (soră soț)	cumnată	12 Martie 1939 Tg. Mureș	asistentă medic. Tg. Mureș	PCR	NU	Tg. MUREȘ - Orizontului 36
RAȘCA Emil	cumnat	15 Dec. 1936 Archiud	prof. inspector Tg. Mureș	PCR	NU	— " —

RUDE DOMICILIATE ÎN STRĂINĂTATE:

Numele și prenumele	Gradul de rudenie	Data și locul nașterii (ziua, luna, anul)	Data plecării din țară	Cum a plecat: temporar, definitiv ilegal, fraudulos	Funcția avută și întreprinderea sau instituția unde a lucrat până la plecarea din țară	Domiciliul actual (țara, localitatea)
CANTAR EFIM	UNCHI	RECEA URSS	—	NU a plecat	-	Recea RSS Moldovenească
CANȚĂR LAVRINTI	UNCHI	RECEA URSS	—	Nu a plecat		Recea RSS Moldov.
GONCEARENCO EVDOCHIA	Mătușă	Chișinău URSS	—	Nu a plecat		Bender RSS Moldov.

CĂLĂTORII EFECTUATE ÎN STRĂINĂTATE: în interes de serviciu (anul și țara) 1970 - RFG

În scop personal (anul și țara) 1969 Ungaria și Jugoslavia, 1979 în RDG, 1981 R.P. Polonia

Îmi asum răspunderea pentru datele pe care le-am completat

Semnătura M. Vlad

Data completării 7 IAN 1984

Verificat datele completate

Semnătura și ștampila

Observații: În cazul că spațiul nu ajunge la unele rubrici, se vor completa datele necesare aparte.

Cd. 254/1980 — V 17 — I-p 022

Scanned with OKEN Scanner

Domnului director MEA al CFS Terom, Ian
ing. C. Zamă

Despre legea fluxului magnetic in regim nestationar .
Ing. Nic.N. Vlad

Putem sa urmarim un experiment virtual in care vom masura suma tensiunilor electromotoaare induse in circuitele electrice filiforme care se suprapun pe muchiile unui corp poliedric care cuprinde sursele-cauza a campului magnetic variabil in timp.

Pentru cazul in care suprafata corpului este aceea a unui cub,daca vom alege sensul pozitiv al campului mgnetic pe acela de iesire spre exteriorul corpului prin fata plana respectiva,va rezulta sensul pozitiv antiorar pentru tensiunea electromotoare indusa in circuitul electric inchis suprapus pe cele patru muchii drepte ce iconjoara fata respectiva a cubului, atunci cand alegem regula de asociere pe aceea a burghiului drept; dupa aceasta regula de asociere ,tensiunea electromotoare indusa este proportionala cu viteza de scadere in timp a fluxului magnetic prin suprafata inconjurata de conturul circuitului indus.Avem deci pe cub sase suprafete plane ,fiecare fiind cuprinsa de cate un circuit electric compus din cate patru laturi asezte pe muchiile fetei respective astfel ca pe fiecare muchie sunt asezate cate doua fire conductoare izolate si subtiri ,cu sectiunea neglijabila fata de lungimea laturii cubului

Este usor de obseervat ca fiecare muchie a cubului este comuna pentru dou fete plane adiacente ,dar are doua sensuri pozitive de parcurgere in opozitie la efectuarea sumei celor 6(sase) tensiuni electromotoare induse in cele sase circuite electrice stfel ca rezultatul sumei este identic nul .deoarece contributia fiecarei perechi de conductoare de pe fiecare muchie este nula.

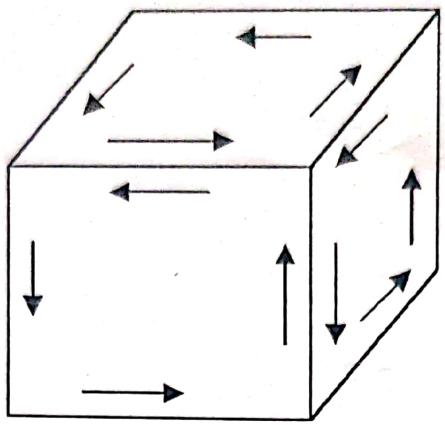
O interpretare posibila este aceea ca prin experimentul virtual de mai sus , se demonstreaza faptul ca variatia in timp a fluxului magnetic printr-o suprafata inchisa este identic nula.

Cu alte cuvinte ,legea variatiei identic nule a fluxului magnetic printr-o suprafata inchisa este o consecinta topologica a legii inductiei electromagnetice.

In figura de mai jos este schitat un cub pe care sunt indicate sensurile pozitive de parcurgere circuitelor asezate pe fetele vizibile in desen.

Iasi, mai, 2002 , Nic.N. Vlad

Scanned with OKEN Scanner



Expeditor ing. Nic. N. Vlad
Str. Sf Atanasie 17. Iași

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Аннотации статей, депонированных в ВИНИТИ

Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская область, г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403, Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, УСЦ.

• Рег. № 2664-80 Деп. УДК 530.12:531.18:537.8

СИСТЕМА уравнений для аксиального (скалярного) и радиального (векторного) магнитных полей движущегося заряда. V. НИКОЛАЕВ Г.В.

Векторный м.п. $\mathbf{H}_\perp$ и скалярный м.п. $H_\parallel$ для $\mathbf{H}_\perp = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, $H_\parallel = -\mathrm{div}\,\mathbf{A}$ предлагается система уравнений: $\mathrm{div}\,\mathbf{H}_\perp = 0$; $\mathrm{rot}\,\mathbf{H}_\perp = (4\pi/c)(\mathbf{j}_{см} - \mathbf{j}^n_{см})$; $-\mathrm{grad}\,H_\parallel = (4\pi/c)\mathbf{j}_{см}$, которая имеет непосредственное решение через токи смещения $\mathbf{j}_{см}$ либо сводится к уравнению Пуассона и к тривиальному его решению через токи смещения $\mathbf{j}^n_{см}$, формально эквивалентных токам переноса. Для случая бесконечных линейных и замкнутых токов найденная система уравнений вырождается в известную систему уравнений Максвелла для одного векторного магн. поля $\mathbf{H}_\perp$.

• Рег. № 2665-80 Деп. УДК 530.12:531.18:537:8

Системы уравнений для вихревых электрических полей равномерно и ускоренно движущегося заряда. VI. НИКОЛАЕВ Г.В. Основываясь на допущении существования двух типов магн. п. $\mathbf{H}_\perp$, $H_\parallel$ движущегося заряда, устанавливаются системы диф. уравнений для вихревых электрических полей $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_0$ равномерно и ускоренно (заряда) движущихся зарядов в виде: $\tilde{E}_1 = (1/c)(\mathbf{V}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{A}$; $\mathrm{rot}\,\tilde{E}_1 = -(1/c)(\mathbf{V}\cdot\mathrm{grad})\mathbf{H}_\perp$; $\mathrm{div}\,\tilde{E}_1 = (1/c)(\mathbf{V}\mathrm{grad})H_\parallel$ и $\tilde{E}_0 = -(1/c)(\partial\mathbf{A}/\partial t)$; $\mathrm{rot}\,\tilde{E}_0 = -(1/c)(\partial\mathbf{H}_\perp/\partial t)$; $\mathrm{div}\,\tilde{E}_0 = (1/c)(\partial H_\parallel/\partial t)$. Получена непосредственная функциональная взаимосвязь вихревых электрических полей $\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_0$ с изменением энергий магнитных полей $\mathbf{H}_\perp$ и $H_\parallel$ движущегося заряда.

• Рег. № 2666-80 Деп. УДК 530.12:531.18:537.8 Система уравнений для градиентных электрических полей движущегося заряда. VII. НИКОЛАЕВ Г.В.

Устанавливается система градиентных электрических полей $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ движущегося заряда e, которые обусловливают собой все виды известных магнитных взаимодействий движущегося заряда e_1 с движущимся пробным зарядом e_2 согласно зависимости $\mathbf{F} = e_2(\mathbf{B}_1 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + e_2(\mathbf{A}_1) \equiv (e_2/c)[\mathbf{V}_2\cdot\mathbf{H}_\perp] + (e_2/c)(\mathbf{V}_2\cdot H_\parallel)$

?

Scanned with OKEN Scanner

Organised and sponsored by the
- Electrot. Com. of Polish Academy of Science
- Institute of Transformers, Electrical Machines and Apparatus, Technical University of Lodz
- Electrotechnical Institute Warsaw
- Polish section of IEEE

International Steering Commitee
Prof. J. Turowski (Chairman)
E. Andresen - Univ. Darmstadt GFR
O. Benda CEHOS.
P. Hammond - UK
J.L. IAKUBOWSKI
T. NAKATA - OKAYAMA JAP.
K. PAWLUK
A. SAVINI - Pavia Italy
W. Seruga
R. Sykora
T. Slywinski
J.A. Tegopoulos - Gr.
A. TUGULEA - R
K. ZAKRZEWSKY

ISEF '85

Internat. symposium on electromagnetic fields in electrical engineering

September 26-28, 1985 Warsaw, Poland

is provided as a forum for specialists occupied with theoretical and experimental research in the following topics:

1. Method of analysis and synthesis of electromagnetic fields
2. Electromagnetic field coupled to other fields (e.g.: mechanical, thermal, flow)
3. Magnetic circuits
4. Eddy currents and energy loses.

English will be the official language of Symposium (correspondence, abstracts, papers and debates)

Orriginal and still unpublished papers are only expected.

They will be accepted on the basis of their abstracts which should not exceed 300 words.

Abstracts and supplied questionnaires should be submitted till 1st June 1984 at the adress of

Organizing and Scientific Secretary
Dr. A. KRAWCZYK
Electr. Institute Warsaw NBP
ISEF '85
04-703 Warszawa, Poland
ul. Pozaryskiego 28 ph. 12-34-79 telex IEL-PL-81327

Acceptance of papers will by inf. till 1st Sept 84

All the pap. acc. to appear in print will be published in the Symposium proceedings and deliv. to participants.

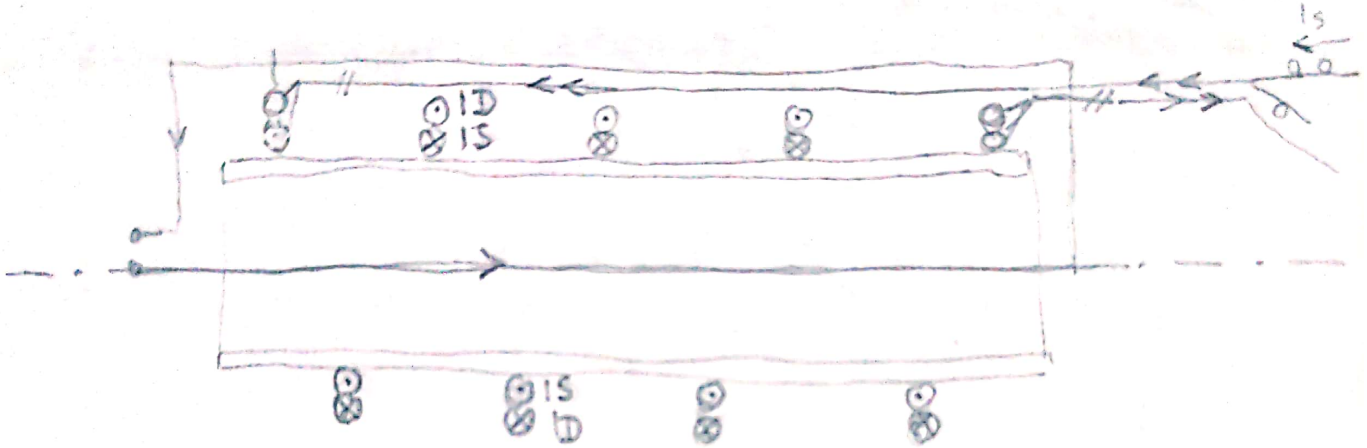
Papers should be submitted till January 15th 1985

All the debates will have the form of topic sessions conducted by chairman, who will appoint two or three papers to be presented orally in full length during each session, but discussions will comprise all the papers

Detailed programme of the Symposium will be sent to the participants until 1st April 1985

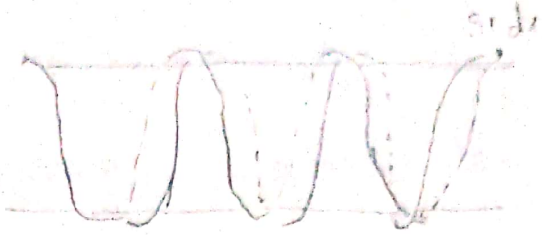
Prof. ZAKRZEWSKY
Chairman of the Organizing Commitee

Prof. J. Turowsky
Chairman of the Steering Commitee



∫

Scanned with OKEN Scanner



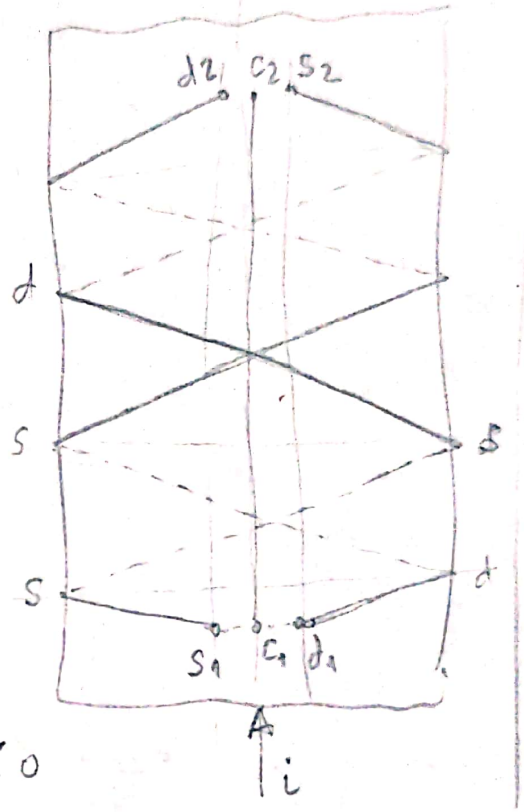
$$\phi_{S_1S_2} + \mathcal{J}_{A\,S_1S_2} + \mathcal{J}_{A\,C_2C_1}$$

$$E_{C_2C_1S_1S_2} = -\frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}$$

$$\phi_{S_1S_2} + \mathcal{J}(A)_{S_1S_2} + \mathcal{J}(A)_{C_2C_1}$$

$$E_{C_2C_1D_1D_2} = f(\phi, \mathcal{J}, \mathcal{J})$$

$$\mathcal{J}(A)_{S_1S_2} = \mathcal{J}(A_{ax} + A_{rot})$$



$\phi_{S_1S_2} > 0$

$\mathcal{J}(A_{ax})_{S_1S_2} > 0$

$\mathcal{J}(A_{rot})_{S_1S_2} \lessgtr 0$

$\mathcal{J}(A)_{C_2C_1} < 0$

$\phi_{D_1D_2} < 0$

$\mathcal{J}(A_{ax})_{D_1D_2} > 0$

$\mathcal{J}(A_{rot})_{D_1D_2} \gtrless 0$

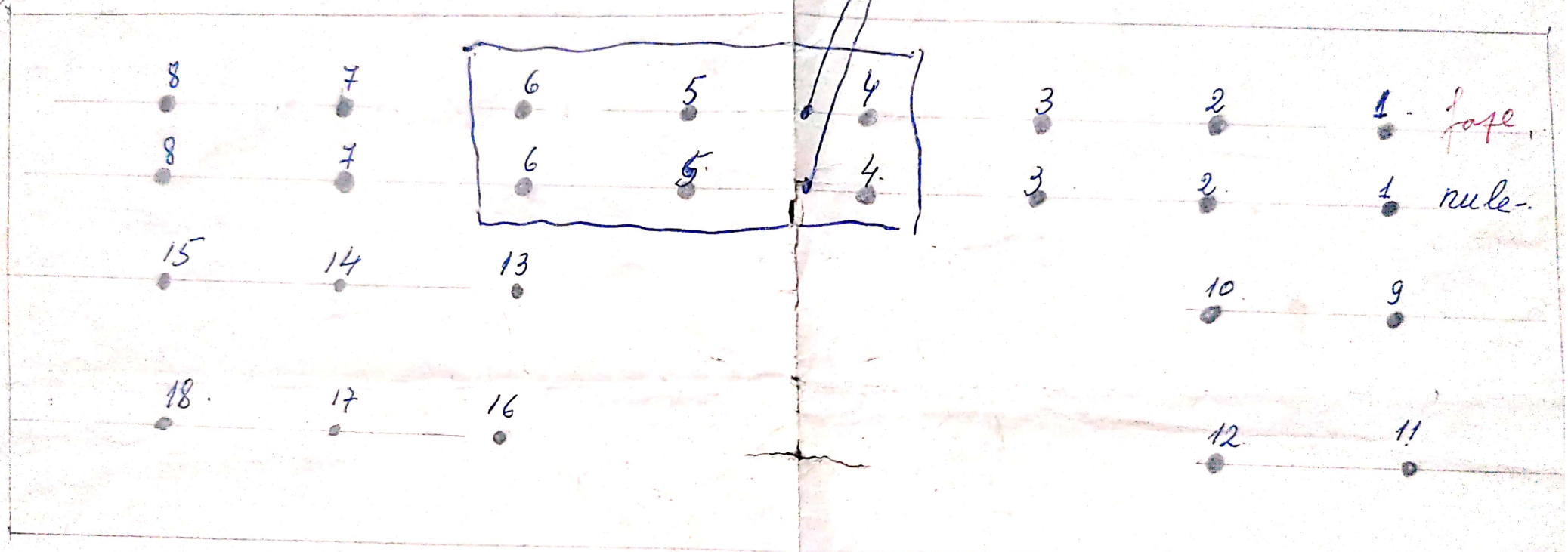
$\mathcal{J}(A)_{C_2C_1} < 0$

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Tablou

electric. de comanda [kWh] .25.09.91



Indicatii: 1, 2. 3 etaj
4 5, 6 parter
7, 8 - subsol.
9, 10 — parter (general)
11, 12 ~~parter~~ etaj (general)
16, 17, 18 - generale.
13, 14, 15 - trifazic subsol -

Scanned with OKEN Scanner

TDK®

HIGH OUTPUT™

IEC I/TYPE I

DYNAMIC PERFORMANCE
PERFORMANCE DYNAMIQUE

D90

TDK D-90

Scanned with OKEN Scanner

90

HIGH OUTPUT

IECI/TYPEI

Sensitivity/Sensibilité

MOL

Output(dB)/Performance(dB)

Frequency(Hz)
Fréquence(Hz)

Bias Noise

60dB DYNAMIC SPECTRAL OUTPUT

>PP<

rieure.

inside
s adentro
étails à l'intérieur
ssembled in U.S.A.
e armado en los E.U.A.
assette assemblée aux États-Unis.

CORP.
Harbor Park Drive, Port Washington, N.Y. 11050 U.S.A.
www.tdk.com

0 20356 20100 5

Cinta hecha en Japón, casette armado en los E.U.A.

IECI/TYPEI

90

Scanned with OKEN Scanner

LEFT EYE

WISHBONE™ 3-D SPECS

RIGHT EYE

©1998 Big Feats! Entertainment. All rights reserved. WISHBONE is a trademark of Big Feats! Entertainment.

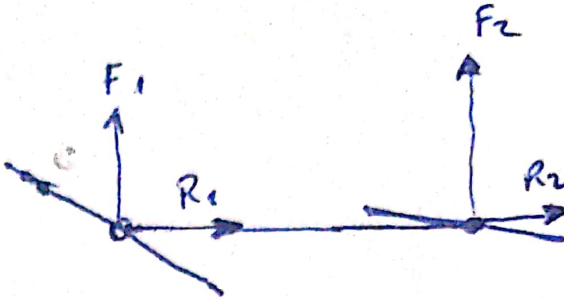
Scanned with OKEN Scanner

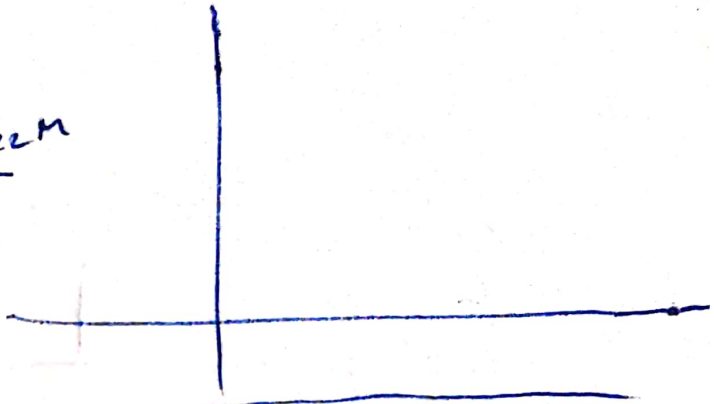
0	4,995 /320k
2 35	4,945 mV /320 ll 22MΩ
4,3m	4,920
1 min	4,946 /320k
3 min	4,975
10.30"	5,018
13.00	5,025
42,00	5,035
52,0	5,014 ?
70,0	5,041
71	5,043 fără 22M

0	5,043 cu 22M
1 min	5,022
2,30	5,007
4,0	5,000 -7
8	4,993
10,30	4,991
13,0	4,990
30,	4,975
39,	4,972 min
45 min	4,976
47	4,980
50	4,986
52	4,992 /320k ll 22MΩ

1 min	5,016 fără 22
3	5,046 15
5 min	5,066 10
9 min	5,101 35 9
16	5,198
23	5,388 33
25	5,455 67 26,6
28	5,552 33
31	5,627
35	5,733 18
40	5,775 15
45	5,825 fără

1 min	5,801 cu 22M

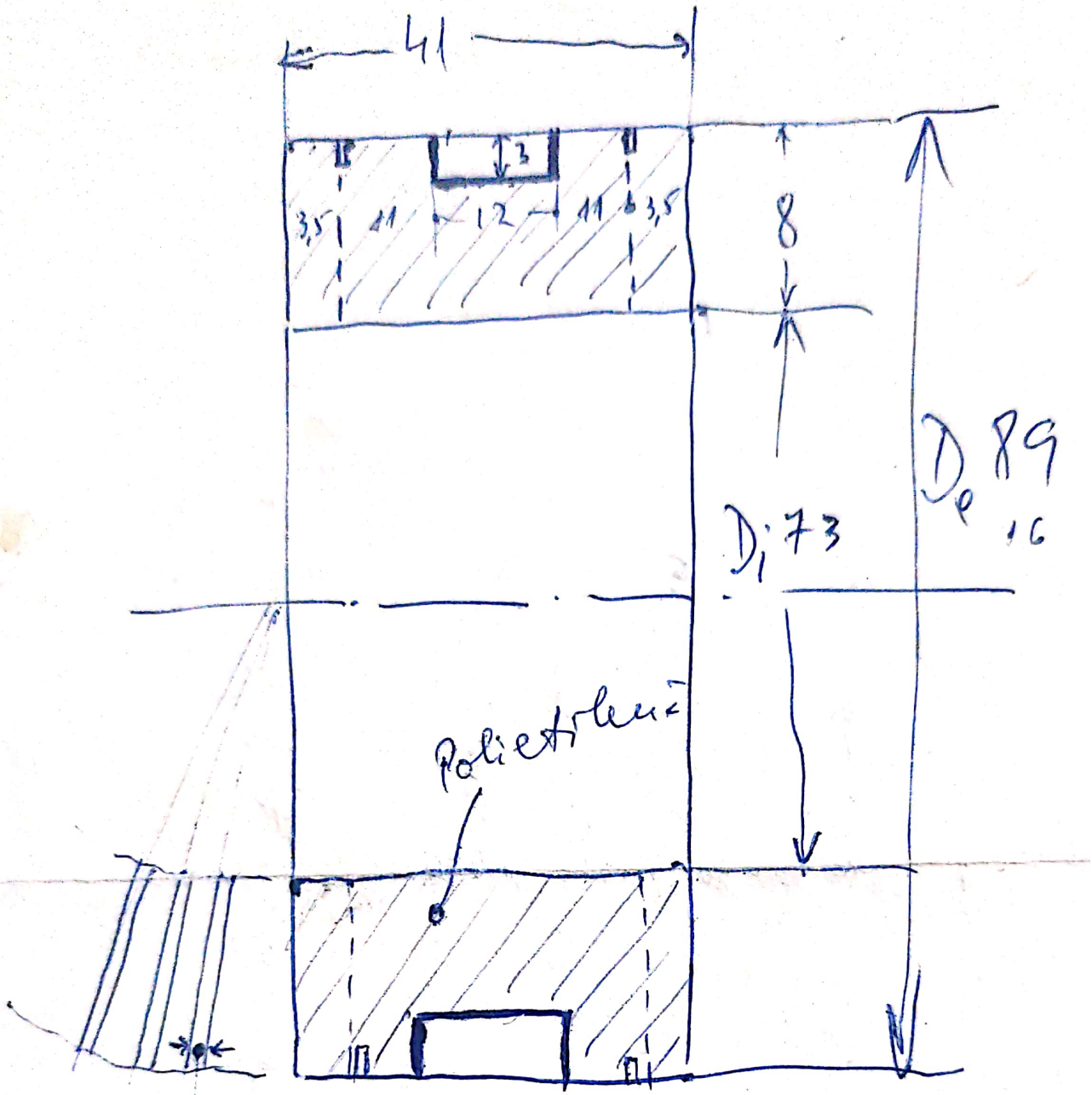




0	5,825
1m	5,801 mV/320 ll 22M
2'30" min	5,782
4 min	5,768 -57µ
8 m	5,743 -25
10.30	5,731 -12
13	5,722 -9 cu 22

0	5,722 fără 22
1	5,743 +21
3	5,757 +14/2=+7/min

Scanned with OKEN Scanner



Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Please check your address and if incomplete fill in details below

Title (Dr/Mr/Mrs)	Family name (surname)	Given names
Company		
Department	Function	
Street		
	P.O. Box	
Country		
Postal code	Town	Telephone / Telex

Scanned with OKEN Scanner

REPLY CARD T&M NEWS 2/93

Please send me further information on:

1 ☐ PM 97 ScopeMeter™
2 ☐ FL 97/AUTO/ScopeMeter®
3 ☐ PM 3394 Series CombiScope™
4 ☐ 5130A Calibration Workstation
5 ☐ 650 CableMeter
6 ☐ 670 LANMeter
7 ☐ 2635A Hydra Data Bucket
8 ☐ PM 5150 ARB Generator
9 ☐ PM 6685 Frequency Counter
10 ☐ PM 6304 RCL Meter
11 ☐ Fluke 10 Series
12 ☐ Fluke 70 Series
13 ☐ Fluke 80 Series
14 ☐ Fluke 1994 Catalog
15 ☐ PM 3331 CombiScope™
16 ☐ GPIB
17 ☐ Demo disk SPECTRUM-TX
18 ☐ PM 3580 Logic Analyzer
19 ☐ PM 6680 Timer/Counter
20 ☐ Programmable Power Supplies

Fluke Europe B.V.
Export Department
P.O. Box 1186
5602 BD Eindhoven
The Netherlands
Mr A. Otten